gymnase
de
nyon

NOTE :

Corrigé

NOM : ____________________ **PRÉNOM :** ____________________

EXAMEN D'ADMISSION AUX GYMNASES VAUDOIS
SESSION XXXX

ÉCOLE DE CULTURE GÉNÉRALE ET ÉCOLE DE COMMERCE
(+MPI)

BRANCHE	:	MATHÉMATIQUES
SIGLE	:	EXAD-1C/1E-MAT-03
EXAMEN	:	ÉCRIT

Durée 3 heures

Matériel autorisé calculatrice TI-30 ECO RS, TI-30 X II S ou TI-30 X II B, règle, équerre, rapporteur, compas, formulaire joint à l'épreuve.

Consignes

- le candidat rédige les solutions directement sur les feuilles de données dans l'espace prévu à cet effet sous chaque question (il n'utilise pas la couleur rouge) ;
- lorsque cet espace n'est pas suffisant, le candidat l'indique clairement dans sa réponse et termine au verso ;
- les feuilles de brouillon ne sont pas corrigées ;
- la rédaction doit être soignée ; les calculs et les raisonnements doivent être détaillés ;
- la réponse doit être soulignée ou encadrée.

Partie technique ______ **/ 27 pts**
Partie analyse-réflexion ______ **/ 63 pts**
Pondération partie technique 30% et partie analyse-réflexion 70% de la note finale

Partie technique

Question 1

/ **5,5 pts**

Résoudre les équations suivantes et <u>donner la réponse sous la forme de fraction irréductible.</u>

a) $5 - x = 21 + 3x$

$5 - x = 21 + 3x \quad | +x$

$5 = 21 + 4x \quad | -21$

$-16 = 4x \quad | :4$

$x = -4$

b) $57 - 2(x + 21) = 63 - 2(3x + 5)$

$57 - 2(x+21) = 63 - 2(3x+5) \quad | D$

$57 - 2x - 42 = 63 - 6x - 10 \quad | R$

$15 - 2x = 53 - 6x \quad | +6x$

$15 + 4x = 53 \quad | -15$

$4x = 38 \quad | :4$

$x = \frac{38}{4}$

$x = \frac{19}{2}$

c) $16 + 2x = 56 - 8x - 20$

$16 + 2x = 56 - 8x - 20 \quad | R$

$16 + 2x = 36 - 8x \quad | +8x$

$16 + 10x = 36 \quad | -16$

$10x = 20 \quad | :10$

$x = 2$

Question 2

/ **5,5 pts**

Calculer en détaillant les calculs et <u>donner la réponse sous la forme d'une fraction irréductible.</u>

a) $\frac{7}{27} + \frac{3}{9} - \frac{3}{81}$

$\frac{7}{27} + \frac{3}{9} - \frac{3}{81} = \frac{21}{81} + \frac{27}{81} - \frac{3}{81} = \frac{21+27-3}{81} = \frac{45}{81} = \frac{5}{9}$

b) $\frac{4}{5} \cdot \frac{16}{5}$

$\frac{4}{5} \cdot \frac{16}{5} = \frac{4 \cdot 16}{5 \cdot 5} = \frac{64}{25}$

c) $\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\right) \div \frac{5}{7}$

$\frac{4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{8}{6} - \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$

$\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\right) : \frac{5}{7} \quad \frac{5}{6} : \frac{5}{7} = \frac{\cancel{5}^{1}}{6} \cdot \frac{7}{\cancel{5}_{1}} = \frac{7}{6}$

Question 3

/ **9 pts**

Effectuer et réduire les expressions suivantes.

a) $w^2 \cdot (u+v) \cdot (u-v)$.

$(u+v) \cdot (u-v) = u^2 - v^2$ (identité remarquable)

$\Rightarrow w^2 \cdot (u+v) \cdot (u-v) = w^2 \cdot (u^2 - v^2) = u^2 w^2 - v^2 w^2$

b) $(3-2t) \cdot (6+5t)$

$(3-2t) \cdot (6+5t) = 18 + 15t - 12t - 10t^2 = -10t^2 + 3t + 18$

c) $3x - 4(5x - 2)$

$3x - 4(5x - 2) = 3x - 20x + 8 = \underline{\underline{-17x + 8}}$

d) $(x + 5y)^2$

1e méthode : avec l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

$(x + 5y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5y + (5y)^2 = \underline{\underline{x^2 + 10xy + 25y^2}}$.

2e méthode : $(x + 5y)^2 = (x + 5y)(x + 5y) = x^2 + 5xy + 5xy + 25y^2$

$= \underline{\underline{x^2 + 10xy + 25y^2}}$.

e) $24y \cdot (y + 3 - (3 - y))$

$24y \cdot (y + 3 - (3 - y)) = 24y \cdot (y + \underbrace{3 - 3}_{0} + y) = 24y \cdot 2y = \underline{\underline{48y^2}}$.

Question 4

/5 pts

On considère la fonction f donnée par $f(x) = 5 - 3x$

a) Compléter le tableau de valeurs suivant.

x	-2	-3
$y = f(x)$	11	14

$5-3x=14 \quad |-5$
$-3x=9 \quad |:(-3)$
$x=-3$

$5-3\cdot(-2)=5+6=11$

b) Que vaut l'ordonnée à l'origine ?

Comme $f(x) = -3x+5$, l'ordonnée à l'origine vaut 5.

c) Que vaut la pente ?

Comme $f(x) = -3x+5$, la pente vaut -3.

Question 5

/2 pts

Pour quelle(s) valeur(s) de c, $x = 3$ est-il une solution de l'équation $2x + c = -2$?

On remplace x par 3 et on calcule alors c :

$2\cdot 3 + c = -2 \quad | \; c$
$6 + c = -2 \quad | -6$
$c = -8$

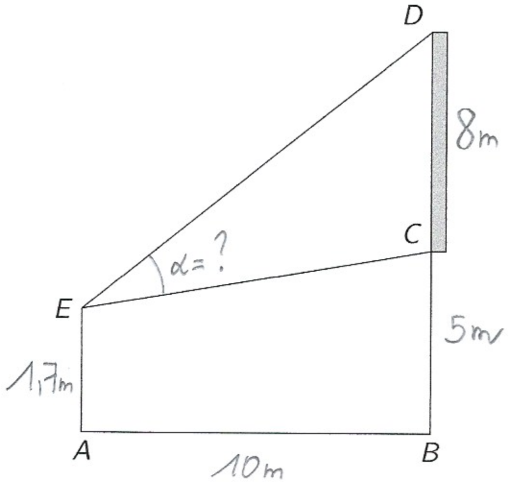
Partie analyse-réflexion

En règle générale, tous les résultats seront arrondis à deux décimales.

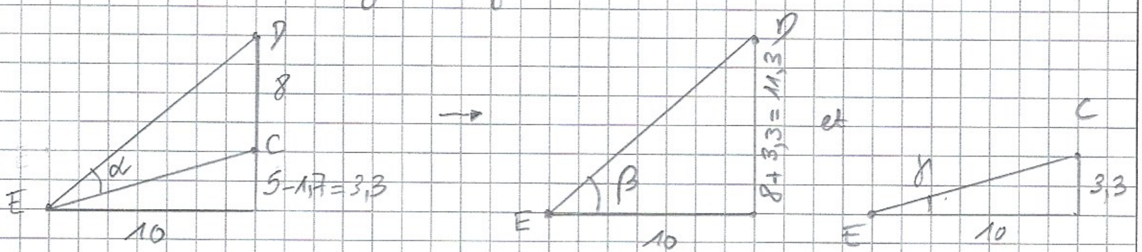
Problème 1

/5 pts

Le bord inférieur d'un panneau publicitaire rectangulaire de 8 m de haut est fixé à 5 m du sol. Un observateur, dont les yeux (représentés par le point E sur le schéma ci-dessous) se situent à 1,7 m au-dessus du sol, regarde le panneau. L'observateur est situé à une distance $AB = 10$ m du pied du panneau. Calculer l'angle $\widehat{DEC}$ sous lequel il voit le panneau.



On cherche le ou les triangles rectangles dans cette situation :



Avec la trigonométrie et la formule tanoppadj, on a :

- $\tan(\beta) = \frac{11,3}{10} = 1,13 \Rightarrow \beta = 48,49°$ et
- $\tan(\gamma) = \frac{3,3}{10} = 0,33 \Rightarrow \gamma = 18,26°$

On otient alors $\alpha = \beta - \gamma = 48,49° - 18,26° = \underline{\underline{30,23°}}$.

Problème 2

/ **3 pts**

Un contrôleur aérien observe le mouvement d'un avion sur une carte électronique où l'avion se déplace à la vitesse de deux centimètres par seconde. Sachant que l'échelle de la carte est 1 : 10 000, calculer la vitesse en km/h de l'avion dans la réalité.

Sur la carte, l'avion se déplace de 2 cm en 1 seconde.
Comme la carte est 10'000 fois plus petite que la réalité, l'avion se déplacera de $2 \cdot 10'000 = 20'000$ cm en 1 seconde dans la réalité.
On a 20'000 cm en 1 seconde
$\Rightarrow$ 200 m en 1 seconde
$\Rightarrow$ 0,2 km en 1 seconde
$\Rightarrow$ $0,2 \cdot 60 \cdot 60 = 720$ km en 1 h (1 h = $60 \cdot 60$ secondes)

Ainsi la vitesse de l'avion dans la réalité est de 720 km/h.

Problème 3

/ **5,5 pts**

Dans tout quadrilatère convexe, la somme des angles mesure 360°. On considère un quadrilatère tel que le deuxième angle mesure le double du premier, le troisième le double du deuxième et le quatrième mesure 40° de plus que le premier. Calculer les angles de ce quadrilatère.

On va utiliser une équation :
Posons x = la valeur du 1e angle. On a alors :

$$\left.\begin{array}{l} 1^{er} \text{ angle} = x \\ 2^e \text{ angle} = \text{double du } 1^{er} = 2x \\ 3^e \text{ angle} = \text{double du } 2^e = 2 \cdot 2x = 4x \\ 4^e \text{ angle} = 40° \text{ de plus que le } 1^{er} = x + 40 \end{array}\right\} \text{au total : } 360°$$

On obtient ainsi l'équation :

$$\begin{array}{rl|l} x + 2x + 4x + x + 40 &= 360 & R \\ 8x + 40 &= 360 & -40 \\ 8x &= 320 & :8 \\ x &= 40 & \end{array}$$

Ainsi, le 1e angle vaut 40°, le 2e vaut 80°, le 3e vaut 160° et le 4e vaut 80°.

Problème 4

/ **5 pts**

Une caisse enregistreuse contient des pièces de 2 CHF et des pièces de 5 CHF. Au total, la caisse contient 67 pièces représentant la somme de 281 CHF. Combien y a-t-il de pièces de chaque sorte ?

On appelle x le nb de pièces de 2 CHF et y le nb de pièces de 5 CHF.

Il y a 67 pièces au total : $x+y=67$

Leur valeur totale est de 281 CHF : $2x+5y=281$

On doit donc résoudre le système $\begin{cases} x+y=67 \\ 2x+5y=281 \end{cases}$

Méthode d'addition ou de combinaison linéaire :

$$\begin{cases} x+y=67 & \cdot 5 \\ 2x+5y=281 & \cdot(-1) \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{rl} 5x+5y=335 & \\ -2x-5y=-281 & + \\ \hline 3x=54 & :3 \\ x=18 & \end{array}$$

$$\begin{cases} x+y=67 & \cdot 2 \\ 2x+5y=281 & \cdot(-1) \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{rl} 2x+2y=134 & \\ -2x-5y=-281 & + \\ \hline -3y=-147 & :(-3) \\ y=49 & \end{array}$$

Méthode de substitution :

$$\begin{cases} x+y=67 \xrightarrow{-x} y=67-x \\ 2x+5y=281 \end{cases}$$

substitution

$$\begin{array}{rl} \Longrightarrow 2x+5(67-x)=281 & \text{D} \\ 2x+335-5x=281 & \text{R} \\ -3x+335=281 & -335 \\ -3x=-54 & :(-3) \\ x=18 & \end{array}$$

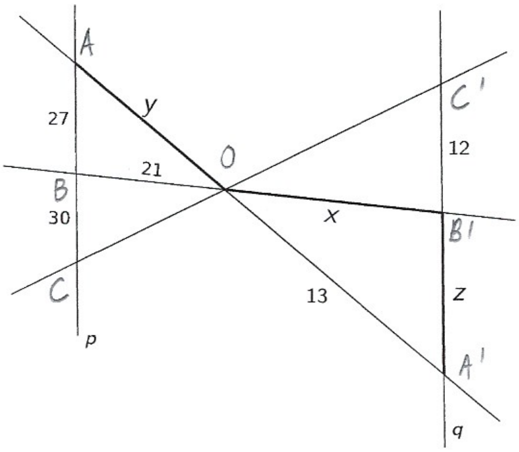
$\Longrightarrow y=67-x=67-18=49.$

Donc, il y a $x=$ 18 pièces de 2 CHF et $y=$ 49 pièces de 5 CHF.

Problème 5

/ **6 pts**

Dans la figure ci-dessous, les droites p et q sont parallèles et les nombres indiqués donnent les longueurs des segments. Calculer les longueurs x, y et z.



Par le théorème de Thalès, on a :

• pour les triangles OAB et OA'B' : $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB}$

$\Rightarrow \frac{13}{y} = \frac{x}{21} = \frac{z}{27}$ (*)

• pour les triangles OBC et OB'C' : $\frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{B'C'}{BC}$

$\Rightarrow \frac{x}{21} = \frac{OC'}{OC} = \frac{12}{10} \Rightarrow \frac{x}{21} = \frac{12}{10} \quad | \cdot 21$

$\Rightarrow x = 1{,}2 \cdot 21$

$\Rightarrow \underline{\underline{x = 25{,}2}}$

Avec (*), on a alors $\frac{13}{y} = \frac{x}{21} \Rightarrow \frac{13}{y} = \frac{25{,}2}{21} \Rightarrow \frac{13}{y} = 1{,}2 \quad | \cdot y$

$13 = 1{,}2 \cdot y \quad | : 1{,}2$

$\underline{\underline{10{,}8\overline{3} = y}}$

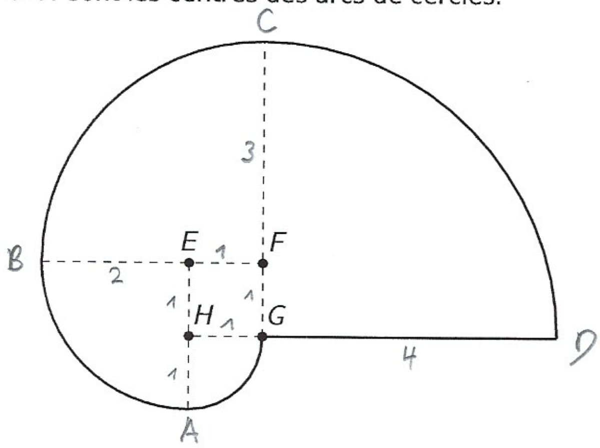
et $\frac{x}{21} = \frac{z}{27} \Rightarrow \frac{25{,}2}{21} = \frac{z}{27} \Rightarrow 1{,}2 = \frac{z}{27} \Rightarrow z = 1{,}2 \cdot 27$

$\Rightarrow \underline{\underline{z = 32{,}4}}$

Problème 6

/ **5,5 pts**

Calculer le périmètre (en cm) de la figure ci-dessous sachant que $EFGH$ est un carré de 1 cm de côté. Les points E, F, G et H sont les centres des arcs de cercles.



On a : $\overset{\frown}{GA} = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot 1}{4} = 0{,}5\pi$

$\overset{\frown}{AB} = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot 2}{4} = \pi$

$\overset{\frown}{BC} = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot 3}{4} = 1{,}5\pi$

$\overset{\frown}{CD} = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot 4}{4} = 2\pi$

$DG = 4.$

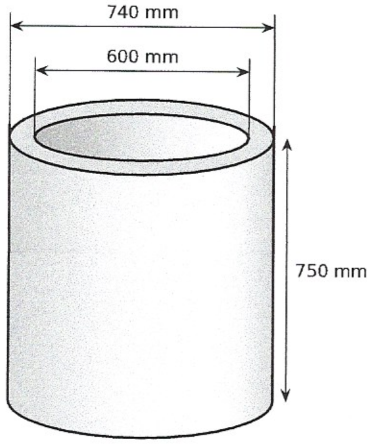
Ainsi le périmètre de la figure vaut $0{,}5\pi + \pi + 1{,}5\pi + 2\pi + 4$

$= \underline{\underline{5\pi + 4 \cong 19{,}71 \text{ cm}}}$

Problème 7

/9,5 pts

Un tuyau en béton de forme cylindrique a un diamètre intérieur de 600 mm et un diamètre extérieur de 740 mm. Sa hauteur est de 750 mm.



a) Calculer le volume intérieur du tuyau (résultat en m^3).

Le volume intérieur vaut $\pi \cdot r^2 \cdot h$ où $r = \frac{600}{2}$ mm $= 300$ mm $= 0{,}3$ m

et $h = 750$ mm $= 0{,}75$ m.

Ainsi, le volume intérieur vaut $\pi \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}75 \cong \underline{\underline{0{,}21 \text{ m}^3}}$

b) Sachant que la masse volumique du béton est de 2 700 kg/m^3, calculer la masse en kg du tuyau.

Le volume de matière vaut volume extérieur − volume intérieur.

Le volume extérieur vaut $\pi \cdot r^2 \cdot h$, où $r = \frac{740}{2} = 370$ mm $= 0{,}37$ m

et $h = 750$ mm $= 0{,}75$ m, donc $\pi \cdot 0{,}37^2 \cdot 0{,}75 \cong 0{,}32 \text{ m}^2$.

Le volume intérieur vaut $\sim 0{,}21 \text{ m}^3$ (voir a)).

Ainsi le volume de matière vaut $0{,}32 - 0{,}21 \cong 0{,}11 \text{ m}^3$

On sait que 1 m^3 a une masse de 2700 kg (masse volumique = 2700 kg/m^3)

Ainsi, les $0{,}11 \text{ m}^3$ ont une masse de $2700 \cdot 0{,}11 \cong \underline{\underline{298{,}36 \text{ kg}}}$.

c) La paroi extérieure de ce type de tuyaux doit être recouverte d'une couche de peinture coûtant 1,50 CHF/m^2. Quel est le coût pour peindre la paroi extérieure de deux de ces tuyaux ?

La paroi extérieure d'un des tuyaux est l'aire latérale du cylindre dont la formule est $2\pi rh$, où $r = \frac{740}{2}$ mm $= 370$ mm $= 0{,}37$ m et $h = 750$ mm $= 0{,}75$ m.

L'aire de la paroi extérieure d'un des tuyaux vaut donc $2 \cdot \pi \cdot 0{,}37 \cdot 0{,}75 \cong 1{,}74\ m^2$.

L'aire de la paroi extérieure de deux tuyaux vaut alors $2 \cdot 1{,}74 \cong 3{,}49\ m^2$.

Le prix de la peinture est ainsi de $3{,}49 \cdot 1{,}50 = \underline{\underline{5{,}23 \text{ CHF}}}$.

Problème 8

/ 8,5 pts

L'entreprise téléphonique Easytel propose un abonnement mensuel composé d'un forfait de base de 7 CHF auquel il faut ajouter 0,20 CHF par minute de conversation. L'entreprise Rapidotel propose quant à elle un abonnement mensuel composé d'un forfait de base de 8 CHF auquel il faut ajouter 0,15 CHF par minute de conversation.

a) Donner la fonction f qui exprime la dépense mensuelle d'un client d'Easytel en fonction du nombre de minutes de conversation.

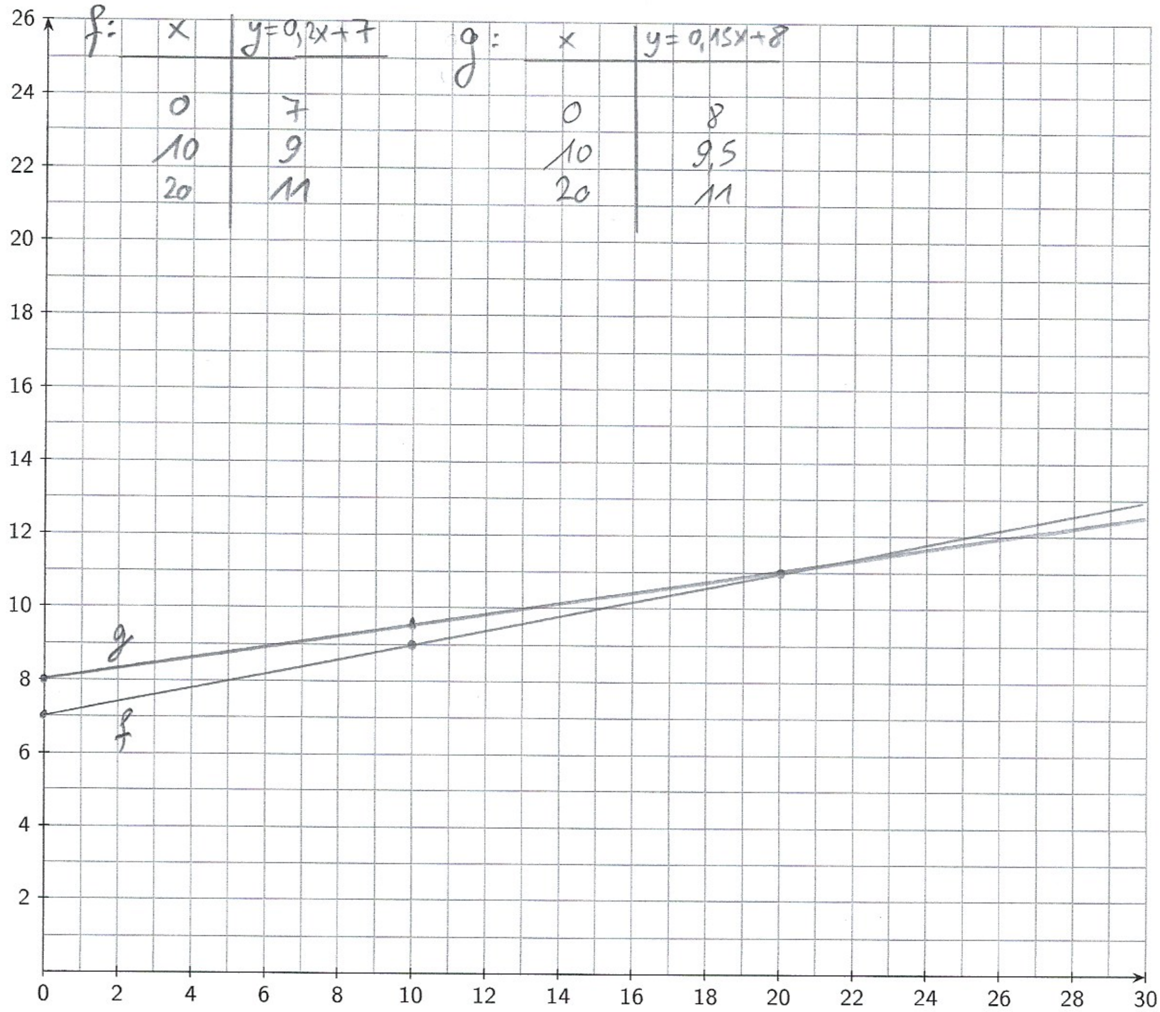
De manière générale, on a : prix total (y) = prix d'une unité · nb d'unité (x) + taxe de base ou abonnement.

Ainsi, pour Easytel, on a $f : x \longmapsto \underline{\underline{y = 0{,}2 \cdot x + 7}}$, où x est le nb de minutes de conversation et y est la dépense mensuelle.

b) Donner la fonction g qui exprime la dépense mensuelle d'un client de Rapidotel en fonction du nombre de minutes de conversation.

Ici, pour Rapidotel, on a $g : x \longmapsto \underline{\underline{y = 0{,}15 \cdot x + 8}}$, où x est le nb de minutes de conversation et y est la dépense mensuelle.

c) Représenter les graphes des fonctions f et g dans le système d'axes ci-dessous.



f :

x	$y = 0{,}2x + 7$
0	7
10	9
20	11

g :

x	$y = 0{,}15x + 8$
0	8
10	9,5
20	11

d) À partir de combien de minutes l'abonnement Rapidotel devient-il plus avantageux que l'abonnement Easytel ? La réponse doit être justifiée par un calcul.

On commence par chercher où les dépenses mensuelles sont égales pour les deux abonnements : on doit avoir $f(x) = g(x) \Longrightarrow$

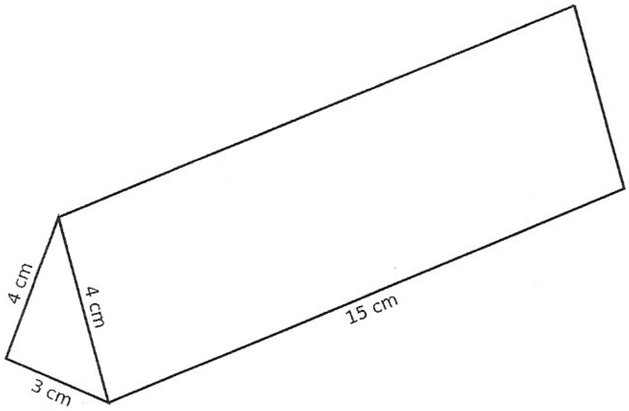
$$0{,}2x + 7 = 0{,}15x + 8 \quad | -0{,}15x$$
$$0{,}05x + 7 = 8 \quad | -7$$
$$0{,}05x = 1 \quad | :0{,}05$$
$$x = 20$$

Ainsi, dès que le nb de minutes de conversation est supérieure à 20, l'abonnement Rapidotel est plus avantageux

Problème 9

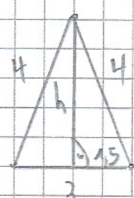
/ **10 pts**

Le fameux chocolat Taublérone est vendu dans une boîte en forme de prisme dont les dimensions sont indiquées sur le schéma ci-dessous.



a) Calculer l'aire totale d'une boîte de Taublérone (résultat en cm^2).

Commençons par calculer l'aire du triangle :

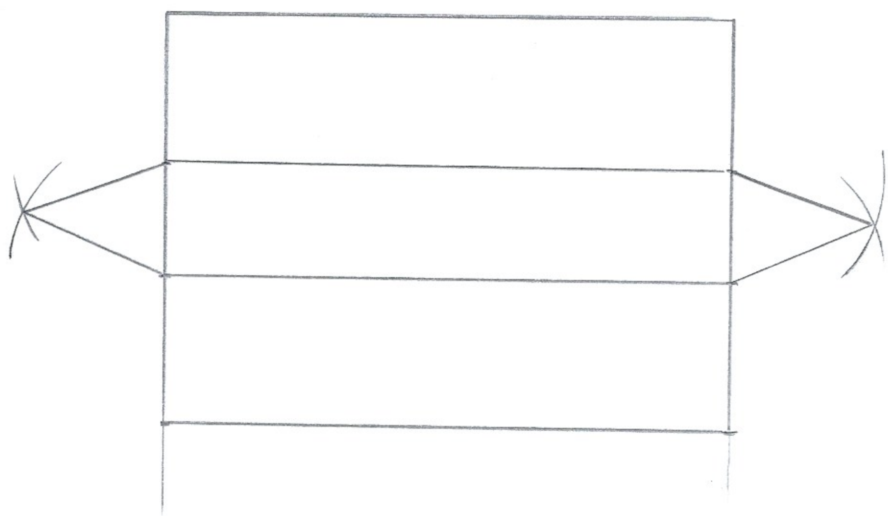


Par le théorème de Pythagore, on a $h = \sqrt{4^2 - 1{,}5^2} = \sqrt{16 - 2{,}25} = \sqrt{13{,}75} \cong 3{,}71$ cm

L'aire totale est alors : $2 \cdot \frac{3 \cdot 3{,}71}{2} + 4 \cdot 15 + 4 \cdot 15 + 3 \cdot 15 = 176{,}12 \text{ cm}^2$

b) Construire ci-dessous, à la règle (équerre) et au compas, le développement d'une boîte de Taublérone à l'échelle 1 : 2.

↳ les longueurs sur le développement sont la moitié de celle de la réalité.



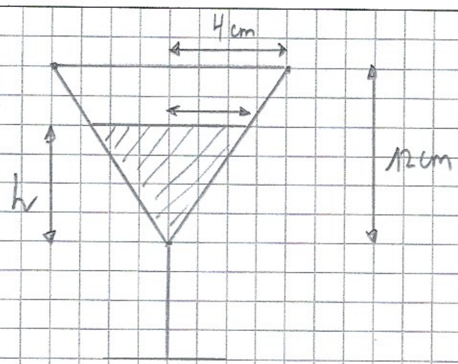
Problème 10

/ **5 pts**

Un verre est constitué d'un pied et d'une partie conique dans laquelle on verse le liquide. La partie conique a un rayon intérieur de 4 cm et une hauteur de 12 cm.

a) On remplit le verre jusqu'aux 60% de la hauteur totale de la partie conique du verre. Calculer la hauteur du liquide (résultat en cm).

On a la situation suivante :



On a $h = 60\%$ de $12 = \frac{60}{100} \cdot 12 = 0{,}6 \cdot 12 = 7{,}2$ cm.

b) Calculer l'aire de la surface de liquide en contact avec l'air extérieur (résultat en cm^2).

La surface en contact avec l'air extérieur correspond à la surface supérieure du liquide qui est un cercle de rayon r (voir dessin ci-dessous) avec $r = 60\%$ de $4 = \frac{60}{100} \cdot 4 = 0{,}6 \cdot 4 = 2{,}4$ cm.

L'aire de cette surface vaut $\pi \cdot r^2 = \pi \cdot 2{,}4^2 = 18{,}10$ cm^2.