Résolution d'équations par radicaux

Résolution par radicaux des équations du premier, deuxième, troisième et quatrième degré à une inconnue

Equation du premier degré à une inconnue

Soit l'équation: $ax + b = 0, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$

Son unique solution est: $x = -\frac{b}{a}$.

Equation du deuxième degré à une inconnue

Soit l'équation: $ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0.$

Soit: $A = b^2 - 4ac.$

On considère plusieurs cas:

1) $A > 0;$

2) $A = 0;$

3) $A < 0.$

Les solutions de: $ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0,$ sont données par:

1) $x = -\frac{1}{2a}(b - \sqrt{A}), x = -\frac{1}{2a}(b + \sqrt{A});$

2) $x = -\frac{1}{2a}b;$

3) il n'y a aucune solution dans $\mathbb{R}$.

Equation du troisième degré à une inconnue

Soit l'équation: $ax^3 + bx^2 + cx + d, a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0.$

Soient: $A = b^2 - 3ac$ et

$B = 2b^3 - 9abc + 27a^2d.$

On considère plusieurs cas:

1) $A = 0;$

2) $A \neq 0, B^2 - 4A^3 > 0;$

3) $A \neq 0, B^2 - 4A^3 = 0;$

4) $A \neq 0, B^2 - 4A^3 < 0.$

Les solutions de: $ax^3 + bx^2 + cx + d, a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0,$ sont données par:

1) $x = -\frac{1}{3a}(b + \sqrt[3]{B});$

2) $x = -\frac{1}{3a}\left(b + \sqrt[3]{\frac{B - \sqrt{B^2 - 4A^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{B + \sqrt{B^2 - 4A^3}}{2}}\right);$

3) $x = -\frac{1}{3a}(b - \frac{B}{2A})$ (racine double) et

$x = -\frac{1}{3a}(b + \frac{B}{A})$ (racine simple);

4) $x = -\frac{1}{3a}(b - 2\sqrt{A}\cos(\varphi)),$

$x = -\frac{1}{3a}(b - 2\sqrt{A}\cos(\varphi + \frac{2\pi}{3})),$

$x = -\frac{1}{3a}(b - 2\sqrt{A}\cos(\varphi + \frac{4\pi}{3})),$ où $\cos(3\varphi) = -\frac{B}{2A^{\frac{3}{2}}}.$

Equation du quatrième degré à une inconnue

Soit l'équation: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, a, b, c, d, e \in \mathbb{R}, a \neq 0.$

Soient: $p = \frac{8ac - 3b^2}{8}$,

$q = \frac{2b^3 - 8abc + 16a^2 d}{16}$,

$r = \frac{256a^3 e - 3b^4 - 64a^2 bd + 16ab^2 c}{256}$,

$k = 2p$,

$l = p^2 - 4r$,

$m = -q^2$,

$A = k^2 - 3l$,

$B = 2k^3 - 9kl + 27m.$

On considère plusieurs cas:

1) Si: $|b| + |c| > 0, B^2 - 4A^3 > 0, -k + \sqrt[3]{\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4A^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-B - \sqrt{B^2 - 4A^3}}{2}} \geq 0$,

on pose: $u_0 = \sqrt{\frac{1}{3}\left(-k + \sqrt[3]{\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4A^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-B - \sqrt{B^2 - 4A^3}}{2}}\right)}$;

2) Si: $|b| + |c| > 0, B^2 - 4A^3 > 0, -k + \sqrt[3]{\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4A^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-B - \sqrt{B^2 - 4A^3}}{2}} < 0$,

alors $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, a, b, c, d, e \in \mathbb{R}, a \neq 0,$

n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$;

3) Si: $|b| + |c| > 0, B^2 = 4A^3, B > 0, k \leq -\frac{B}{A}$,

on pose: $u_o = \sqrt{-\frac{1}{3}(k + \frac{B}{A})}$ et

$u_1 = \sqrt{\frac{1}{3}(\frac{B}{2A} - k)}$;

4) Si: $|b| + |c| > 0, B^2 = 4A^3, B > 0, -\frac{B}{A} < k \leq \frac{B}{2A}$,

on pose: $u_0 = \sqrt{\frac{1}{3}(\frac{B}{2A} - k)}$;

5) Si: $|b|+|c|>0, B^2=4A^3, B>0, k>\frac{B}{2A}$,

alors $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0, a,b,c,d,e\in\mathbb{R}, a\neq 0$,

n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$;

6) Si: $|b|+|c|>0, B^2=4A^3, B<0, k\leq\frac{B}{2A}$,

on pose: $u_o=\sqrt{\frac{1}{3}(\frac{B}{2A}-k)}$ et

$u_1=\sqrt{-\frac{1}{3}(k+\frac{B}{A})}$;

7) Si: $|b|+|c|>0, B^2=4A^3, B<0, \frac{B}{2A}<k\leq-\frac{B}{A}$,

on pose: $u_0=\sqrt{-\frac{1}{3}(k+\frac{B}{A})}$;

8) Si: $|b|+|c|>0, B^2=4A^3, B<0, k>-\frac{B}{A}$,

alors $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0, a,b,c,d,e\in\mathbb{R}, a\neq 0$,

n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$;

9) Si: $|b|+|c|>0, A=B=0, 3b^2-8ac<0$,

alors $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0, a,b,c,d,e\in\mathbb{R}, a\neq 0$,

n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$;

10) Si: $|b|+|c|>0, A=B=0, 3b^2-8ac\geq 0$,

on pose: $u_0=\sqrt{\frac{3b^2-8ac}{12}}$;

11) Si: $|b|+|c|>0, B^2<4A^3$,

on pose: $\varphi=\frac{1}{3}\arccos(-\frac{B}{2A^{\frac{3}{2}}})$ et

$C_i=2\sqrt{A}\,\cos(\varphi+\frac{2\pi}{3}i)-k, i=0,1,2$;

s'il existe i = 0, 1 ou/et 2 tel(s) que: $2\sqrt{A}\,\cos(\varphi+\frac{2\pi}{3}i)-k\geq 0$,

on pose, pour ces i-là: $u_i=\sqrt{\frac{1}{3}(2\sqrt{A}\,\cos(\varphi+\frac{2\pi}{3}i)-k)}$;

12) Si: $|b|+|c|>0, B^2<4A^3,$

on pose: $\varphi=\frac{1}{3}\arccos(-\frac{B}{2A^{\frac{3}{2}}})$ et

$C_i=2\sqrt{A}\,\cos(\varphi+\frac{2\pi}{3}i)-k, i=0,1,2;$

Si: $2\sqrt{A}\,\cos(\varphi+\frac{2\pi}{3}i)-k<0, \forall i=0,1,2,$

alors $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0, a,b,c,d,e\in\mathbb{R}, a\neq 0,$

n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$;

13) Si: $b=c=0, 27d^4-256ae^3>0,$ et

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2a^2}\left(d^2+\sqrt{\frac{27d^4-256ae^3}{27}}\right)}+\sqrt[3]{\frac{1}{2a^2}\left(d^2-\sqrt{\frac{27d^4-256ae^3}{27}}\right)}\geq 0,$$

on pose: $u_0=\sqrt{\sqrt[3]{\frac{1}{2a^2}\left(d^2+\sqrt{\frac{27d^4-256ae^3}{27}}\right)}+\sqrt[3]{\frac{1}{2a^2}\left(d^2-\sqrt{\frac{27d^4-256ae^3}{27}}\right)}}\,;$

14) Si: $b=c=0, 27d^4-256ae^3>0,$ et

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2a^2}\left(d^2+\sqrt{\frac{27d^4-256ae^3}{27}}\right)}+\sqrt[3]{\frac{1}{2a^2}\left(d^2-\sqrt{\frac{27d^4-256ae^3}{27}}\right)}<0,$$

alors $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0, a,b,c,d,e\in\mathbb{R}, a\neq 0,$

n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$;

15) Si: $b=c=0, 27d^4-256ae^3=0, d\neq 0, e\neq 0,$

on pose: $u_0=\frac{d}{2\sqrt{a}}\sqrt{\frac{3}{e}}\,;$

16) Si: $b=c=d=0, e\neq 0, \frac{e}{a}>0,$

alors $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0, a,b,c,d,e\in\mathbb{R}, a\neq 0,$

n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$;

17) Si: $b=c=d=0, e\neq 0, \frac{e}{a}<0,$

alors $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0, a,b,c,d,e\in\mathbb{R}, a\neq 0,$

a les 2 solutions suivantes:

$x=\sqrt[4]{-\frac{e}{a}}$ et $x=-\sqrt[4]{-\frac{e}{a}}\,;$

18) Si: $b=c=e=0, d\neq 0,$

alors $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0, a,b,c,d,e\in\mathbb{R}, a\neq 0,$

a les 2 solutions suivantes:

$x=0$ et $x=-\sqrt[3]{\frac{d}{a}}$;

19) Si: $b=c=d=e=0,$

alors $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0, a,b,c,d,e\in\mathbb{R}, a\neq 0,$

a l'unique solution: $x=0;$

20) Si: $b=c=0, 27d^4-256ae^3<0, a>0,$

on pose: $\varphi=\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3^{\frac{3}{2}}d^2}{16\sqrt{a}\,e^{\frac{3}{2}}}\right)$ et $D_i=\cos(\varphi+\frac{2\pi}{3}i), i=0,1,2;$

S'il existe *i* = 0, 1 ou/et 2 tels que $\cos(\varphi+\frac{2\pi}{3}i)\geq 0,$

on pose, pour ces *i*-là: $u_i=\sqrt{4\sqrt{\frac{e}{3a}}\cos(\varphi+\frac{2\pi}{3}i)}$;

21) Si: $b=c=0, 27d^4-256ae^3<0, a>0,$

on pose: $\varphi=\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3^{\frac{3}{2}}d^2}{16\sqrt{a}\,e^{\frac{3}{2}}}\right)$ et $D_i=\cos(\varphi+\frac{2\pi}{3}i), i=0,1,2;$

Si: $\cos(\varphi+\frac{2\pi}{3}i)<0, \forall i=0,1,2,$

alors $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0, a,b,c,d,e\in\mathbb{R}, a\neq 0,$

n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

22) Si: $b=c=0, 27d^4-256ae^3<0, a<0,$

alors $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0, a,b,c,d,e\in\mathbb{R}, a\neq 0,$

n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Pour les *i* = 0, 1 ou/et 2 pour lesquels u_i est défini, on a alors les cas suivants:

A) Si: $u_i=0, p^2-4r\geq 0,$

on pose: $v_i=\frac{p+\sqrt{p^2-4r}}{2}$ et $w_i=\frac{p-\sqrt{p^2-4r}}{2};$

B) Si: $u_i=0, p^2-4r<0,$

alors $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0, a,b,c,d,e\in\mathbb{R}, a\neq 0,$

n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$;

C) Si: $u_i \neq 0$ est défini dans les points 1) à 12) ci-dessus,

on pose: $v_i=\frac{1}{2}(p+u_i^2-\frac{q}{u_i})$ et $w_i=\frac{1}{2}(p+u_i^2+\frac{q}{u_i})$;

D) Si: $u_i \neq 0$ est défini dans les points 13) à 21) ci-dessus,

on pose: $v_i=\frac{1}{2}(u_i^2-\frac{d}{au_i})$ et $w_i=\frac{1}{2}(u_i^2+\frac{d}{au_i})$.

Les solutions de $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0, a,b,c,d,e\in\mathbb{R}, a\neq 0,$

sont alors données par:

I) Pour tout i tel que: $u_i^2-4v_i>0$ et $u_i^2-4w_i>0$,

les solutions sont: $x=\frac{1}{a}\left(\frac{-u_i+\sqrt{u_i^2-4v_i}}{2}-\frac{b}{4}\right)$,

$$x=\frac{1}{a}\left(\frac{-u_i-\sqrt{u_i^2-4v_i}}{2}-\frac{b}{4}\right),$$

$$x=\frac{1}{a}\left(\frac{u_i+\sqrt{u_i^2-4w_i}}{2}-\frac{b}{4}\right),$$

$$x=\frac{1}{a}\left(\frac{u_i-\sqrt{u_i^2-4w_i}}{2}-\frac{b}{4}\right);$$

II) Pour tout i tel que: $u_i^2-4v_i=0$ et $u_i^2-4w_i>0$,

les solutions sont: $x=\frac{1}{a}(-\frac{u_i}{2}-\frac{b}{4})$,

$$x=\frac{1}{a}\left(\frac{u_i+\sqrt{u_i^2-4w_i}}{2}-\frac{b}{4}\right),$$

$$x=\frac{1}{a}\left(\frac{u_i-\sqrt{u_i^2-4w_i}}{2}-\frac{b}{4}\right);$$

III) Pour tout i tel que: $u_i^2-4v_i<0$ et $u_i^2-4w_i>0$,

les solutions sont: $x=\frac{1}{a}\left(\frac{u_i+\sqrt{u_i^2-4w_i}}{2}-\frac{b}{4}\right)$,

$$x=\frac{1}{a}\left(\frac{u_i-\sqrt{u_i^2-4w_i}}{2}-\frac{b}{4}\right);$$

IV) Pour tout i tel que: $u_i^2 - 4v_i > 0$ et $u_i^2 - 4w_i = 0$,

les solutions sont: $x = \frac{1}{a}\left(\frac{-u_i + \sqrt{u_i^2 - 4v_i}}{2} - \frac{b}{4}\right)$,

$x = \frac{1}{a}\left(\frac{-u_i - \sqrt{u_i^2 - 4v_i}}{2} - \frac{b}{4}\right)$,

$x = \frac{1}{a}(\frac{u_i}{2} - \frac{b}{4})$;

V) Pour tout i tel que: $u_i^2 - 4v_i = 0$ et $u_i^2 - 4w_i = 0$,

les solutions sont: $x = \frac{1}{a}(-\frac{u_i}{2} - \frac{b}{4})$,

$x = \frac{1}{a}(\frac{u_i}{2} - \frac{b}{4})$;

VI) Pour tout i tel que: $u_i^2 - 4v_i < 0$ et $u_i^2 - 4w_i = 0$,

les solutions sont: $x = \frac{1}{a}(\frac{u_i}{2} - \frac{b}{4})$;

VII) Pour tout i tel que: $u_i^2 - 4v_i > 0$ et $u_i^2 - 4w_i < 0$,

les solutions sont: $x = \frac{1}{a}\left(\frac{-u_i + \sqrt{u_i^2 - 4v_i}}{2} - \frac{b}{4}\right)$,

$x = \frac{1}{a}\left(\frac{-u_i - \sqrt{u_i^2 - 4v_i}}{2} - \frac{b}{4}\right)$;

VIII) Pour tout i tel que: $u_i^2 - 4v_i = 0$ et $u_i^2 - 4w_i < 0$,

les solutions sont: $x = \frac{1}{a}(-\frac{u_i}{2} - \frac{b}{4})$;

IX) Pour tout i tel que: $u_i^2 - 4v_i < 0$ et $u_i^2 - 4w_i < 0$,

alors $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, a, b, c, d, e \in \mathbb{R}, a \neq 0$,

n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$;