canton de vaud

gymnase de nyon

NOTE :

Corrigé

NOM : ______________________ **PRÉNOM :** ______________________

EXAMEN D'ADMISSION AUX GYMNASES VAUDOIS
SESSION 2020

ÉCOLE DE MATURITÉ

BRANCHE	:	MATHÉMATIQUES
SIGLE	:	EXAD-1M-MAT-03
EXAMEN	:	ÉCRIT

Durée 3 heures

Matériel autorisé calculatrice TI-30 ECO RS, TI-30 X II S ou TI-30 X II B, règle, équerre, rapporteur, compas, formulaire joint à l'épreuve.

Consignes

- le candidat rédige les solutions directement sur les feuilles de données dans l'espace prévu à cet effet sous chaque question (il n'utilise pas la couleur rouge) ;
- lorsque cet espace n'est pas suffisant, le candidat l'indique clairement dans sa réponse et termine au verso ;
- les feuilles de brouillon ne sont pas corrigées ;
- la rédaction doit être soignée ; les calculs et les raisonnements doivent être détaillés ;
- la réponse doit être soulignée ou encadrée.

Partie technique ________ **/ 30 pts**
Partie analyse-réflexion ________ **/ 70 pts**
Pondération partie technique 30% et partie analyse-réflexion 70% de la note finale

Partie technique

Question 1

/ **4 pts**

Calculer en détaillant les calculs et donner la réponse sous la forme de fraction irréductible.

a) $\left(\frac{6}{5}+\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{10}\right)$

$\frac{6}{5}+\frac{3}{4}=\frac{24}{20}+\frac{15}{20}=\frac{39}{20}$

$\left(\frac{6}{5}+\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{10}\right)=\frac{39}{20}\cdot\left(-\frac{3}{10}\right)=-\frac{117}{200}$

b) $\frac{1}{49}+\frac{1}{14}\div\frac{1}{2}$

$\frac{1}{14}:\frac{1}{2}=\frac{1}{\cancel{14}_{7}}\cdot\frac{\cancel{2}^{1}}{1}=\frac{1}{7}$

$\frac{1}{49}+\frac{1}{14}:\frac{1}{2}=\frac{1}{49}+\frac{1}{7}=\frac{1}{49}+\frac{7}{49}=\frac{8}{49}$

Question 2

/ **3 pts**

Calculer en détaillant les calculs la valeur de l'expression

$$-a^2-\frac{b-3a}{6c}$$

lorsque $a=-1$, $b=3$ et $c=2$.
Donner la réponse sous la forme de fraction irréductible.

$-a^2-\frac{b-3a}{6c}=-\underbrace{(-1)^2}_{1}-\frac{3-3\cdot(-1)}{6\cdot 2}=-1-\frac{3+3}{12}=-1-\frac{6}{12}=$

$=-1-\frac{1}{2}=\frac{-2}{2}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$

Question 3

/ **4 pts**

Effectuer et réduire au maximum.

a) $(2x+1)(x-3)x$

$(2x+1)(x-3) = 2x^2 \underbrace{-6x+x}-3 = 2x^2-5x-3$

$(2x+1)(x-3)x = (2x^2-5x-3)x = 2x^3-5x^2-3x$

b) $(5-2x)^2-(x-3)$

$(5-2x)^2 = (5-2x)(5-2x) = 25 \underbrace{-10x-10x} + 4x^2 = 4x^2-20x+25$

$(5-2x)^2-(x-3) = 4x^2-20x+25-x+3 = 4x^2-21x+28$

Question 4

/ **6 pts**

Factoriser au maximum les polynômes suivants.

a) $x^2+3x-10$

On cherche par tâtonnement 2 nombres m et n tels que $m+n=3$ et $m \cdot n=-10$.

On trouve $m=5$ et $n=-2$

$\Rightarrow x^2+3x-10 = (x+m)(x+n) = (x+5)(x-2)$

b) $x^2+8x+16$

$x^2+8x+16$ est de la forme $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$ avec $a=x$ et $b=4$

$\Rightarrow x^2+8x+16 = (x+4)^2$

c) $x^4 - 5x^3 + 6x^2$

x^2 est un facteur commun ; on peut donc le mettre en évidence

$\Rightarrow x^4 - 5x^3 + 6x^2 = x^2(x^2 - 5x + 6)$.

On cherche maintenant 2 nombres m et n tels que $m + n = -5$ et $m \cdot n = 6$. On trouve $m = -2$ et $n = -3$. Ainsi $x^2 - 5x + 6 = (x+m)(x+n) = (x-2)(x-3)$

$\Rightarrow x^4 - 5x^3 + 6x^2 = x^2(x-2)(x-3)$

d) $32 - 2x^2$

2 est un facteur commun ; on peut donc le mettre en évidence

$\Rightarrow 32 - 2x^2 = 2(16 - x^2)$

$16 - x^2$ est de la forme $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ avec $a = 4$ et $b = x$. Ainsi

$16 - x^2 = (4+x)(4-x)$

$\Rightarrow 32 - 2x^2 = 2(4+x)(4-x)$

Question 5

/ **9 pts**

Résoudre les équations suivantes et donner la réponse sous la forme de fraction irréductible.

a) $1 = \frac{3x}{6} - \frac{x+3}{4}$

$1 = \frac{\cancel{3}^{1}x}{\cancel{6}_{2}} - \frac{x+3}{4}$ | Simplifier

$1 = \frac{x}{2} - \frac{x+3}{4}$ | dénominateur commun : 4

$\frac{4}{4} = \frac{2x}{4} - \frac{x+3}{4}$ | $\cdot 4$ ⚠

$4 = 2x - x - 3$ | réduire

$4 = x - 3$ | $+3$

$x = 7$

b) $3(x-2)^2 = (x-1)(x-2)$

$(x-2)^2 = (x-2)(x-2) = x^2 \underbrace{-2x-2x}+4 = x^2-4x+4$

$3(x-2)^2 = 3(x^2-4x+4) = 3x^2-12x+12$

$(x-1)(x-2) = x^2 \underbrace{-2x-x}+2 = x^2-3x+2$

$3(x-2)^2 = (x-1)(x-2)$ | Développement

$3x^2-12x+12 = x^2-3x+2$ | $-x^2+3x-2$

$2x^2-9x+10=0$ | Formule de Viète

$a=2,\ b=-9,\ c=10$

$\Delta = b^2-4ac = (-9)^2-4\cdot2\cdot10 = 81-80 = 1 > 0$

$\sqrt{\Delta} = 1$

On a 2 solutions : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9+1}{2\cdot2} = \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2}$

et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9-1}{2\cdot2} = \dfrac{8}{4} = 2$

c) $9x^2+7x+7 = 5x+3$

$9x^2+7x+7 = 5x+3$ | $-5x-3$

$9x^2+2x+4=0$ | Formule de Viète

$a=9,\ b=2,\ c=4$

$\Delta = b^2-4ac = 2^2-4\cdot9\cdot4 = 4-144 = -140 < 0$

$\Rightarrow$ aucune solution

Question 6 / **4 pts**

Résoudre le système d'équations suivant.

$$\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 3x + 3y = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 3x + 3y = 13 \end{cases} \left| \begin{matrix} \cdot 3 \\ \cdot 1 \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} \cdot 1 \\ \cdot (-1) \end{matrix} \right.$$

$$\begin{array}{r} 9x - 3y = 9 \\ 3x + 3y = 13 \quad + \\ \hline 12x \quad = 22 \quad | :12 \\ x = \frac{22}{12} = \frac{11}{6} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3x - y = 3 \\ -3x - 3y = -13 \quad + \\ \hline -4y = -10 \quad | :(-4) \\ y = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \end{array}$$

$\Rightarrow$ la solution est $\underline{\underline{x = \frac{11}{6}}}$ et $\underline{\underline{y = \frac{5}{2}}}$

Partie analyse-réflexion

En règle générale, tous les résultats seront arrondis à deux décimales.

Problème 1

/5,5 pts

Claire et Julie achètent des bonbons au kiosque. Claire achète 6 bonbons en forme de fraise et 4 anneaux aux pommes pour le prix de 6,20 francs. Julie prend 3 bonbons en forme de fraise et 5 anneaux aux pommes et paie 4,60 francs. Calculer le prix d'un bonbon en forme de fraise et celui d'un anneau aux pommes.

Notons x le prix d'un bonbon en forme de fraise et y celui d'un bonbon en forme d'anneau aux pommes.

Claire : $6x + 4y = 6,2$

Julie : $3x + 5y = 4,6$

$$\begin{cases} 6x+4y = 6,2 & \cdot 5 \\ 3x+5y = 4,6 & \cdot(-4) \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{rl} 30x + 20y &= 31 \\ -12x - 20y &= -18,4 \quad + \\ \hline 18x &= 12,6 \quad :18 \\ x &= 0,70 \end{array}$$

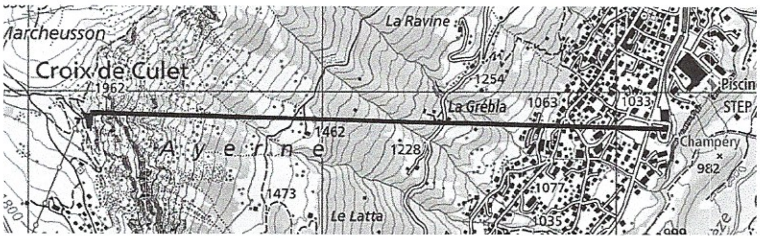
$$3 \cdot 0,7 + 5y = 4,6 \quad \text{calcul}$$
$$2,1 + 5y = 4,6 \quad -2,1$$
$$5y = 2,5 \quad :5$$
$$y = 0,5$$

Ainsi le prix d'un bonbon en forme de fraise est 0,70 francs et celui d'un bonbon en forme d'anneau aux pommes est 0,50 francs

Problème 2

/ **6,5 pts**

La carte ci-dessous est à l'échelle 1 : 25 000. Sur cette carte, le trajet du téléphérique joignant le village de Champéry (altitude 1 033 m) à Croix de Culet (altitude 1 962 m) mesure 7,8 cm.



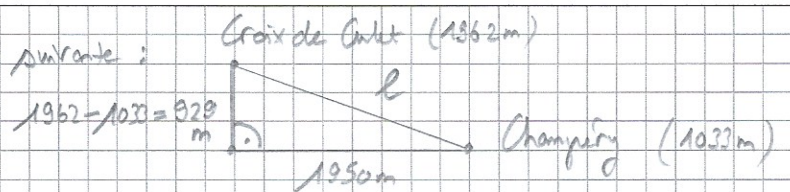
Reproduit avec l'autorisation de swisstopo (BA19086)

a) Quelle serait la longueur du trajet si Champéry et Croix de Culet étaient à la même altitude (résultat en m, arrondi à l'unité) ?

À vol d'oiseau, la distance sur la carte entre Champéry et Croix de Culet est de 7,8 cm. Dans la réalité, cette distance serait de $7,8 \cdot 25'000 =$
$= 195'000$ cm $=$ 1950 m

b) Quelle est la longueur effective du trajet (résultat en m, arrondi à l'unité) ?

On a la situation suivante :



Par le théorème de Pythagore, la longueur effective l du trajet est :
$\sqrt{929^2+1950^2} \cong 2160$ m

c) Quelle est la pente moyenne du trajet (résultat en %) ?

En utilisant les informations du dessin de b), la pente vaut :
$$\frac{\text{dénivellation}}{\text{distance horizontale}} = \frac{929}{1950} \cong 0,4764 = 47,64\%$$

Problème 3

/ **12,5 pts**

Soit f la fonction définie par $f(x) = 4x - 6$.

a) Montrer que le graphe de la fonction f passe par le point $P(\frac{1}{2}; -4)$.

Si le point $P(\frac{1}{2}; -4)$ appartient au graphe de f, on doit avoir $f(x) = -4$ si $x = \frac{1}{2}$.
Avec $x = \frac{1}{2}$ et $f(x) = 4x - 6$, on a $f(x) = 4 \cdot \frac{1}{2} - 6 = 2 - 6 = -4$
$\Rightarrow$ le graphe de f passe bien par le point $P(\frac{1}{2}; -4)$.

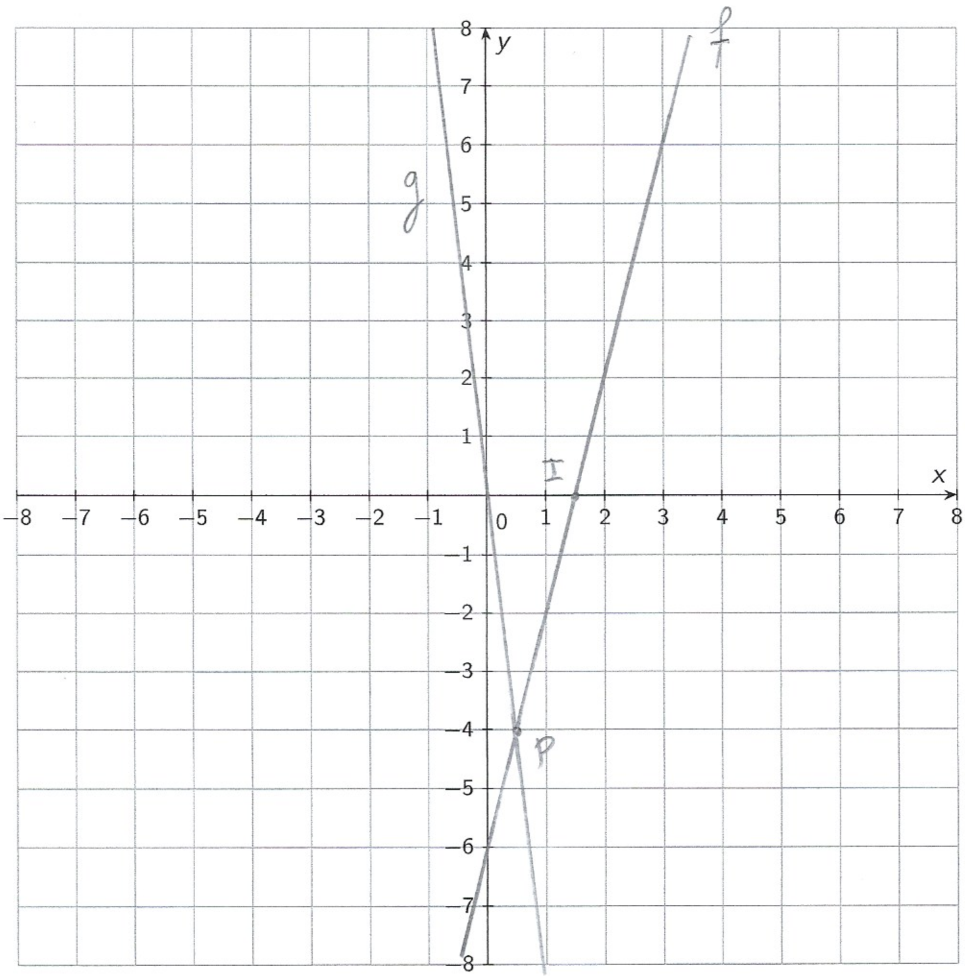
b) Calculer les coordonnées du point d'intersection du graphe de f avec l'axe Ox des abscisses.

L'intersection du graphe de f avec l'axe Ox correspond à $f(x) = 0$. On doit donc résoudre

$$\begin{aligned} 0 &= 4x - 6 \quad &| +6 \\ 6 &= 4x &| :4 \\ 1{,}5 &= x \end{aligned}$$

L'intersection du graphe de f avec l'axe Ox est donc $\underline{\underline{I(1{,}5; 0)}}$

c) Représenter ci-dessous le graphe de la fonction f.



d) Déterminer une fonction linéaire g dont le graphe passe par le point P. Représenter son graphe dans le système d'axes de la question c).

Une fonction linéaire est de la forme $g(x) = a \cdot x$ où a est un nombre à déterminer. Si le graphe de g passe par $P\left(\frac{1}{2}; -4\right)$, si $x = \frac{1}{2}$, on a $g(x) = -4$.

Avec $x = \frac{1}{2}$ et $g(x) = -4$ dans $g(x) = a \cdot x$, on obtient $-4 = a \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow a = -8$.

La fonction linéaire g est donc $\underline{\underline{g(x) = -8x}}$

e) Soit h la fonction définie par $h(x) = 2x^2 - x - 3$. Calculer les coordonnées du (ou des) point(s) d'intersection du graphe de h avec l'axe Oy des ordonnées.

L'intersection du graphe de h avec l'axe Oy correspond à $x = 0$.

On a alors $y = h(0) = 2 \cdot 0^2 - 0 - 3 = -3$.

Ainsi le point d'intersection du graphe de h avec l'axe Oy est $\underline{\underline{(0; -3)}}$.

f) Calculer les coordonnées du (ou des) point(s) d'intersection entre le graphe de h et celui de f.

On a : $h(x) = 2x^2 - x - 3$ et $f(x) = 4x - 6$.

Les points d'intersection vont correspondre à $h(x) = f(x)$

$\Rightarrow 2x^2 - x - 3 = 4x - 6 \quad | -4x + 6$

$2x^2 - 5x + 3 = 0 \quad |$ Formule de Viète

$a = 2, \; b = -5, \; c = 3$

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1 > 0, \; \sqrt{\Delta} = 1$

On a 2 solutions : $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5+1}{2 \cdot 2} = \dfrac{6}{4} = 1{,}5$

et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5-1}{2 \cdot 2} = \dfrac{4}{4} = 1$

Avec $x_1 = 1{,}5$, on a $y_1 = f(x_1) = 4 \cdot 1{,}5 - 6 = 0$ (ou $y_1 = h(x_1) = 2 \cdot 1{,}5^2 - 1{,}5 - 3 = 0$).

Avec $x_2 = 1$, on a $y_2 = f(x_2) = 4 \cdot 1 - 6 = -2$ (ou $y_2 = h(x_2) = 2 \cdot 1^2 - 1 - 4 = -2$).

Il y a donc 2 points d'intersection : $(x_1; y_1) = \underline{\underline{(1{,}5; 0)}}$

et $(x_2; y_2) = \underline{\underline{(1; -2)}}$

Problème 4

/ 6 pts

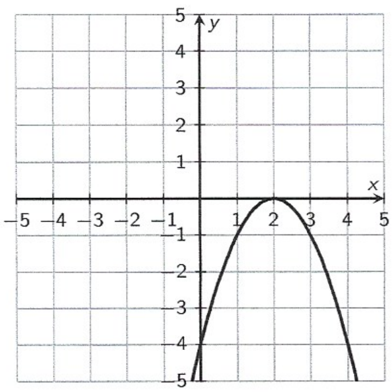
On donne les fonctions suivantes :

$f_1(x) = 3x + 1$ $f_2(x) = x^2 + 3x - 4$ $f_3(x) = 4x$ $f_4(x) = -x + 2$

$f_5(x) = \dfrac{3}{x}$ $f_6(x) = x^2 - 3x - 4$ $f_7(x) = -2x + 1$ $f_8(x) = 4$

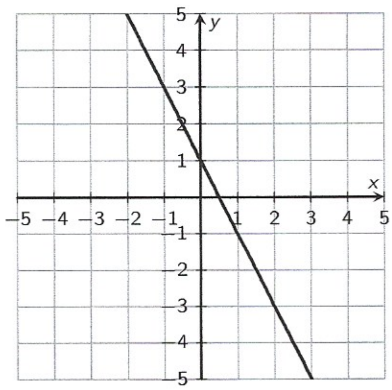
$f_9(x) = -x^2 + 4x - 4$ $f_{10}(x) = -\dfrac{2}{x}$

Six d'entre elles ont été représentées ci-dessous.
Noter sous chacun des graphes la fonction qui lui correspond (aucune justification n'est demandée).



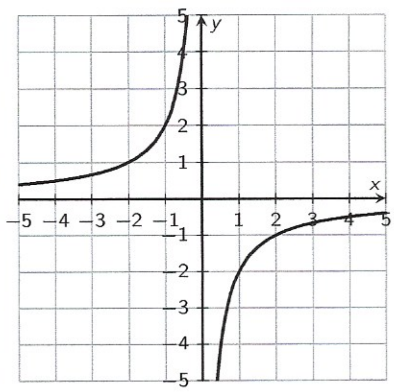
$f_9(x)$

$\left(f_9(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 - 4 = 0\right)$



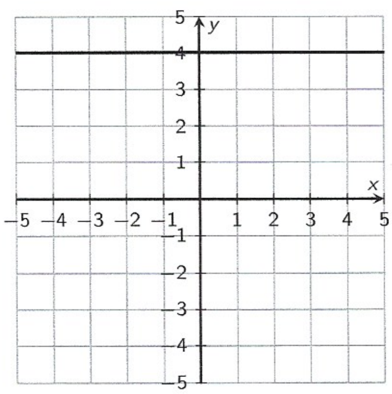
$f_7(x)$

$\left(f_7(1) = -2 \cdot 1 + 1 = -1\right)$

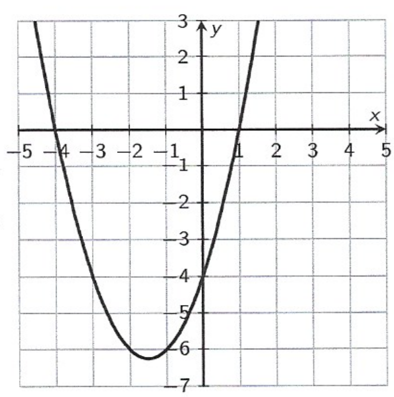


$f_{10}(x)$

$\left(f_{10}(1) = -\frac{2}{1} = -2\right)$

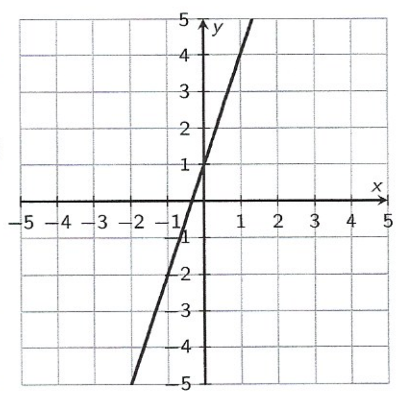


$f_8(x)$



$f_2(x)$

$\left(f_2(1) = 1^2 + 3 \cdot 1 - 4 = 0\right)$



$f_1(x)$

$\left(f_1(1) = 3 \cdot 1 + 1 = 4\right)$

Problème 5

/ 11 pts

Un étudiant habitant Morges est inscrit à l'université de Genève à partir de la rentrée 2020. Il se rendra à l'université en transports publics et se renseigne d'ores et déjà sur les différents abonnements de train possibles. Après quelques recherches sur le site des CFF, il retient les trois options suivantes.

Option A Un trajet simple Morges-Genève (ou Genève-Morges) coûte 13,20 CHF (plein tarif).

Option B L'abonnement demi-tarif coûte 185 CHF par an et il permet au détenteur de ne payer que la moitié du plein tarif de chaque trajet.

Option C L'abonnement annuel de parcours entre Morges et Genève coûte 2 385 CHF et permet d'effectuer le trajet Morges-Genève (ou Genève-Morges) un nombre illimité de fois sur l'année.

a) Si l'étudiant a des cours à l'université tous les jours du lundi au vendredi, pendant 33 semaines, quelle est l'option la plus rentable ? Justifier la réponse par des calculs.

5 allers-retours pendant 33 semaines correspond à $= 5 \cdot 33 \cdot 2 = 330$ trajets simples

Option A : coût total $= 330 \cdot 13,2 = 4356$ CHF

Option B : coût total $= 185 + 330 \cdot \frac{13,2}{2} = 2363$ CHF

Option C : coût total $= 2385$ CHF $\Rightarrow$ c'est l'option B la plus avantageuse

b) Représenter dans le système d'axes de la page 13 la fonction qui donne le coût (en CHF) en fonction du nombre de trajets simples pour l'option A.

c) La fonction donnant le coût (en CHF) en fonction du nombre de trajets simples qui correspond à l'option B a été représentée en page 13. Que représente l'ordonnée à l'origine de cette droite dans ce contexte ?

L'ordonnée à l'origine de la fonction de l'option B est ce qu'on paie si on fait 0 trajet ; c'est donc le prix du demi-tarif, soit 185.

d) Représenter la fonction qui donne le coût (en CHF) en fonction du nombre de trajets simples pour l'option C dans le système d'axes de la page 13.

e) A partir de combien de trajets simples l'option B devient-elle plus rentable que l'option A ? Justifier la réponse par des calculs.

Si on note x le nb de trajet simple, on a :

Option A : coût total $= 13,2 \cdot x$

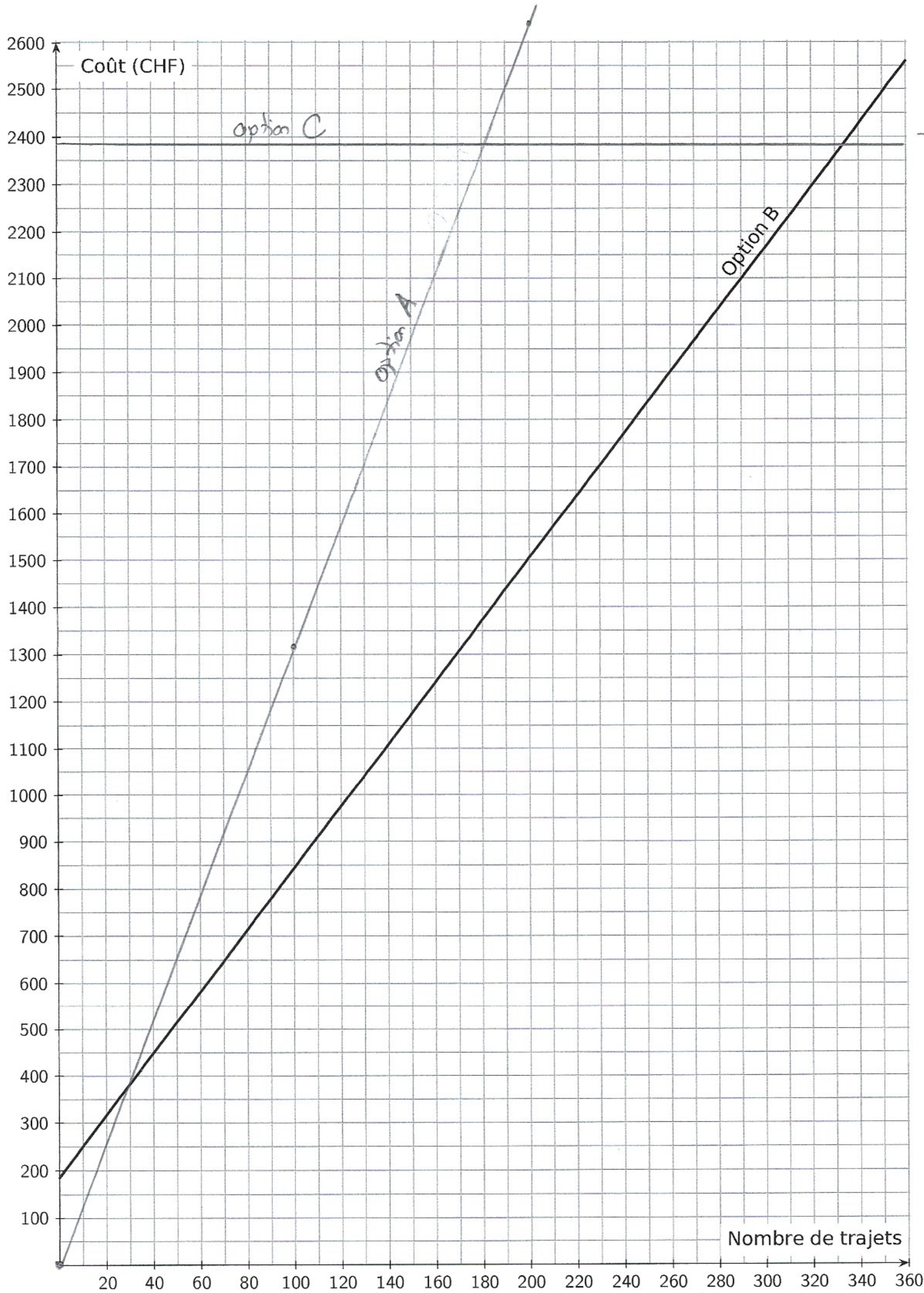
Option B : coût total $= 185 + \frac{13,2}{2} \cdot x = 185 + 6,6x$.

Les coûts totaux des 2 options sont égales si $13,2x = 185 + 6,6x$ | $-6,6x$

$6,6x = 185$ | $:6,6$

$x = 28,03$

L'option B sera donc plus avantageuse que l'option A à partir de 29 trajets



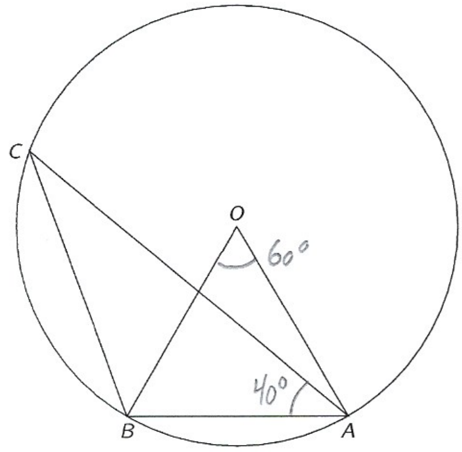
option A

0	0
100	1320
200	2640

Problème 6

/ **3 pts**

Sur la figure ci-dessous, O est le centre du cercle et le triangle OAB est équilatéral.
On donne de plus $\widehat{CAB} = 40°$.



Déterminer les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$ (les réponses doivent être justifiées par des calculs).

Le triangle OAB est équilatéral $\Rightarrow$ ses 3 angles valent $60°$, en particulier $\widehat{AOB} = 60°$.
Par le théorème de l'angle inscrit et de l'angle au centre, on a $\widehat{ACB} = \frac{\widehat{AOB}}{2}$.
Ainsi $\widehat{ACB} = \frac{60°}{2} = 30°$
Par conséquent, on a $\widehat{BCA} = \widehat{ACB} = \underline{\underline{30°}}$ et $\widehat{ABC} = 180° - \widehat{BCA} - \widehat{CAB} =$
$= 180° - 30° - 40° = \underline{\underline{110°}}$

Problème 7

/ **13,5 pt**

Le « pentagone » est le bâtiment qui abrite le département de la défense des États-Unis d'Amérique.
Le bâtiment a la forme d'un prisme droit dont la base est un pentagone régulier et est muni d'une cour intérieure, également en forme de pentagone régulier (voir figure 1 ci-dessous).
On donne le périmètre extérieur $P_{ABCDE} = 1\,405$ m, la largeur $\ell = 119$ m de chacune des cinq ailes du bâtiment (voir figure 2 ci-dessous) ainsi que sa hauteur $h = 24$ m.

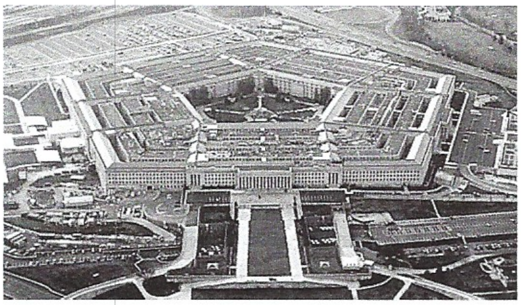


fig. 1 – Vue aérienne du pentagone

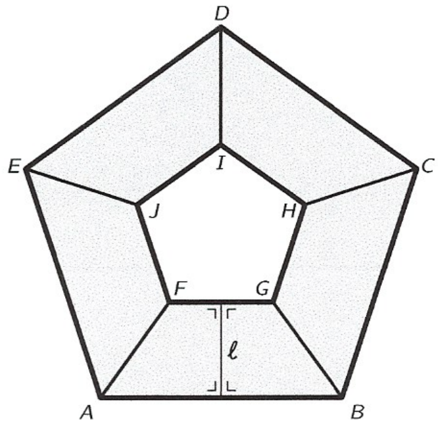


fig. 2 – Schéma de la vue de dessus

a) Poser et justifier les calculs qui permettent d'affirmer que $\widehat{BAE} = 108°$.

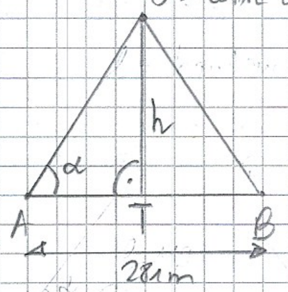
La somme des angles d'un polygone régulier à n côtés vaut $(n-2)\cdot 180°$.
Ici, on a $n=5$ et la somme des angles vaut donc $(5-2)\cdot 180° = 540°$.
Comme $\widehat{BAE}$ est un des 5 angles isométriques du pentagone, on a
$\widehat{BAE} = 540° : 5 = \underline{\underline{108°}}$.

I

b) Calculer l'aire du pentagone $ABCDE$ (résultat en m^2, arrondi à l'unité).

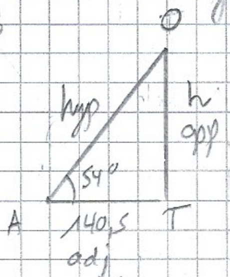
Le pentagone ABCDE est formé de 5 triangles isocèles :

O = centre du pentagone



on a $AT = \frac{AB}{2} = \frac{281}{2} = 140{,}5$ et, par a), α est la moitié de l'angle $\widehat{BAE}$: $\alpha = \frac{108°}{2} = 54°$

dans le triangle rectangle AOT, on a :



On a adj et on cherche opp = h

$\Rightarrow$ il faut utiliser tan opp/adj

$\Rightarrow \tan(54°) = \frac{h}{140{,}5}$

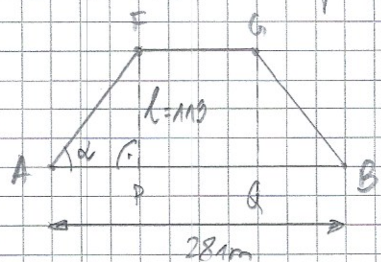
$\Rightarrow h = 140{,}5 \cdot \tan(54°) = 193{,}38$ m

Ainsi l'aire du pentagone ABCDE vaut donc $5 \cdot \frac{AB \cdot OT}{2} = 5 \cdot \frac{281 \cdot 193{,}38}{2}$

$\cong \underline{\underline{135'851 \text{ m}^2}}$

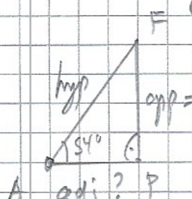
c) Calculer le périmètre et l'aire de la cour intérieure $FGHIJ$ (résultats respectivement en m et m^2, arrondis à l'unité).

Pour calculer le périmètre de la cour intérieure, il nous faut la longueur d'un de ses 5 côtés isométriques, par exemple FG. On a :



par a), α est la moitié de l'angle $\widehat{BAE} \Rightarrow \alpha = \frac{108°}{2} = 54°$

dans le triangle rectangle AFP, on a :



on cherche adj et on a opp

$\Rightarrow$ il faut utiliser tan opp/adj

$\Rightarrow \tan(54°) = \frac{119}{AP} \Rightarrow \tan(54°) \cdot AP = 119$

$\Rightarrow AP = \frac{119}{\tan(54)} \cong 86{,}46$ m

Ainsi $FG = PQ = AB - AP - BP = AB - 2AP = 281 - 2 \cdot 86{,}46 = 108{,}08$ m.

le périmètre de FGHIJ est donc $5 \cdot 108{,}08 \cong \underline{540 \text{ m}}$

Comme $\frac{FG}{AB} = \frac{108{,}08}{281} = 0{,}3846$, l'aire de la cour intérieure sera $0{,}3846^2 =$

$= 0{,}148$ fois celle du pentagone ABCDE. D'après b), l'aire du pentagone ABCDE vaut $135'851$ m^2. Ainsi l'aire de la cour intérieure est $0{,}148 \cdot 13'851 = \underline{\underline{20'116 \text{ m}^2}}$

d) Calculer le volume de la partie bâtie (résultat en m^3, arrondi à l'unité).

Le volume de la partie bâtie vaut :

(aire du pentagone ABCDE − aire de la cour intérieure FGHIJ) · hauteur

$\cong \left(\underbrace{135'851}_{a)} - \underbrace{20'116}_{b)} \right) \cdot 24$

$\cong$ **2'777'614 m^3**

Problème 8

/ **12 pts**

On a représenté ci-dessous une pièce d'un lit superposable à assembler.
La pièce est en acier (masse volumique 8 g / cm^3) et doit, pour des raisons esthétiques, être peinte en peinture dorée sur toute sa surface.

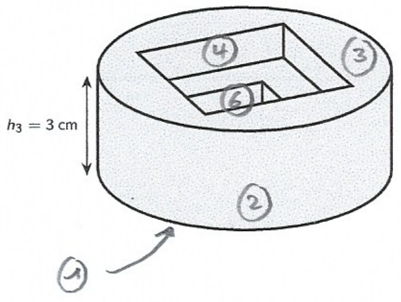


fig. 1 – Vue en perspective

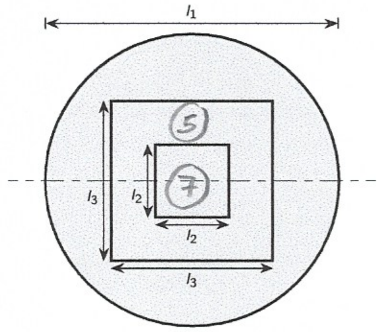


fig. 2 – Vue de dessus

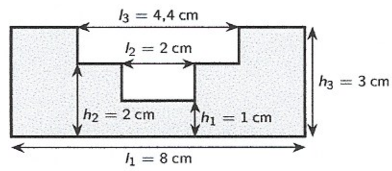


fig. 3 – Vue de profil selon le plan de coupe vertical en traitillé sur la figure 2

a) Calculer le volume de la pièce (résultat en cm^3).

Le volume de la pièce vaut V = volume cylindre − volume des 2 pavés droits intérieurs.
On a volume cylindre $= \pi r^2 \cdot h$, où $r = \frac{l_1}{2} = \frac{8}{2} = 4$ cm et $h_3 = 3$ cm.
Ainsi volume cylindre $= \pi \cdot 4^2 \cdot 3 \cong 150{,}80$ cm^3.
Le volume du pavé droit supérieur est longueur · largeur · hauteur, où longueur = largeur = $l_3 = 4{,}4$ cm et hauteur $= h_3 - h_2 = 3 - 2 = 1$ cm.
Ainsi volume pavé droit supérieur $= 4{,}4 \cdot 4{,}4 \cdot 1 = 19{,}36$ cm^3.
Le volume du pavé droit inférieur est longueur · largeur · hauteur, où longueur = largeur = $l_2 = 2$ cm et hauteur $= h_2 - h_1 = 2 - 1 = 1$ cm.
Ainsi volume pavé droit inférieur $= 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ cm^3.
Le volume de la pièce est donc $V \cong 150{,}80 - 19{,}36 - 4 \cong \underline{\underline{127{,}44 \text{ cm}^3}}$

b) Calculer la masse de la pièce (résultat en g).

La masse volumique étant $8 g/cm^3$, la masse de $1 cm^3$ est $8 g$.
Comme, par a), le volume vaut $127{,}44 cm^3$, la masse de la pièce est
$127{,}44 \cdot 8 = \underline{\underline{1019{,}49 g}}$

c) Calculer l'aire de la surface à peindre (résultat en cm^2).

En décomposant l'aire à calculer comme sur le dessin page précédente, on a :

1 $= \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{\ell_1}{2}\right)^2 = \pi \cdot \left(\frac{8}{2}\right)^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi \cong 50{,}27 cm^2$

2 $=$ aire latérale $= 2\pi r h = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\ell_1}{2} \cdot h_3 = 2 \cdot \pi \cdot \frac{8}{2} \cdot 3 = 24\pi \cong 75{,}40 cm^2$

3 $=$ aire du cercle 1 $-$ aire carré de côté $\ell_3 = 16\pi - 4{,}4^2 = 16\pi - 19{,}36 \cong 30{,}91 cm^2$

4 $=$ aire latérale du pavé droit supérieur $= 4 \cdot \ell_3 \cdot (h_3 - h_2) = 4 \cdot 4{,}4 \cdot (3-2) = 17{,}6 cm^2$

5 $=$ aire grand carré $-$ aire petit carré $= \ell_3^2 - \ell_2^2 = 4{,}4^2 - 2^2 = 15{,}36 cm^2$

6 $=$ aire latérale du pavé droit inférieur $= 4 \cdot \ell_2 \cdot (h_2 - h_1) = 4 \cdot 2 \cdot (2-1) = 8 cm^2$

7 $=$ aire petit carré $= \ell_2^2 = 2^2 = 4 cm^2$.

L'aire totale vaut alors 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 =

$= 16\pi + 24\pi + 16\pi - 19{,}36 + 17{,}6 + 15{,}36 + 8 + 4 = 56\pi + 25{,}6 = \underline{\underline{201{,}53 cm^2}}$