canton de vaud

gymnase de nyon

NOTE :

Corrigé

NOM : ______________________ **PRÉNOM :** ______________________

EXAMEN D'ADMISSION AUX GYMNASES VAUDOIS
SESSION 2020

ÉCOLE DE CULTURE GÉNÉRALE ET ÉCOLE DE COMMERCE (+MPI)

BRANCHE	:	MATHÉMATIQUES
SIGLE	:	EXAD-1C/1E-MAT-03
EXAMEN	:	ÉCRIT

Durée 3 heures

Matériel autorisé calculatrice TI-30 ECO RS, TI-30 X II S ou TI-30 X II B, règle, équerre, rapporteur, compas, formulaire joint à l'épreuve.

Consignes

- le candidat rédige les solutions directement sur les feuilles de données dans l'espace prévu à cet effet sous chaque question (il n'utilise pas la couleur rouge) ;
- lorsque cet espace n'est pas suffisant, le candidat l'indique clairement dans sa réponse et termine au verso ;
- les feuilles de brouillon ne sont pas corrigées ;
- la rédaction doit être soignée ; les calculs et les raisonnements doivent être détaillés ;
- la réponse doit être soulignée ou encadrée.

Partie technique ________ **/ 30 pts**
Partie analyse-réflexion ________ **/ 70 pts**
Pondération partie technique 30% et partie analyse-réflexion 70% de la note finale

Partie technique

Question 1

/ **10 pts**

Calculer en détaillant les calculs et donner la réponse sous la forme de fraction irréductible.

a) $5 + 6 \cdot 7$

$5 + \underbrace{6 \cdot 7}_{42} = 5 + 42 = 47$

b) $-2 \cdot 4^2$

$-2 \cdot \underbrace{4^2}_{16} = -2 \cdot 16 = -32$

c) $-12 \div 4 + 2$

$\underbrace{-12 : 4}_{-3} + 2 = -3 + 2 = -1$

d) $\frac{6}{5} - \frac{3}{4}$

$\frac{6}{5} - \frac{3}{4} = \frac{24}{20} - \frac{15}{20} = \frac{9}{20}$

e) $-3 \cdot \frac{7}{2}$

$-3 \cdot \frac{7}{2} = -\frac{3}{1} \cdot \frac{7}{2} = -\frac{21}{2}$

f) $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$

$\underbrace{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}}_{\frac{3}{8}} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

g) $\frac{12}{5} \cdot \frac{2}{3} - \frac{6}{5}$

$\underbrace{\frac{\cancel{12}^{4}}{5} \cdot \frac{2}{\cancel{3}_{1}}}_{\frac{8}{5}} - \frac{6}{5} = \frac{8}{5} - \frac{6}{5} = \frac{2}{5}$

Question 2 / **3 pts**

Calculer la valeur de l'expression

$$-a^2 - 6c(b - 3a)$$

lorsque $a = -1$, $b = 3$ et $c = 2$.

$-a^2 - 6c(b-3a) = -\underbrace{(-1)^2}_{1} - \underbrace{6 \cdot 2}_{12} \cdot (3 \underbrace{- 3 \cdot (-1)}_{+3}) = -1 - 12 \cdot \underbrace{(3+3)}_{6} =$

$= -1 - 12 \cdot 6 = -1 - 72 = -73$

Question 3

/ **7 pts**

Effectuer et réduire au maximum.

a) $(2x+1)(x-3)$

$(2x+1)(x-3) = 2x^2 - 6x + x - 3 = 2x^2 - 5x - 3$

b) $-2(3+x^2)+x(4+2x)$

$-2(3+x^2)+x(4+2x) = -6 \cancel{-2x^2} + 4x \cancel{+2x^2} = 4x-6$

c) $(5+x)^2-(x-3)$

$(5+x)^2 - (x-3) = x^2+10x+25 - x + 3 = x^2 + 9x + 28$

$(5+x)(5+x)$

$= 25 + 5x + 5x + x^2$

$= x^2 + 10x + 25$

Question 4 / **10 pts**

Résoudre les équations suivantes et donner la réponse sous forme de fraction irréductible.

a) $2 \cdot 3 + x - 2 + 3x = 7 - 12 + x$

$2 \cdot 3 + x - 2 + 3x = 7 - 12 + x$	Calculs
$6 + x - 2 + 3x = 7 - 12 + x$	Réduire
$4x + 4 = x - 5$	$-x$
$3x + 4 = -5$	-4
$3x = -9$	$:3$

$\underline{\underline{x = -3}}$

b) $x^2 - 4 = (x-1)(x-2)$

$x^2 - 4 = (x-1)(x-2)$	Distributivité
$x^2 - 4 = x^2 - 2x - x + 2$	Réduire
$x^2 - 4 = x^2 - 3x + 2$	$-x^2$
$-4 = -3x + 2$	-2
$-6 = -3x$	$:(-3)$

$\underline{\underline{x = 2}}$

c) $\frac{1}{2}(4 + 2x) - 2 \cdot (-3) = x + 10 \div 2$

$\frac{1}{2}(4 + 2x) - 2 \cdot (-3) = x + 10 : 2$	Calculs
$\frac{1}{2}(4 + 2x) + 6 = x + 5$	Distributivité
$2 + x + 6 = x + 5$	Réduire
$x + 8 = x + 5$	$-x$

$8 = 5$ impossible $\Longrightarrow$ aucune solution

d) $12 = 6x - 3(x + 3)$

$12 = 6x - 3(x + 3)$	Distributivité
$12 = 6x - 3x - 9$	Réduire
$12 = 3x - 9$	$+9$
$21 = 3x$	$:3$

$\underline{\underline{x = 7}}$

Partie analyse-réflexion

En règle générale, tous les résultats seront arrondis à deux décimales.

Problème 1

/ 14 pts

Un pirate possède un trésor composé de 680 pièces d'or, 510 rubis et 357 diamants.

a) Chaque pièce d'or a un rayon de 1,8 cm, une épaisseur de 0,4 cm et pèse 87,13 g. Calculer la masse volumique de l'or en kg/m^3.

Une pièce d'or est un cylindre de 1,8 cm = 0,018 m de rayon et de 0,4 cm = 0,004 m de hauteur. Son volume est donc $\pi \cdot 0{,}018^2 \cdot 0{,}004 =$
$= 0{,}000004072\ m^3$.
Sa masse est de 87,13 g = 0,08713 kg.
Sa masse volumique est donc $\frac{\text{masse}}{\text{volume}} = \frac{0{,}08713}{0{,}000004072} = 21'399{,}95\ kg/m^3$

b) L'unité de masse utilisée pour les pierres précieuses est le *carat*. Sachant que chaque rubis pèse environ 3 420 carats et que 5 carats correspondent à 1 g, déterminer la masse d'un rubis (résultat en g).

Si un rubis pèse 3420 carats et que 5 carats correspondent à 1 gramme, le rubis pèse $\frac{3420}{5} = 684\ g$

c) Un diamant pèse 35 g. Calculer la masse totale du trésor du pirate (résultat en g).

Masse de 1 pièce d'or = 87,13 g (question a))
Masse de 1 rubis = 684 g (question b))
Masse de 1 diamant = 35 g
$\Rightarrow$ masse total du trésor = $680 \cdot 87{,}13 + 510 \cdot 684 + 357 \cdot 35$
$= 420'583{,}4\ g$

d) Le pirate décide de partager équitablement son trésor entre son équipage et lui-même. Calculer le nombre de membres de l'équipage sachant que tout le monde recevra le même nombre de pièces d'or, de diamants et de rubis.

Le nombre de membres de l'équipage sera un diviseur commun du nombre de pièces d'or (680), du nombre de rubis (510) et du nombre de diamants (357).

On a

680	2	510	2	357	3
340	2	255	5	119	7
170	2	51	3	17	17
85	5	17	17	1	
17	17	1			
1					

Le pgdc de 680, 510 et 357 est 17. Comme 17 est premier, c'est le seul diviseur commun de 680, 510 et 357 (sauf 1). Il y a donc 17 personnes au total, et, donc, sans le capitaine, l'équipage compte 16 membres.

Problème 2

/ **11 pts**

En visite dans un casino de Las Vegas, un homme gagne au poker un certain nombre de jetons verts.

Il en dépense tout de suite la moitié, puis il rejoue une partie et regagne un quart du nombre initial de jetons. Ensuite, il reperd l'équivalent d'un huitième du nombre initial de jetons et cesse de jouer. Il lui reste alors 600 jetons.

a) Calculer combien de jetons il a gagné au début du jeu.

Notons x le nombre de jetons au départ.

Il en dépense la moitié $\rightarrow \frac{x}{2} \rightarrow$ il lui reste $\frac{x}{2}$ jetons

Il regagne un quart du nb initial de jetons $\rightarrow \frac{x}{4} \rightarrow$ il en a alors $\frac{x}{2}+\frac{x}{4} =$

$= \frac{2x}{4}+\frac{x}{4} = \frac{3x}{4}$

Il reperd un huitième du nb initial de jetons $\rightarrow \frac{x}{8} \rightarrow$ il lui en reste $\frac{3x}{4}-\frac{x}{8}$

$= \frac{6x}{8}-\frac{x}{8} = \frac{5x}{8}$.

Il lui en reste alors $600 \Rightarrow \frac{5x}{8} = 600 \xrightarrow{\cdot 8} 5x = 4800 \xrightarrow{:5} x = 960$.

Il a donc gagné au début du jeu 960 jetons

b) Sachant qu'un jeton vert vaut 25 $, de quelle somme (en $) dispose-t-il à la fin du jeu ?

Il dispose de $600 \cdot 25 = \underline{\underline{15'000 \$}}$

c) A la caisse du casino, il échange ses 600 jetons verts contre des jetons noirs d'une valeur de 100 $ et des jetons rouges d'une valeur de 500 $. Il se retrouve ainsi avec 46 jetons au total. Calculer le nombre de jetons noirs et le nombre de jetons rouges.

Notons x le nb de jetons noirs et y le nb de jetons rouges.

Il a 46 jetons au total $\Rightarrow x + y = 46$

La somme total est 15'000 $ (question b)) $\Rightarrow 100x + 500y = 15'000$

Il faut résoudre le système $\begin{cases} x + y = 46 \rightarrow y = 46 - x \\ 100x + 500y = 15'000 \end{cases}$ substitution

$\Rightarrow 100x + 500(46 - x) = 15'000$ distributivité

$100x + 23'000 - 500x = 15'000$ réduire

$-400x + 23'000 = 15'000$ $-23'000$

$-400x = -8000$ $:(-400)$

$x = 20$

$\Rightarrow y = 46 - x = 46 - 20 = 26$

Il a donc 20 jetons noirs et 26 jetons rouges

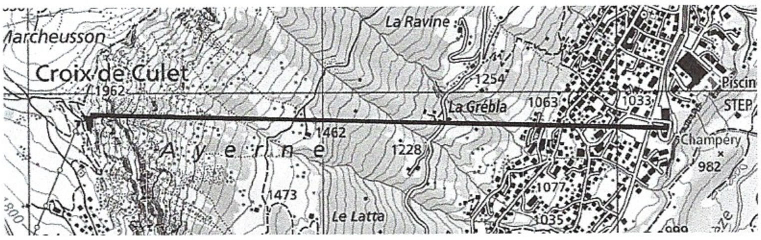
d) Il termine sa soirée en jouant à la roulette et finalement il rentre à l'hôtel avec 2 500 $ en poche. De retour en Suisse, il change ses gains en CHF. Sachant que le taux de change est de 1 CHF = 1,17 $, calculer le montant de ses gains en CHF.

Si 1,17 $ donne 1 CHF, alors 2500 $ donne $\frac{2500}{1,17} = \underline{\underline{2136,75 \text{ CHF}}}$

Problème 3

/ **6,5 pts**

La carte ci-dessous est à l'échelle 1 : 25 000. Sur cette carte, le trajet du téléphérique joignant le village de Champéry (altitude 1 033 m) à Croix de Culet (altitude 1 962 m) mesure 7,8 cm.



Reproduit avec l'autorisation de swisstopo (BA19086)

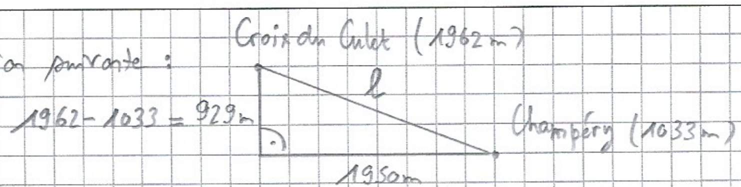
a) Quelle serait la longueur du trajet si Champéry et Croix de Culet étaient à la même altitude (résultat en m, arrondi à l'unité) ?

A vol d'oiseau, la distance sur la carte entre Champéry et Croix de Culet est de 7,8 cm. Dans la réalité, cette distance serait de $7{,}8 \cdot 25\,000 =$

$= 195\,000$ cm $=$ 1950 m

b) Quelle est la longueur effective du trajet (résultat en m, arrondi à l'unité) ?

On a la situation suivante :



Par le théorème de Pythagore, la longueur effective l du trajet est :

$\sqrt{929^2 + 1950^2} \cong 2160$ m

c) Quelle est la pente moyenne du trajet (résultat en %) ?

En utilisant les informations du dessin de b), la pente vaut :

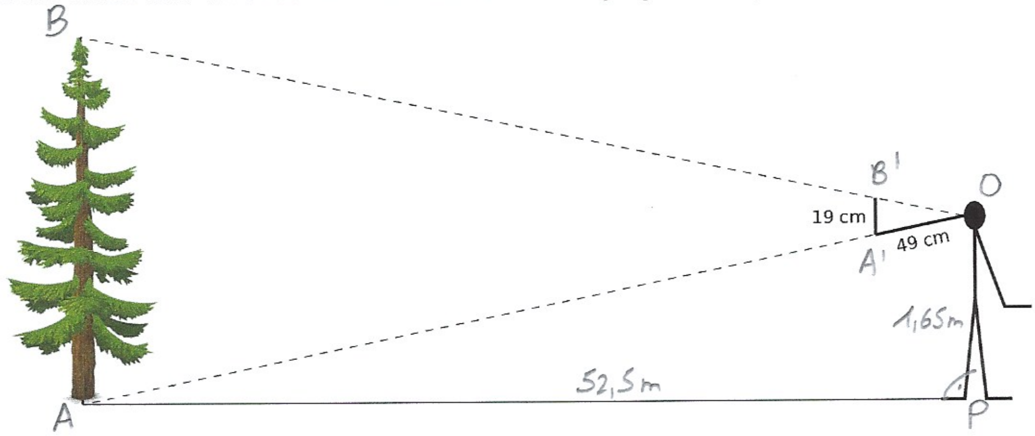
$\frac{\text{dénivellation}}{\text{distance horizontale}} = \frac{929}{1950} = 0{,}4764 = 47{,}64\ \%$

Problème 4

/ **6,5 pts**

Pour mesurer un arbre, une garde forestière se met en position de visée, l'épaule à hauteur des yeux, et tend son bras dans la direction du pied de l'arbre, tout en maintenant sa main bien verticale (voir schéma ci-dessous). Puis elle avance ou recule jusqu'à ce que son oeil, le haut de sa main et l'arbre soient parfaitement alignés. Depuis cette position, elle doit alors faire 70 pas pour rejoindre le pied de l'arbre. Elle sait d'expérience que cela signifie que la hauteur de l'arbre est d'environ 20 mètres.

Le but de ce problème est de justifier cette estimation.
On donne les mensurations suivantes pour la garde forestière. La longueur de sa main (du poignet jusqu'au majeur) est de 19 cm, la longueur de son pas est de 75 cm, la distance qui sépare ses yeux du sol est de 165 cm et son bras mesure 49 cm du poignet à l'épaule.



a) Calculer la distance entre l'oeil de la garde forestière et le pied de l'arbre (résultat en m).

La distance AP est de 70 pas, avec 1 pas = 75 cm = 0,75 m. Ainsi, on a
$AP = 70 \cdot 0,75 = 52,5$ m.
De plus, on a $OP = 165$ cm $= 1,65$ m.
Par le théorème de Pythagore, la distance entre l'oeil et le pied de l'arbre
est $OA = \sqrt{1,65^2 + 52,5^2} \cong \underline{\underline{52,53 \text{ m}}}$.

b) Calculer la hauteur de l'arbre (résultat en m).

Les triangles OAB et OA'B', ayant les mêmes angles, sont semblables.
Par le théorème de Thalès, on a donc $\frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{OA'}$
On a $A'B' = 19$ cm $= 0,19$ m, $OA = 52,53$ m (voir a)) et $OA' = 49$ cm $=$
$= 0,49$ m.
On obtient donc : $\frac{AB}{0,19} = \frac{52,53}{0,49} \Longrightarrow AB = \frac{52,53}{0,49} \cdot 0,19 = \underline{\underline{20,37 \text{ m}}}$

c) Quelle est l'erreur commise par la garde forestière dans son estimation (résultat en m) ?
Quel pourcentage cela représente-t-il ?

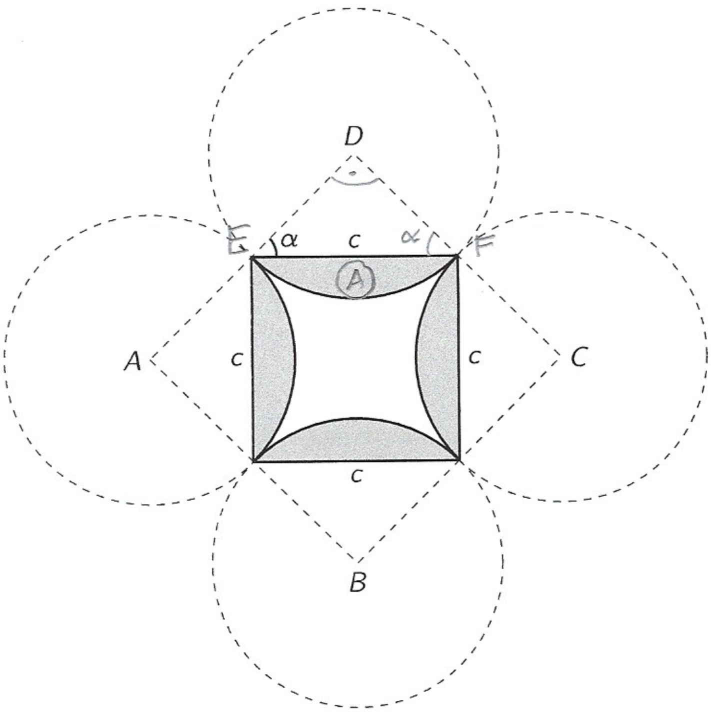
L'erreur en mètres vaut $20,37 - 20 = \underline{\underline{0,37\ m}}$

L'erreur en % est $\frac{\text{erreur en mètres}}{\text{hauteur en mètres}} \cdot 100 = \frac{0,37}{20,37} \cdot 100 = \underline{\underline{1,8\ \%}}$

Problème 5

/7,5 pts

Dans la figure ci-dessous, les sommets du carré $ABCD$ sont également les centres des quatre cercles. Ces cercles sont tangents entre eux deux à deux et ont le même rayon.
On donne le côté du carré intérieur $c = 10$ cm.



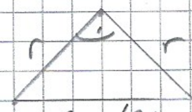
a) Donner la valeur de l'angle α sur la figure ci-dessus.

Le triangle DEF est isocèle rectangle. Il a donc 2 angles égaux (α).

On a alors $\alpha = \frac{180° - 90°}{2} = \underline{\underline{45°}}$.

b) Calculer le rayon des cercles (résultat en cm).

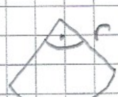
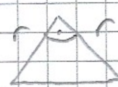
Le rayon de chaque cercle correspond aux longueurs DE et DF.
On a la situation suivante :



Par le théorème de Pythagore, on a $r^2 + r^2 = 10^2 \Longrightarrow 2r^2 = 100$
$\Longrightarrow r^2 = 50 \Longrightarrow r = \sqrt{50} \cong \underline{\underline{7{,}07 \text{ m}}}$

c) Calculer l'aire de la partie grisée (résultat en cm^2).

L'aire grisée vaut 4 fois l'aire A.

On a aire A = aire de  − aire de 

$$= \frac{\pi \cdot r^2}{4} - \frac{r \cdot r}{2} = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}.$$

Avec $r = \sqrt{50}$, on obtient aire A $= \frac{\pi \cdot 50}{4} - \frac{50}{2} = 12{,}5\pi - 25$
$\cong 14{,}27 \text{ m}^2.$

L'aire grisée vaut donc $4 \cdot 14{,}27 \cong \underline{\underline{57{,}08 \text{ m}^2}}$

Problème 6

/ 6 pts

On considère un cylindre de hauteur $h = 12$ cm et rayon de base $r = 3$ cm.

a) Calculer l'aire latérale (résultat en cm^2).

L'aire latérale est donnée par $A_{lat} = 2\pi r h$.
Avec $r = 3$ cm et $h = 12$ cm, on a $A_{lat} = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 12 \cong \underline{\underline{226,19\ cm^2}}$

b) Calculer le volume (résultat en cm^3).

Le volume est donné par $V = \pi r^2 h$.
Avec $r = 3$ cm et $h = 12$ cm, on a $V = \pi \cdot 3^2 \cdot 12 \cong \underline{\underline{339,29\ cm^3}}$

c) On souhaite construire un parallélépipède rectangle de même volume que le cylindre. Si la base de ce parallélépipède rectangle est un rectangle de côtés $a = 6$ cm et $b = 5$ cm, calculer la hauteur (résultat en cm).

Notons h la hauteur du parallélépipède rectangle.
Son volume est alors $V = a \cdot b \cdot h = 6 \cdot 5 \cdot h = 30h$.
Mais on veut qu'il soit égal au volume du cylindre calculé en b) :
$V \cong 339,29\ cm^3$
On doit donc avoir $30h \cong 339,29 \Longrightarrow h \cong \frac{339,29}{30} \cong \underline{\underline{11,31\ cm}}$.

Problème 7

/ **11 pts**

Soit f la fonction définie par $f(x) = 4x + 3$.

a) Montrer que le graphe de la fonction f passe par le point $P(-2; -5)$.

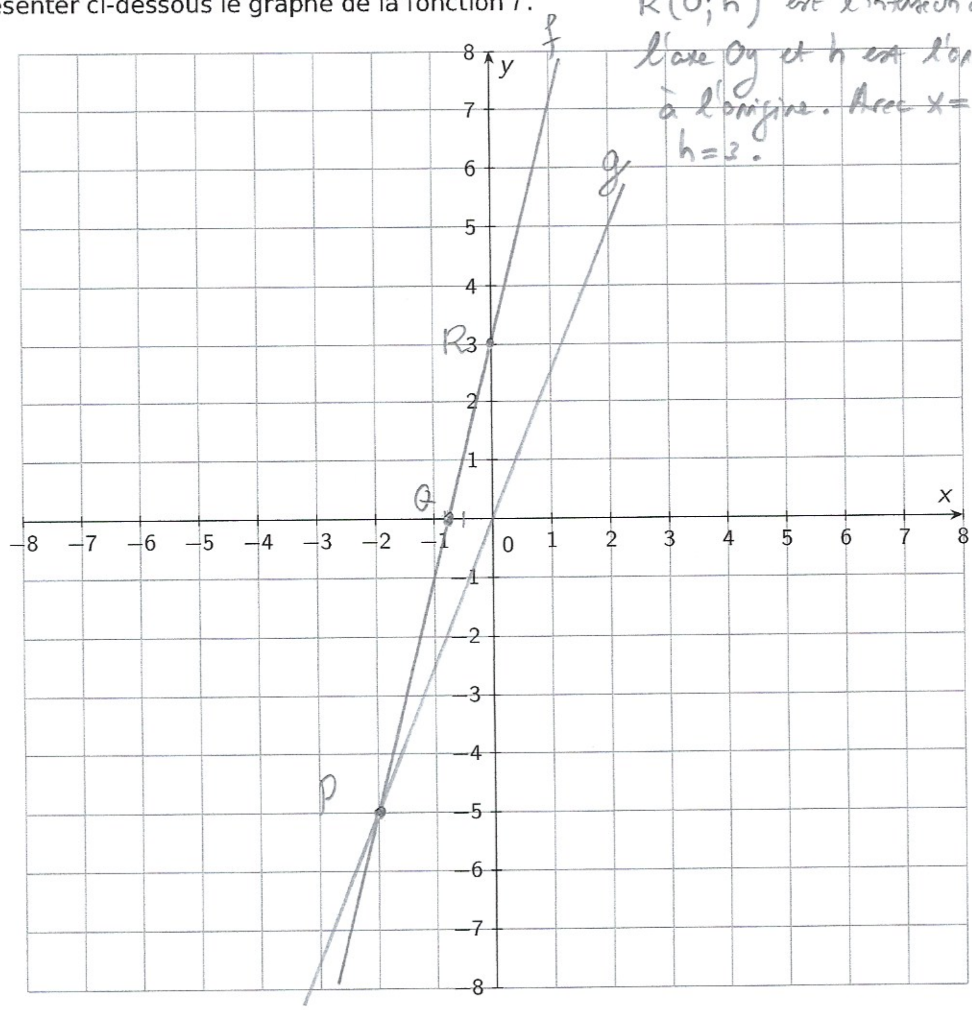
Le point $P(-2;-5)$ correspond à $x=-2$ et $f(x)=-5$.
Avec $x=-2$, on a $f(-2) = 4\cdot(-2)+3 = -8+3 = -5$.
Ainsi le point $P(-2;-5)$ appartient bien au graphe de f.

b) Calculer les coordonnées du point d'intersection du graphe de f avec l'axe Ox des abscisses.

Les coordonnées du point d'intersection de f avec l'axe Ox sera le point $Q(x;0)$. Ainsi, on doit avoir $f(x)=0$ puisque Q est un point du graphe de f : $f(x)=0 \implies 4x+3=0 \implies 4x=-3 \implies x=-\frac{3}{4}=-0{,}75$.
L'intersection avec l'axe Ox est donc $Q=\underline{\underline{(-0{,}75;0)}}$

c) Représenter ci-dessous le graphe de la fonction f.

$R(0;h)$ est l'intersection avec l'axe Oy et h est l'ordonnée à l'origine. Avec $x=0$, on a $h=3$.



d) Déterminer l'expression fonctionnelle d'une fonction linéaire $g(x)$ passant par le point P et représenter son graphe dans le système d'axe de la question c).

Une fonction linéaire est de la forme $g(x) = ax$.
Son graphe passe par $P(-2;-5)$. Ainsi si $x = -2$, on a $g(x) = -5$.
Dans $g(x) = ax$, on obtient $-5 = a \cdot (-2) \Rightarrow a = \frac{5}{2} = 2{,}5$.
L'expression fonctionnelle de g est donc $\underline{\underline{g(x) = 2{,}5 \cdot x}}$.

e) Soit h la fonction définie par $h(x) = -x + 8$. Calculer les coordonnées du point d'intersection du graphe de h avec l'axe Oy des ordonnées.

Les coordonnées du point d'intersection de h avec l'axe Oy sont $(0; h)$.
Avec $x = 0$, on a $h(0) = 8 \Rightarrow h = 8$.
Les coordonnées du point cherché sont donc $\underline{\underline{(0; 8)}}$

f) Calculer les coordonnées du point d'intersection entre le graphe de h et celui de f.

On a $f(x) = 4x+3$ et $h(x) = -x+8$. Les coordonnées $(x;y)$ du point d'intersection de f et h sont donc la solution du système

$$\begin{cases} y = 4x+3 \\ y = -x+8 \end{cases}$$

On doit avoir

$$\begin{array}{rl|l} 4x+3 &= -x+8 & +x \\ 5x+3 &= 8 & -3 \\ 5x &= 5 & :5 \\ x &= 1 & \end{array}$$

On a alors $y = 4x+3 = 4 \cdot 1 + 3 = 7$.

Le point d'intersection de f et h a donc pour coordonnées $\underline{\underline{(1;7)}}$

Problème 8 /7,5 pts

Un amateur de ski compare les différentes offres d'abonnement pour la saison hivernale dans une certaine station.

OFFRE 1 Pour 400 francs, l'abonnement « Magic Ski » donne l'accès illimité à toutes les remontées mécaniques pendant tout l'hiver.

OFFRE 2 Un abonnement journalier (skipass) coûte 50 francs et donne l'accès illimité à toutes les remontées mécaniques pendant une journée.

OFFRE 3 La carte « Amateurs de glisse » coûte 120 francs et permet d'obtenir un rabais de 50% sur tous les abonnements journaliers.

a) Calculer le coût total de douze jours de ski avec chacune des trois offres.

Offre 1 : Coût total = 400.–

Offre 2 : coût total = $12 \cdot 50 = 600.–$

Offre 3 : rabais de 50% sur les abonnements journaliers qui coûtent 50 frs
→ on paie 25 frs par jour
Coût total = $120 + 12 \cdot 25 = 420.–$

b) Calculer le nombre minimal de jours de ski nécessaires pour que l'abonnement "Magic Ski" devienne plus rentable que l'achat d'abonnements journaliers.

Magic Ski (offre 1) : coût de 400.– peu importe le nb de jours de ski
Abonnements journaliers (offre 2) : coût de $50 \cdot x$ si x est le nb de jours de ski

Les 2 offres sont équivalentes si $50 \cdot x = 400$, donc $x = \frac{400}{50} = 8$.
Le nombre minimal de jours de ski pour que Magic Ski soit plus rentable que l'achat d'abonnements journaliers est donc de 9.

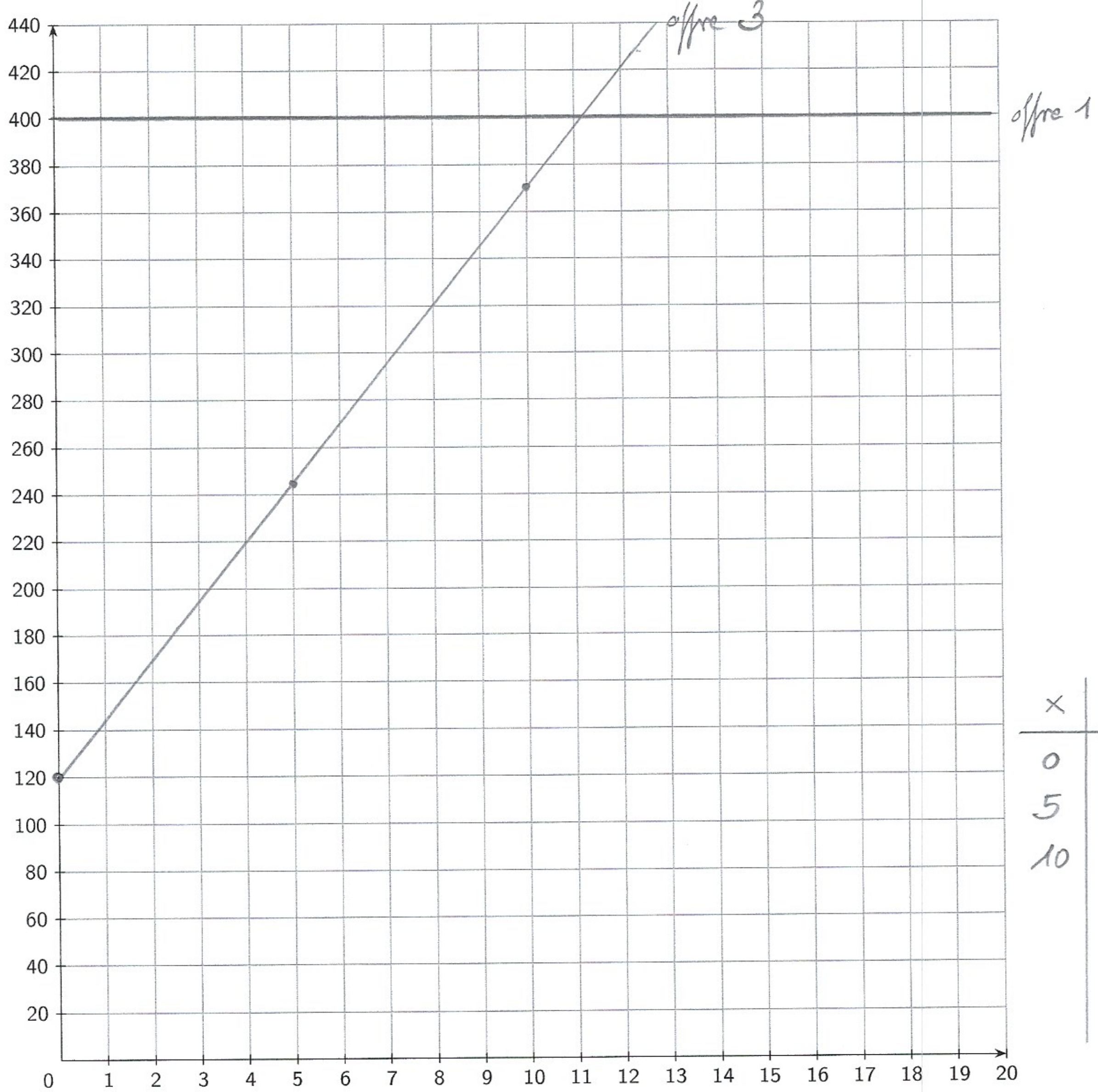
c) Représenter dans le système d'axes ci-dessous la fonction correspondant à l'offre 1 qui donne le coût en fonction du nombre de jours de ski.

d) Déterminer la fonction correspondant à l'offre 3 qui donne le coût en fonction du nombre de jours de ski et représenter ci-dessous son graphe.

On a coût total (y) = coût d'une unité · nb d'unité (x) + abonnement

Avec coût d'une unité = 25 frs dans l'offre 3 (voir a) et abonnement = = 120.–, la fonction de l'offre 3 est $\underline{\underline{y = 25x + 120}}$

Pour la représenter, on fait un tableau de valeurs.



x	25x+120
0	120
5	245
10	370