gymnase de nyon

NOTE :

Corrigé

NOM : ____________________ **PRÉNOM :** ____________________

EXAMEN D'ADMISSION AUX GYMNASES VAUDOIS

EXAMEN BLANC 2020

ÉCOLE DE MATURITÉ

BRANCHE	:	MATHÉMATIQUES
SIGLE	:	EXAD-1M-MAT-03
EXAMEN	:	ÉCRIT

Durée 3 heures

Matériel autorisé calculatrice TI-30 ECO RS, TI-30 X II S ou TI-30 X II B, règle, équerre, rapporteur, compas, formulaire joint à l'épreuve.

Consignes

- le candidat rédige les solutions directement sur les feuilles de données dans l'espace prévu à cet effet sous chaque question (il n'utilise pas la couleur rouge) ;
- lorsque cet espace n'est pas suffisant, le candidat l'indique clairement dans sa réponse et termine au verso ;
- les feuilles de brouillon ne sont pas corrigées ;
- la rédaction doit être soignée ; les calculs et les raisonnements doivent être détaillés ;
- la réponse doit être soulignée ou encadrée.

Partie technique ______ **/ 30 pts**
Partie analyse-réflexion ______ **/ 70 pts**
Pondération partie technique 30% et partie analyse-réflexion 70% de la note finale

Partie technique

Question 1

/ **4 pts**

Calculer en détaillant les calculs et donner la réponse sous la forme de fraction irréductible.

a) $\left(\frac{3}{8} - \frac{5}{12}\right) \div \left(\frac{7}{10}\right)$

$\frac{3}{8} - \frac{5}{12} = \frac{9}{24} - \frac{10}{24} = -\frac{1}{24}$

$\left(\frac{3}{8} - \frac{5}{12}\right) : \frac{7}{10} = -\frac{1}{24} : \frac{7}{10} = -\frac{1}{\cancel{24}_{12}} \cdot \frac{\cancel{10}^{5}}{7} = -\frac{5}{84}$

b) $\frac{5}{9} - 4 \cdot \frac{5}{12} - 3$

$\frac{5}{9} - 4 \cdot \frac{5}{12} - 3 = \frac{5}{9} - \frac{\cancel{4}^{1}}{1} \cdot \frac{5}{\cancel{12}_{3}} - 3 = \frac{5}{9} - \frac{5}{3} - \frac{3}{1} = \frac{5}{9} - \frac{15}{9} - \frac{27}{9} = -\frac{37}{9}$

Question 2

/ **5 pts**

Effectuer et réduire au maximum.

a) $(2x - 1)^2 - (x - 2) \cdot (x + 2)$

$(2x-1)^2 = (2x-1)(2x-1) = 4x^2 \underbrace{-2x-2x}_{-4x} + 1 = 4x^2 - 4x + 1$

$(x-2)(x+2) = x^2 \underbrace{+2x-2x}_{0} - 4 = x^2 - 4$

$(2x-1)^2 - (x-2)(x+2) = 4x^2 - 4x + 1 - (x^2 - 4) = 4x^2 - 4x + 1 - x^2 + 4 = 3x^2 - 4x + 5$

b) $(3x - 2y) \cdot (4x + 5y) - (5x - 3y) \cdot (2x + 4y)$

$(3x-2y)(4x+5y) = 12x^2 \underbrace{+15xy - 8xy}_{7xy} - 10y^2 = 12x^2 + 7xy - 10y^2$

$(5x-3y)(2x+4y) = 10x^2 \underbrace{+20xy - 6xy}_{14xy} - 12y^2 = 10x^2 + 14xy - 12y^2$

$(3x-2y)(4x+5y) - (5x-3y)(2x+4y) = 12x^2 + 7xy - 10y^2 - (10x^2 + 14xy - 12y^2)$

$= 12x^2 + 7xy - 10y^2 - 10x^2 - 14xy + 12y^2 = 2x^2 - 7xy + 2y^2$

Question 3

/5 pts

Factoriser au maximum.

a) $x^2 - 5x - 14$

On cherche par tâtonnement 2 nombres m et n tels que $m+n=-5$ et $m \cdot n = -14$. On peut choisir $m=2$ et $n=-7$.

Ainsi $x^2-5x-14 = (x+m)(x+n) = \underline{\underline{(x+2)(x-7)}}$

b) $2x^5 - 20x^4 + 50x^3$

$2x^3$ est commun aux 3 termes de $2x^5-20x^4+50x^3$

$\Longrightarrow 2x^5-20x^4+50x^3 = 2x^3(x^2-10x+25)$

De plus $x^2-10x+25$ est de la forme $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ avec $a=x$ et $b=5$

On a ainsi $2x^5-20x^4+50x^3 = \underline{\underline{2x^3(x-5)^2}}$

c) $x^4 - 16$

Avec l'identité remarquable $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, on obtient :

$x^4-16 = (x^2+4)(x^2-4) = \underline{\underline{(x^2+4)(x+2)(x-2)}}$

Question 4

/9 pts

Résoudre les équations suivantes et donner la réponse sous la forme de fraction irréductible.

a) $1 - \frac{x}{2} = \frac{x}{4} - \frac{x-8}{3}$

$1-\frac{x}{2} = \frac{x}{4} - \frac{x-8}{3}$	dénominateur commun : 12
$\frac{12}{12} - \frac{6x}{12} = \frac{3x}{12} - \frac{4x-32}{12}$	$\cdot 12$ ⚠
$12-6x = 3x-4x+32$	Réduire
$12-6x = -x+32$	$+6x$
$12 = 5x+32$	-32
$-20 = 5x$	$:5$

$\underline{\underline{x=-4}}$

b) $5(x+2)^2 = (x+10)^2$

$(x+2)^2 = (x+2)(x+2) = x^2+2x+2x+4 = x^2+4x+4$

$(x+10)^2 = (x+10)(x+10) = x^2+10x+10x+100 = x^2+20x+100$

$5(x+2)^2 = (x+10)^2$ | Identités remarquables, Distributivité

$5(x^2+4x+4) = x^2+20x+100$

$5x^2+20x+20 = x^2+20x+100$ | $-x^2$

$4x^2+20x+20 = 20x+100$ | $-20x$

$4x^2+20 = 100$ | -20

$4x^2 = 80$ | $:4$

$x^2 = 20$ | $\pm\sqrt{\ }$

$x = \pm\sqrt{20} = \pm\sqrt{4\cdot 5} = \pm 2\sqrt{5}$

$\Rightarrow$ il y a 2 solutions : $x = 2\sqrt{5}$ et $x = -2\sqrt{5}$

c) $(2x+5)(x-2) = 2-4x$

$(2x+5)(x-2) = 2-4x$ | distributivité

$2x^2-4x+5x-10 = 2-4x$ | réduire

$2x^2+x-10 = 2-4x$ | $-2+4x$

$2x^2+5x-12 = 0$ | Formule de Viète

$a=2,\ b=5,\ c=-12$

$\Delta = b^2-4ac = 5^2-4\cdot 2\cdot(-12) = 25+96 = 121$

$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{121} = 11$

il y a 2 solutions :

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5+11}{2\cdot 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5-11}{2\cdot 2} = \frac{-16}{4} = -4$

Question 5

/3 pts

a) Isoler h dans la formule $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$.

$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$ | $\cdot 3$

$3V = \pi r^2 h$ | $:(\pi r^2)$

$\frac{3V}{\pi r^2} = h$

$\Rightarrow h = \frac{3V}{\pi r^2}$

b) Isoler b dans la formule $A = \dfrac{(b+B)h}{2}$.

$$A = \frac{(b+B)h}{2} \qquad \cdot 2$$
$$2A = (b+B)h \qquad : h$$
$$\frac{2A}{h} = b + B \qquad -B$$
$$\frac{2A}{h} - B = b$$
$$\Rightarrow b = \frac{2A}{h} - B$$

Question 6

/ 4 pts

Résoudre le système d'équations suivant.

$$\begin{cases} 2x + y + 4 = 0 \\ 4x - 3y = 27 \end{cases}$$

$$2x + y + 4 = 0 \qquad -2x - 4$$
$$y = -2x - 4$$

→ on substitue dans la 2e équation :

$$4x - 3(-2x-4) = 27 \qquad \text{distributivité}$$
$$4x + 6x + 12 = 27 \qquad \text{réduction}$$
$$10x + 12 = 27 \qquad -12$$
$$10x = 15 \qquad : 10$$
$$x = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

En reprenant la substitution, on obtient $y = -2x - 4 = -2 \cdot \frac{3}{2} - 4 = -3 - 4 = -7$.

La solution est donc $x = \frac{3}{2}$ et $y = -7$

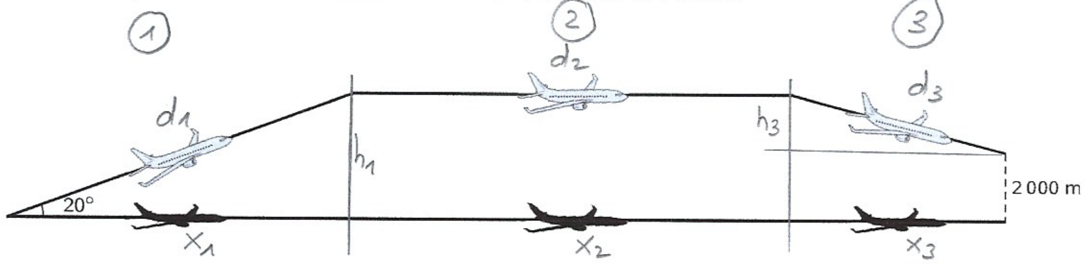
Partie analyse-réflexion

En règle générale, tous les résultats seront arrondis à deux décimales.

Problème 1

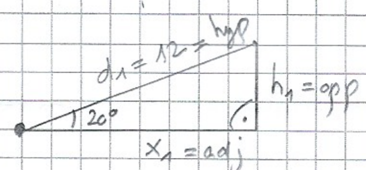
/ **10,5 pts**

Un avion décolle et prend de l'altitude pendant 1,5 minutes. Il poursuit son trajet à cette altitude pendant 3 minutes et redescend pendant 2 minutes jusqu'à une altitude de 2 000 m (voir schéma ci-dessous). La vitesse de l'avion reste constante à 480 km/h.



En supposant que le soleil soit au zénith et que ses rayons soient perpendiculaires au sol, calculer la distance parcourue par son ombre sur le sol (résultat en km).

1 Temps $= 1{,}5\,\text{min} = \frac{1{,}5}{60} = 0{,}025\,h$
Vitesse $= 480\,\text{km}/h$
$d_1 = 480 \cdot 0{,}025 = 12\,\text{km}$

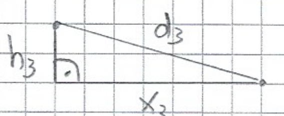


avec cos adj/hyp : $\cos(20°) = \frac{x_1}{12} \Rightarrow x_1 = 12 \cdot \cos(20°) \cong 11{,}276\,\text{km}$

on aura besoin de h_1 dans 3 :
$h_1 = \sqrt{12^2 - x_1^2} \cong \sqrt{12^2 - 11{,}276^2} \cong 4{,}104\,\text{km}$

2 Temps $= 3\,\text{min} = \frac{3}{60} = 0{,}05h$
Vitesse $= 480\,\text{km}/h$
$x_2 = d_2 = 480 \cdot 0{,}05 = 24\,\text{km}$

3 Temps $= 2\,\text{min} = \frac{2}{60} = 0{,}0\overline{3}\,h$
Vitesse $= 480\,\text{km}/h$
$d_3 = 480 \cdot 0{,}0\overline{3} = 16\,\text{km}$



Comme $2000\,\text{m} = 2\,\text{km}$, on a $h_3 = h_1 - 2 =$
$= 4{,}104 - 2 = 2{,}104$

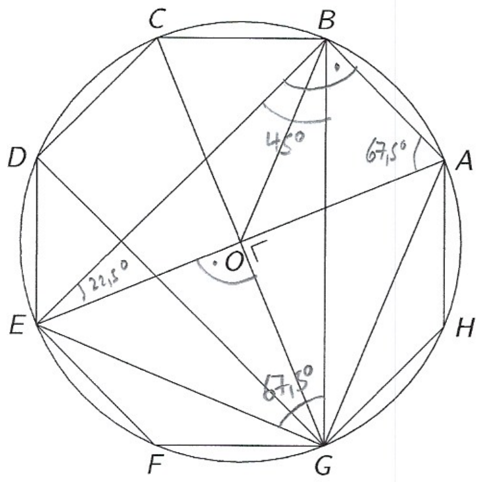
On a alors $x_3 = \sqrt{d_3^2 - h_3^2} = \sqrt{16^2 - 2{,}104^2} = 15{,}861\,\text{km}$

Par conséquent, la distance parcourue par l'ombre sur le sol est
$x_1 + x_2 + x_3 \cong 11{,}276 + 24 + 15{,}861 \cong \underline{\underline{51{,}14\,\text{km}}}$

Problème 2

/ **6 pts**

Dans la figure ci-dessous, $ABCDEFGH$ est un octogone régulier inscrit dans un cercle de centre O.



a) Déterminer l'angle $\widehat{ABE}$. Justifier.

Comme AE est un diamètre du cercle et comme B appartient au cercle, par le cercle de Thalès, on a $\widehat{ABE} = 90°$

b) Déterminer l'angle $\widehat{AEB}$. Justifier.

L'angle $\widehat{BAH}$ de l'octogone vaut $\frac{(8-2)\cdot 180°}{8} = 135°$.

Comme AE est un diamètre du cercle, on a alors $\widehat{BAE} = \frac{135}{2} = 67{,}5°$.

Ainsi, dans le triangle ABE, on a $\widehat{AEB} = 180° - \widehat{ABE} - \widehat{BAE} =$

$= 180° - 90° - 67{,}5° = 22{,}5°$

c) Déterminer l'angle $\widehat{BGE}$. Justifier.

Par le théorème de l'angle inscrit et de l'angle au centre, on a $\widehat{EBG} = \frac{1}{2}\widehat{EOG}$.

Comme $\widehat{EOG} = 90°$, on a $\widehat{EBG} = 45°$.

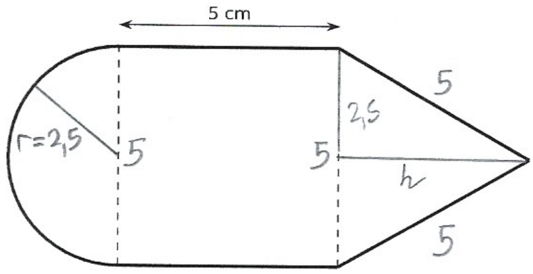
Le triangle BEG est isocèle car, par symétrie $BE = BG$. On a donc $\widehat{BGE} = \widehat{BEG}$.

Ainsi $\widehat{BGE} = \frac{180° - \widehat{EBG}}{2} = \frac{180° - 45°}{2} = 67{,}5°$

Problème 3

/ **17 pts**

On considère un prisme de hauteur 4 cm dont la base est constituée d'un carré de 5 cm de côté auquel on accole un demi-disque sur l'un des côtés et un triangle équilatéral sur le côté opposé (voir figure ci-dessous).



a) Déterminer l'aire de la base de prisme (résultat en cm^2).

Calcul de h par le théorème de Pythagore : $h = \sqrt{5^2 - 2,5^2} \cong 4,33$ cm

Aire du triangle équilatéral $= \frac{5 \cdot h}{2} \cong \frac{5 \cdot 4,33}{2} = 10,825 \text{ cm}^2$

Aire du carré $= 5^2 = 25 \text{ cm}^2$

Aire du demi-cercle $= \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 2,5^2}{2} \cong 9,817 \text{ cm}^2$

Ainsi, l'aire de la base du prisme vaut :

$10,825 + 25 + 9,817 \cong \underline{\underline{45,64 \text{ cm}^2}}$

b) Déterminer le volume du prisme (résultat en cm^3).

Le volume du prisme vaut aire de base · hauteur, donc

volume du prisme $= 45,64 \cdot 4 = \underline{\underline{182,57 \text{ cm}^3}}$

Problème 4

/ **6 pts**

Dans le plan, on donne les points P, Q et R, la droite d et les lettres B, L, A, N et C.
Construire à la règle (équerre) et au compas :

a) l'image du A par la translation qui amène P sur Q ;

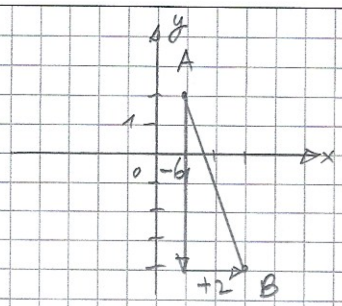
b) l'image du N par la rotation de centre R et d'angle 70° dans le sens des aiguilles d'une montre ;

c) l'image du L par la symétrie axiale d'axe d.

Problème 5

/ **11,5 pts**

a) Soit f la fonction affine dont le graphe passe par les points $A(1; 2)$ et $B(3; -4)$.
Déterminer l'expression fonctionnelle de f.



La fonction f est de la forme $f(x) = ax + b$.
a est la pente qui vaut $a = \frac{\text{vertical}}{\text{horizontal}} = \frac{-6}{2} = -3$
Ainsi on a $f(x) = -3x + b$.
Avec $A(1;2)$ un point de la droite, si $x = 1$, alors
$f(x) = 2$ $(= y)$. On doit donc avoir $2 = -3 \cdot 1 + b$
$\Rightarrow 2 = -3 + b \Rightarrow b = 5$
Ainsi, l'expression fonctionnelle de f est $f(x) = -3x + 5$

b) Déterminer l'expression fonctionnelle de la fonction linéaire g dont le graphe est parallèle à celui de f.

g est parallèle à f $\Rightarrow$ la pente de g est égale à la pente de f
$\Rightarrow$ pente de $g = -3$.
Comme g est linéaire, son expression fonctionnelle est de la forme $g(x) = ax$
où a est la pente.
Comme $a = -3$, l'expression fonctionnelle de g est $g(x) = -3x$

c) Quelle valeur faut-il donner à m pour que le graphe de la fonction h donnée par $h(x) = mx - 3$ passe par le point $C(1; 2)$? Votre réponse doit être justifiée par un calcul.

Si $C(1;2)$ appartient au graphe de $h(x) = mx - 3$, si $x = 1$, alors $h(x) = 2$.
Ainsi, on doit avoir $2 = m \cdot 1 - 3 \Rightarrow 2 = m - 3 \Rightarrow m = 5$.

d) Soit i la fonction donnée par $i(x) = 5x - 7$. Déterminer les coordonnées du point d'ordonnée 3 qui appartient au graphe de i.

L'ordonnée est la 2e coordonnée et correspond donc à $i(x)$.

On a donc $i(x) = 3 \Rightarrow$

$$3 = 5x - 7 \quad | +7$$
$$10 = 5x \quad | :5$$
$$2 = x$$

Ainsi les coordonnées du point cherché sont $\underline{\underline{(2 ; 3)}}$.

e) Soit j la fonction affine donnée par $j(x) = -3x + 5$. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des graphes de i et j.

On a $i(x) = 5x - 7$ et $j(x) = -3x + 5$.

L'intersection de i et j correspond à $i(x) = j(x)$

$$\Rightarrow 5x - 7 = -3x + 5 \quad | +3x$$
$$8x - 7 = 5 \quad | +7$$
$$8x = 12 \quad | :8$$
$$x = 1{,}5$$

Avec $x = 1{,}5$, on a $i(x) = 5 \cdot 1{,}5 - 7 = 0{,}5$ (et $j(x) = -3 \cdot 1{,}5 + 5 = 0{,}5$).

Ainsi le point d'intersection est $\underline{\underline{(1{,}5 ; 0{,}5)}}$.

Problème 6

/ 8 pts

Un lièvre fait des bonds d'une longueur de 6 m et court à une vitesse de 72 km/h.

a) Combien de bonds le lièvre doit-il faire pour parcourir 1 500 m ?

Le nombre de bonds est $\frac{1500}{6} = \underline{\underline{250}}$.

b) Calculer la vitesse du lièvre en nombre de bonds par minute.

On a 72 km/h $\Rightarrow$ 72 km en 1h

$\Rightarrow$ 72'000 m en 60 min

$\Rightarrow \frac{72'000}{60} = 1200$ m en 1 min

$\Rightarrow \frac{1200}{6} = 200$ bonds en 1 min

La vitesse est donc de $\underline{\underline{\text{200 bonds/minute}}}$

Le lièvre fait une course avec la tortue qui fait des pas de 4 cm.

c) Calculer la distance parcourue sachant qu'à la fin de la course la tortue a fait 29 800 pas de plus que le lièvre n'a fait de bonds (résultat en m).

La vitesse du lièvre est de 200 bonds/minutes.

Si t est le nb de minutes de la course du lièvre, la distance qu'il a parcouru vaut alors $200t$ bonds.

La distance parcourue par la tortue vaut 29'800 pas de plus que le lièvre n'a fait de bonds ; elle vaut donc $200t + 29'800$ pas.

Avec la longueur d'un bond de 6m et la longueur d'un pas de 4cm = = 0,04m, les distances parcourues sont :

lièvre : $200t \cdot 6 = 1200t$

lapin : $(200t + 29'800) \cdot 0{,}04 = 8t + 1192$

Les 2 distances sont égales (c'est la longueur de la course) : $1200t = 8t + 1192$

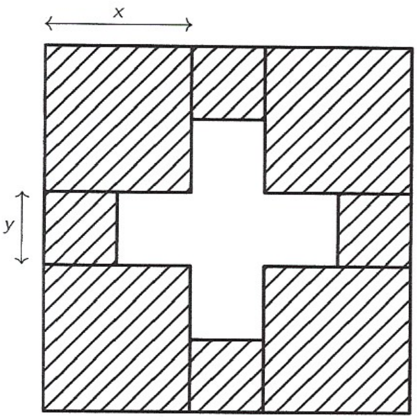
$\Rightarrow 1192t = 1192 \Rightarrow t = 1$ min.

La distance parcourue (longueur de la course) est donc de $1200 \cdot 1 = \underline{\underline{1200\text{ m}}}$

Problème 7

/ **11 pts**

Dans une feuille carrée de 30 cm de côté, on découpe quatre carrés, un sur chacun des sommets, tous de côté x. Puis sur chaque bout de côté restant, on découpe encore un carré de côté y (voir schéma ci-dessous).
On impose que x soit compris entre 10 cm et 15 cm pour éviter une superposition des carrés.



a) Déterminer l'aire de la surface en blanc ci-dessus obtenue lorsque $x = 13$ cm (résultat en cm^2).

Aire blanche = aire de la feuille carrée − 4 aires d'un carré de $x = 13$ cm de côté
− 4 aires d'un carré de côté $y = 30 - 2x = 30 - 2 \cdot 13 = 30 - 26 = 4$ cm
$= 30^2 - 4 \cdot 13^2 - 4 \cdot 4^2 = 900 - 676 - 64 = \underline{\underline{160 \text{ cm}^2}}$

b) Donner l'expression de y en fonction de x.

On a $\underline{\underline{y = 30 - 2x}}$ (côté de la feuille carrée − 2 fois le côté du carré de côté x)

c) Montrer que la fonction qui donne l'aire en cm^2 de la surface obtenue est donnée par

$$\mathcal{A}(x) = -20x^2 + 480x - 2700\,.$$

Similairement à a), on a $A(x) = 30^2 - 4x^2 - 4y^2 =$
$= 900 - 4x^2 - 4(30-2x)^2$.

On a $(30-2x)^2 = (30-2x)(30-2x) = 900 - 60x - 60x + 4x^2 = 900 - 120x + 4x^2$.

Ainsi $A(x) = 900 - 4x^2 - 4(900 - 120x + 4x^2) =$
$= 900 - 4x^2 - 3600 + 480x - 16x^2 =$
$= \underline{\underline{-20x^2 + 480x - 2700}}$.

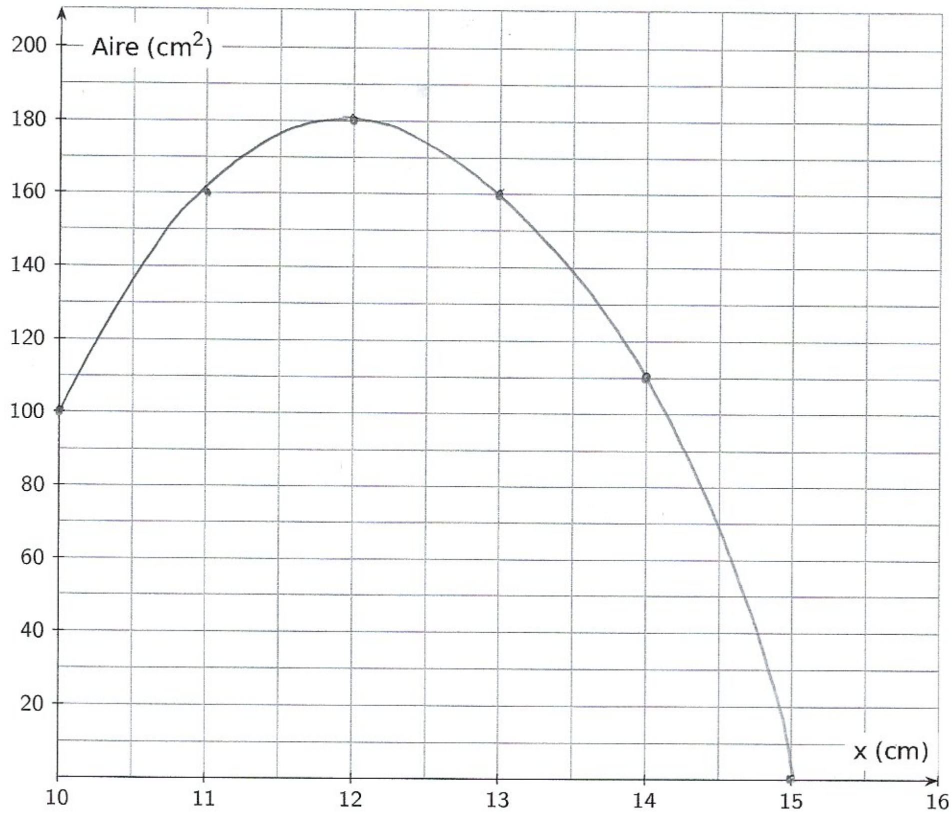
d) Représenter la fonction $\mathcal{A}$ pour x compris entre 10 et 15 dans le système d'axes de la page 16.

e) Déterminer graphiquement la valeur de x pour que cette aire soit maximale.

Sur le graphique, on voit que $A(x)$ sera maximale en $x = 12$.
Donc l'aire sera maximale lorsque x vaut $\underline{\underline{12\text{ cm}}}$

f) Quelle est cette aire maximale ?

Avec $x = 12$, l'aire maximale vaut alors $\underline{\underline{180\text{ cm}^2}}$ (voir dessin)
(ou $A(12) = -20 \cdot 12^2 + 480 \cdot 12 - 2700 = 180$)



x	$A(x) = -20x^2 + 480x - 2700$
10	$-20 \cdot 10^2 + 480 \cdot 10 - 2700 = 100$
11	$-20 \cdot 11^2 + 480 \cdot 11 - 2700 = 160$
12	$-20 \cdot 12^2 + 480 \cdot 12 - 2700 = 180$
13	$-20 \cdot 13^2 + 480 \cdot 13 - 2700 = 160$
14	$-20 \cdot 14^2 + 480 \cdot 14 - 2700 = 100$
15	$-20 \cdot 15^2 + 480 \cdot 15 - 2700 = 0$