Chapitre 3

Équations polynomiales

Définitions

1. Une *équation* est une égalité entre deux expressions mathématiques qui contiennent des variables, des lettres (représentant des valeurs fixes) et des nombres.
2. Une *variable* est une grandeur à priori inconnue.
3. Une équation est *résolue* lorsqu'on a trouvé toutes les valeurs, qui mises à la place des variables correspondantes rendent la proposition (donnée par l'équation) vraie.
4. L'ensemble de ces valeurs est appelé l'*ensemble de solutions*, généralement noté S.
5. Une première équation *implique* une deuxième équation, lorsque les solutions de la première sont aussi solution de la deuxième. Mais, il est possible qu'il y ait plus de solutions dans la deuxième que dans la première.
   Par exemple
   $$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4\,, \quad \text{mais} \quad x^2 = 4 \not\Rightarrow x = 2$$
6. Deux équations sont dites *équivalentes* si l'ensemble des solutions de chaque équation est le même.
   Par exemple
   $$|x| = 2 \iff x^2 = 4$$

Au début, on ne va travailler qu'avec des équations à une variable, notée x.

Quelques types d'équations

1. Les *équations du premier degré* sont de la forme
   $$ax + b = 0 \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ et } a \neq 0$$
2. Les *équations du deuxième degré* sont de la forme
   $$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{avec} \quad a, b, c \in \mathbb{R} \text{ et } a \neq 0$$
3. Les *équations bicarrées* sont de la forme
   $$a \cdot y(x)^2 + b \cdot y(x) + c = 0 \quad \text{avec} \quad a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ y(x) \text{ dépend de } x$$

3.1. Résolution des équations du premier degré

Dans ce cas, la méthode la plus utilisée pour résoudre une telle équation consiste à trouver une équation équivalente pour laquelle la variable est *isolée* d'un côté de l'égalité. Dans ce but, on effectue une succession d'OPÉRATIONS RÉVERSIBLES de chaque côté de l'égalité de l'équation.

Par exemple pour résoudre l'équation $5x + 6 = 2x + 4$, on peut procéder comme suit.

$$5x + 6 = 2x + 4 \overset{-6}{\iff} 5x = 2x - 2 \overset{-2x}{\iff} 3x = -2 \overset{:3}{\iff} x = -\frac{2}{3}$$

Par conséquent, l'ensemble de solutions de cette équation est $S = \{-\frac{2}{3}\}$.

Au-dessus de chaque équivalence, il peut être utile de noter l'opération que l'on fait pour passer de l'équation de gauche à celle de droite. Afin de pouvoir parler d'équivalence ($\Leftrightarrow$), il faut s'assurer que cette opération est réversible.

Il a évidemment plusieurs façons de procéder. Ce qui compte, c'est d'avoir une équation équivalente où x est isolé !

3.2. La propriété du produit dans les nombres réels

Si a et b sont deux nombres réels, alors on a l'équivalence suivante :

$$a \cdot b = 0 \quad \iff \quad a = 0 \text{ ou } b = 0$$

En langage technique, on dit que $\mathbb{R}$ est *intègre*.

3.2.1. Application

Si on cherche à résoudre l'équation $(x+1)(x-2) = 0$ dans les nombres réels, on peut utiliser la propriété du produit qui dit que :

$$(x+1)(x-2) = 0 \quad \iff \quad x + 1 = 0 \text{ ou } x - 2 = 0$$

Ainsi, on a :

$$(x+1)(x-2) = 0 \quad \iff \quad x = -1 \text{ ou } x = 2$$

De manière plus générale, on a l'équivalence :

$$\boxed{(x - x_1)(x - x_2) = 0 \quad \iff \quad x = x_1 \text{ ou } x = x_2}$$

3.3. Résolution des équations du deuxième degré

3.3.1. Théorème

On a l'équivalence :

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ admet 1 ou 2 solutions} \iff ax^2 + bx + c \text{ peut se factoriser}$$

La contraposée est :

$$ax^2 + bx + c \text{ ne se factorise pas} \iff ax^2 + bx + c = 0 \text{ n'admet pas de solution}$$

La preuve de '$\Rightarrow$' est montrée dans les pages suivantes, et la preuve de '$\Leftarrow$' utilise la propriété du produit.

3.3.2. Deux méthodes de résolution et la formule de Viète

Pour résoudre une équation du deuxième degré on peut utiliser différentes techniques selon la forme de cette équation. Effectuons les distinctions suivantes :

1. L'équation du deuxième degré est du type $ax^2 + bx + c = 0$ avec $b = 0$ (et $a \neq 0$). Autrement dit, cette équation est équivalente à une équation de la forme suivante (en fait $d = -\frac{c}{a}$) :
$$x^2 = d \quad \text{avec} \quad d \in \mathbb{R}$$

   Une telle équation admet exactement :

   - 0 solution si $d < 0$ (voir la preuve en page 6).
   - 1 solution si $d = 0$. En effet, $x^2 = 0$ si et seulement si $x = 0$.

     En effet, on a les équivalences suivantes :
$$x^2 = 0 \iff x \cdot x = 0 \overset{\text{propriété du produit}}{\iff} x = 0 \ \ (\text{ou } x = 0)$$
   - 2 solutions si $d > 0$. Les solutions seront $\sqrt{d}$ et $-\sqrt{d}$ (ces racines carrées existent et ne sont pas égales car $d \neq 0$). En effet, on a :
$$x^2 = d \overset{-d}{\iff} x^2 - d = 0 \underset{d>0}{\overset{\text{identité remarq.}}{\iff}} (x + \sqrt{d})(x - \sqrt{d}) = 0 \overset{\text{propriété du produit}}{\iff} \left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{d} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{d} \end{array} \right.$$

   En résumé, on a l'équivalence :
$$\boxed{x^2 = d \iff x = \pm\sqrt{d}}$$

   Cette équivalence livre bien deux solutions si d est positif, une solution si d est nul et aucune solution si d est négatif (puisque la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas).

2. L'équation du deuxième degré est du type $ax^2 + bx + c = 0$ avec $c = 0$ (et $a, b \neq 0$). Autrement dit, cette équation est équivalente à une équation de la forme suivante :
$$ax^2 + bx = 0$$

   Une telle équation admet toujours exactement 2 solutions, qui se trouvent grâce à une factorisation évidente et à la propriété du produit :
$$ax^2 + bx = 0 \iff x(ax + b) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \text{ou} \\ ax + b = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = -\frac{b}{a} \end{array} \right.$$

   Remarque cruciale : il est très important de ne pas apprendre par cœur les solutions de cette équation. Il suffit de se souvenir de la méthode utilisée (qui consiste par commencer par mettre x en évidence, puis par utiliser la propriété du produit).

3. L'équation du deuxième degré est du type $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a, b, c \neq 0$. Pour simplifier les calculs, on peut supposer que $a > 0$ (dans le cas contraire, il suffit de commencer par mettre le signe en évidence).

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\Big(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\Big) = a\Bigg(\overbrace{\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2}{4a^2}}^{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}} + \frac{c}{a}\Bigg) \\
&= a\left(\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \quad (\bigstar)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Comme on l'a vu au point 1 qui précède, le nombre de solutions d'une telle équation est donné par le signe de l'expression $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

Autrement dit, c'est le signe de l'expression $b^2 - 4ac$ qui détermine le nombre de solutions de l'équation (puisque $4a^2$ est toujours positif). C'est pour cette raison que cette expression s'appelle le *discriminant de l'équation*. Il est noté $\Delta = b^2 - 4ac$.

Ainsi l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ possède exactement :

- 0 solution si son discriminant est négatif (c'est-à-dire si $\Delta < 0$).
- 1 solution si son discriminant est nul (c'est-à-dire si $\Delta = 0$).
- 2 solutions si son discriminant est positif (c'est-à-dire si $\Delta > 0$).

On peut donc continuer la tentative de factorisation précédente lorsque le discriminant est positif ou nul. On obtient :

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\left(\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \quad (\bigstar) \\
&= a\left(\Big(x + \frac{b}{2a}\Big) + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right)\left(\Big(x + \frac{b}{2a}\Big) - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right) \\
&\overset{a>0}{=} a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \\
&= a\left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)
\end{aligned}$$

On a ainsi démontré *la formule de Viète* qui permet de résoudre $ax^2 + bx + c = 0$. On a l'équivalence :

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Cette équivalence livre bien deux solutions si le discriminant est positif, une solution si le discriminant est nul et aucune solution si le discriminant est négatif (puisque la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas).

3.3.3. Exemples

1. Résolvons l'équation $2x^2 + 8x + 8 = 0$.

   Le discriminant de cette équation est $\Delta = 8^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 = 64 - 64 = 0$. On sait donc qu'il n'y a qu'une solution. Dans ce cas, c'est qu'il se cache une identité remarquable. On a :

$$\begin{aligned} 2x^2 + 8x + 8 = 0 &\iff 2(x^2 + 4x + 4) = 0 \iff 2(x+2)^2 = 0 \\ &\iff x + 2 = 0 \iff x = -2 \end{aligned}$$

   Donc l'ensemble de solutions est $S = \{-2\}$. Bien sûr, on aurait aussi pu utiliser la formule de Viète, mais c'est tout de même plus élégant avec une identité remarquable.

2. Résolvons l'équation $x^2 + 2x + 2 = 0$.

   Le discriminant de cette équation est $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 < 0$. On sait donc qu'il n'y a pas de solution. Donc l'ensemble de solutions est $S = \emptyset$.

3. Résolvons l'équation $2x^2 - x - 1 = 0$.

   Le discriminant de cette équation est $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9 > 0$. On sait donc qu'il y a deux solutions. On peut donc utiliser la formule de Viète pour trouver ces solutions :

$$2x^2 - x - 1 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = -\frac{1}{2} \text{ ou } 1$$

   Donc l'ensemble de solutions est $S = \{-\frac{1}{2}, 1\}$.

   Néanmoins, pour être sûr que la factorisation de la page précédente soit comprise, on peut aussi résoudre cette équation comme précédemment.

$$\begin{aligned} 2x^2 - x - 1 &= 2\left(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) = 2\left(\overbrace{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}}^{x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} - \frac{1}{16}} - \frac{1}{2}\right) \\ &= 2\left(\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1+8}{16}\right) = 2\left(\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right) \quad (\bigstar) \\ &= 2\left(\left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4}\right)\left(\left(x - \frac{1}{4}\right) - \frac{3}{4}\right) \\ &= 2\left(x - \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)\left(x - \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) \\ &= 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 1) \end{aligned}$$

   Ainsi, on a :

$$2x^2 - x - 1 = 2(x + \tfrac{1}{2})(x - 1) = 0 \iff x = -\tfrac{1}{2} \text{ ou } 1$$

3.4. Résolution des équations bicarrées

Pour résoudre l'équation $a \cdot y(x)^2 + b \cdot y(x) + c = 0$ (avec $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ et où $y(x)$ est une expression algébrique qui dépend de x), on utilise aussi la formule de Viète. On a :

$$a \cdot y(x)^2 + b \cdot y(x) + c = 0 \iff y(x) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ensuite, on termine la résolution en cherchant les valeurs de x qui sont solutions.

3.4.1. Exemples

1. Résolvons l'équation $2x^4 - x^2 - 1 = 0$. Il faut reconnaître une équation bicarrée! On a :

   $$2x^4 - x^2 - 1 = 0 \iff 2(x^2)^2 - (x^2) - 1 = 0$$

   Ainsi, on a $y(x) = x^2$. Par Viète, on trouve que : $y(x) = -\frac{1}{2}$ ou 1

   Donc $x^2 = -\frac{1}{2}$ ou $x^2 = 1$. La première équation n'admettant pas de solution, il reste à résoudre $x^2 = 1$. Donc les solutions de l'équation bicarrée sont ± 1.

   Par conséquent, l'ensemble de solutions est $S = \{\pm 1\}$

2. Résolvons l'équation $2^{2x} - 2^{x+1} = 3$. Il faut reconnaître une équation bicarrée! On a :

   $$2^{2x} - 2^{x+1} = 3 \iff 2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 3 = 0 \iff (2^x)^2 - 2(2^x) - 3 = 0$$

   Ainsi, on a $y(x) = 2^x$. Par Viète, on trouve que : $y(x) = -1$ ou 3

   Donc $2^x = -1$ ou $2^x = 3$. La première équation n'admettant pas de solution, il reste à résoudre $2^x = 3$. Il y a donc une seule solution qui est $x = \log_2(3) \cong 1.5850$.

   Par conséquent, l'ensemble de solutions est $S = \{\log_2(3)\}$.

3.5. Systèmes d'équations polynomiales

Définition

Un *système d'équations* est composé de plusieurs équations. Dans ce cas, il peut aussi y avoir plusieurs variables, généralement appelées x, y, z ou encore x_1, x_2, x_3, etc.

Pour résoudre un système d'équations, on peut travailler équation par équation comme précédemment. Mais, on peut en plus, mélanger les équations. Voici deux techniques, parmi d'autres, qui sont souvent utilisées, voire mixée.

1. *Résolution par substitution.*

   On isole une variable dans une équation. Puis, chaque fois que cette variable apparaît dans les autres équations on la remplace par ce qu'on a trouvé.

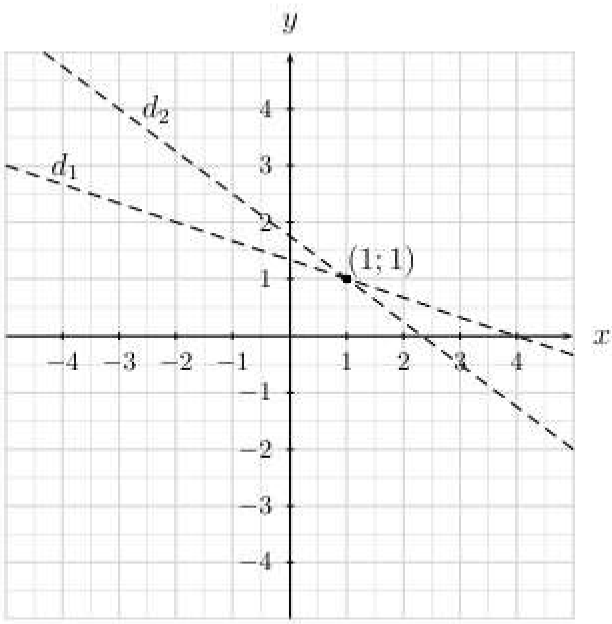
   Exemple :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 6y & = & 8 \\ 3x & + & 4y & = & 7 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & = & 8 & - & 6y \\ 3x & + & 4y & = & 7 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 4 & - & 3y \\ 3x & + & 4y & = & 7 \end{array}\right.$$

$$\underset{\text{dans la 2e équation}}{\overset{\text{substitution de } x}{\iff}} \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 4 & - & 3y \\ 3(4-3y) & + & 4y & = & 7 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 4 & - & 3y \\ -5y & + & 12 & = & 7 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 4 & - & 3y \\ y & = & 1 & & \end{array}\right. \underset{\text{dans la 1ère équation}}{\overset{\text{substitution de } y}{\iff}} \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1 \\ y & = & 1 \end{array}\right.$$

   L'ensemble de solutions n'est plus un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, car on a trouvé que la seule solution de ce système d'équation est $x = 1$ et simultanément $y = 1$. Pour décrire l'ensemble de solutions, il faut se placer dans le plan $\mathbb{R}^2$. Ainsi, l'ensemble de solutions S est représenté par le point $(1; 1)$ de la manière suivante :



   Donc l'ensemble de solutions $S = \{(1; 1)\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$.

   Pour les lecteurs avancés : en traitillés, on voit les droites $d_1 : 2x + 6y = 8$ et $d_2 : 3x + 4y = 7$. L'ensemble des solutions est ainsi l'ensemble des points d'intersection de ces deux droites. Il n'y a qu'un point d'intersection qui est $I(1; 1)$.

2. *Résolution par combinaison.*

On s'arrange pour modifier les équations de sorte que si on les additionne entre-elles (ou qu'on les soustraie entre-elles), une variable disparaisse ! Afin de continuer d'avoir un système équivalent, on va conserver une des deux équations telle quelle.

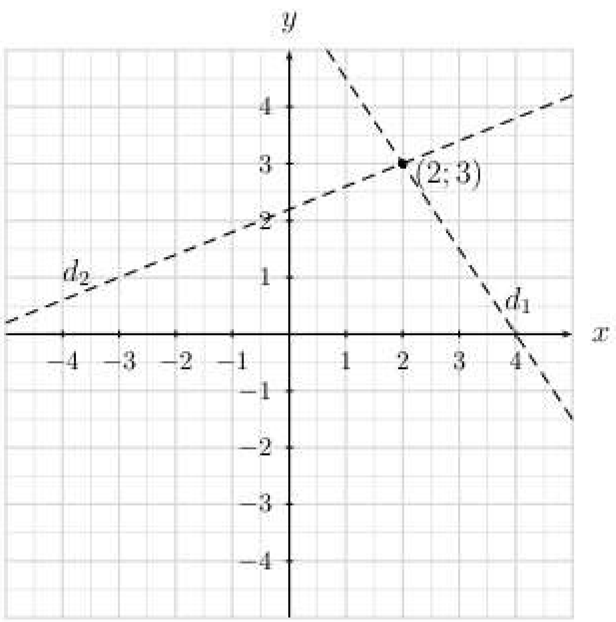
Exemple :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 2y & = & 12 \\ 2x & - & 5y & = & -11 \end{array}\right. \underset{\cdot 3}{\overset{\cdot 2}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{rcrcr} 6x & + & 4y & = & 24 \\ 6x & - & 15y & = & -33 \end{array}\right.$$

$$\underset{\text{on soustrait la première}}{\overset{\text{à la deuxième équation,}}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{rcrcr} 6x & + & 4y & = & 24 \\ & - & 19y & = & -57 \end{array}\right. \underset{\div(-19)}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcr} 6x & + & 4y & = & 24 \\ & & y & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\underset{\text{quatre fois la deuxième}}{\overset{\text{à la première équation, on soustrait}}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{rcrcr} 6x & & & = & 12 \\ & & y & = & 3 \end{array}\right. \overset{\div 6}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 2 \\ y & = & 3 \end{array}\right.$$

On a donc l'ensemble de solutions $S = \{(2;3)\}$, qui est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ représenté graphiquement ci-dessous.



Pour les lecteurs avancés : en traitillés, on voit les droites $d_1 : 3x + 2y = 12$ et $d_2 : 2x - 5y = -11$. L'ensemble des solutions est ainsi l'ensemble des points d'intersection de ces deux droites. Il n'y a qu'un point d'intersection qui est $I(2;3)$.

Remarques

Les équations et les systèmes d'équations sur lesquels on peut tomber lorsqu'on cherche à résoudre des problèmes sont en général plus difficile à résoudre que les exemples que l'on vient de voir. Il est fréquent que le mathématicien utilise des méthodes numériques pour trouver une bonne approximation de la solution.

Tous les jours, un peu partout dans le monde, des milliers d'ordinateurs résolvent des systèmes d'équations qui comportent des milliers d'équations et de milliers de variables.