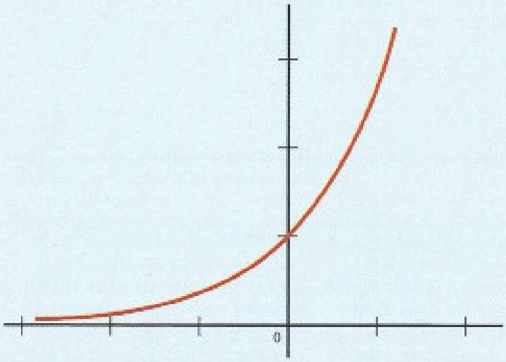
Exponentielle et logarithme

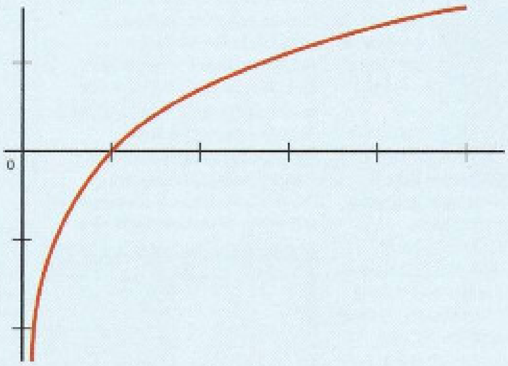
DES APPLICATIONS PRATIQUES

« Croissance exponentielle » est un mot que l'on rencontre souvent dans les journaux ou dans la vie de tous les jours pour décrire un phénomène en plein essor. Comment une fonction mathématique est-elle passée dans le langage courant ? C'est que cette fonction a été utilisée, depuis sa découverte, dans de nombreux domaines pratiques : le calcul d'intérêts en finance, le développement bactérien en biologie… Elle décrit des phénomènes de forte croissance ou de dégénérescence rapide. La simplicité de la manipulation de cette fonction a aussi joué dans son utilisation massive dans les domaines de la vie. Elle a en effet une fonction réciproque : le logarithme. Homologue qui d'ailleurs fut inventé avant l'exponentielle mais l'histoire nous le dira…

Fonction exponentielle



Fonction logarithme



LA FONCTION EN QUESTION

On parle habituellement de la fonction exponentielle qu'l'on note $f(x)=e^x$. Cependant il existe une infinité de fonctions exponentielles. Ce sont toutes les fonctions $f(x) = a^x$ où a est un nombre réel quelconque. Ainsi la fonction $1^x = 1$ est aussi une fonction exponentielle. Plus a est grand, plus la fonction croît rapidement.
De même la fonction logarithme la plus largement répandue est le logarithme népérien $f(x) = \ln(x) = \log_e(x)$. Mais on trouve aussi dans les fonctions usuelles le logarithme décimal : $f(x)= \log_{10}(x)$ qui est un outil très utilisé en physique notamment pour mesurer l'intensité sonore. En général une fonction logarithme s'écrit $f(x) = \log_a(x)$ où a est un réel positif différent de 1.

DÉFINITION RAPIDE

Penchons-nous à présent plus en détail sur ces fonctions logarithmiques. Une fonction logarithme s'écrit ainsi dans le langage mathématique : $y = \log_a(x)$, pour a réel positif et différent de 1. Nous avons vu précédemment qu'il existe plusieurs fonctions logarithmes (selon le choix de a). Pourtant toutes ces fonctions ont des propriétés communes : elles transforment les opérations de multiplication en opération d'addition. C'est-à-dire que $\log_a(xy)= \log_a(x)+ \log_a(y)$ pour x et y positifs.
Le pendant des fonctions logarithmes est constitué par les fonctions exponentielles : $y = a^x$. Elles ont aussi des propriétés communes dont la principale est de transformer l'addition en multiplication : $a^{x+y} = a^x + a^y$
Comme vous avez pu le remarquer les propriétés des fonctions exponentielles et logarithmes sont exactement inverses. Là où le logarithme transforme les multiplications en addition, l'exponentielle fait l'opération inverse puisqu'elle transforme l'addition en multiplication. C'est qu'il existe une relation entre les deux. Elle fut découverte par ***Euler*** plus d'un siècle après que John Napier eut introduit les logarithmes :

$y = a^x \iff x = \log_a(y)$.
Voyons comment utiliser cette formule. Imaginons que vous voulez multiplier deux nombres x et y mais que vous ne disposez pas d'une calculatrice performante. En revanche, vous disposez d'une table de logarithmes. C'est un tableau qui vous donne le logarithme de n'importe quel nombre. On cherche le produit xy. On commence par en prendre le logarithme,
$\log_a(xy)= \log_a(x)+ \log_a(y)$. Grâce à la table des logarithmes, on trouve $\log_a(x)$ et $\log_a(y)$ qu'on additionne. On prend ensuite l'exponentielle du nombre trouvé :
$a^{\log_a(x)+\log_a(y)} = a^{\log_a(xy)} = xy$
On a trouvé le résultat de notre multiplication en effectuant uniquement des additions. Nous sommes d'accord que dans ce cas précis, une multiplication directe apparaît beaucoup plus simple à réaliser. Dans des cas plus complexes cette relation entre fonction exponentielle et logarithme peut se révéler indispensable.

LA CONSTANTE DE NEPER, UN CHOIX SIMPLIFICATEUR

Bien que pour chaque nombre positif a différent de 1, il existe une fonction logarithmique différente, $\log_a(x)$, ces fonctions sont toutes multiples les unes des autres. En effet, avec la formule de changement de base, on peut exprimer une fonction en fonction d'une autre :
Pour a et b strictement positifs et différents de 1, $\log_b(x) = \log_b(a) \,.\, \log_a(x)$ quel que soit x strictement positif.
En prenant la valeur particulière x = a on aboutit à $\log_b(a) = 1/(\log_a(b))$
Cette formule nous permet d'exprimer une fonction en fonction de l'autre. Nous avons seulement besoin d'en évaluer une pour les connaître toutes. La question est alors de savoir quelle est la fonction logarithmique la plus simple à évaluer ?
C'est ici qu'intervient la constante de Neper : $e \approx 2{,}71828$. En quoi le choix de cette base irrationnelle e comme base particulière est simplificateur ? Examinons la dérivée d'une fonction logarithmique quelconque :
$(\log_a(x))'= 1/(x.\ \log_e(a))$
Si on choisit a = e, alors $(\log_e(x))'= 1/x$, expression nettement plus pratique à manipuler. C'est pour ses propriétés face à l'opération de dérivation que la base e a été choisie préférentiellement. Le logarithme de x dans la base e est appelé logarithme naturel de x ou logarithme népérien, généralement noté ln(x).
Un autre logarithme couramment utilisé est le logarithme décimal : $\mathrm{Log}(x) = \ln(x)/\ln(10)$
De même que ln(x) a été choisi préférentiellement comme fonction logarithmique pour sa simplicité, la fonction exponentielle e^x possède également des propriétés simples. Dans le cas général, la dérivée d'une fonction puissance est :
$(a^x)' = (\log_e(a)) \,.\, e^x$
Encore une fois, dans le cas particulier où a = e, cette expression se simplifie en $(e^x)' = e^x$
La base logarithmique naturelle, e, s'est donc imposée comme la plus simple pour mener à bien des calculs et manipuler des équations différentielles (faisant intervenir des dérivées).

DES CALCULS FACILITÉS GRÂCE AUX LOGARITHMES

Historiquement, les fonctions logarithmes étaient utilisées pour simplifier les calculs car elles transforment les opérations de multiplication, de division et de mise à la puissance sur R+ en opérations plus simples d'addition, de soustraction et de multiplication dans R.
Les calculatrices et les ordinateurs ont remplacé les logarithmes en tant que moyen de mener des calculs numériques complexes mais les fonctions logarithmiques et leurs équations fonctionnelles ont toujours leur importance dans la simplification des calculs, tant algébriques qu'analytiques, et pour modéliser des problèmes de la vie réelle. Retraçons leur histoire…

HISTOIRE

John Napier, plus connu sous le nom de Neper, fut l'inventeur des logarithmes. Né en1550 à Edimbourg, il était théologien, physicien et astronome avant d'être mathématicien. C'est en cherchant à simplifier les calculs trigonométriques pour l'astronomie qu'il découvrit les logarithmes. Il partage sa trouvaille avec l'ensemble de la communauté scientifique dans une parution datant de 1614.

Un an après, Henry Briggs, professeur de géométrie à Londres, prend le relais et perfectionne l'outil de Napier. L'essentiel de son travail se concentre sur les logarithmes décimaux. On lui doit les premières tables logarithmiques modernes. Napier meurt en 1617 mais, en son hommage, le logarithme naturel est aujourd'hui appelé logarithme népérien. Pourtant ce n'est pas Napier qui découvrit la base e des logarithmes naturels. Bien qu'il introduisit les logarithmes comme artifice pour simplifier les calculs de cosinus, de sinus, de multiplication

QUELQUES PROPRIÉTÉS

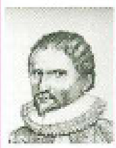
Fonction logarithme
($b>0$, $b \neq 1$, $M>0$, $N>0$ et p un nombre réel)
- $\log_b 1 = 0$
- $\log_b b = 1$
- $\log_b b^x = x$
- $b^{\log_b x} = 0$
- $\log_b MN = \log_b M + \log_b N$
- $\log_b M/N = \log_b M - \log_b N$
- $\log_b M^p = p \log_b M$
- $\log_b M = \log_b N \iff M = N$

Fonction exponentielle
- $\exp(x+y) = \exp(x) + \exp(y)$
- $\exp(x-y) = \exp(x) / \exp(y)$
- $\exp(-y) = 1 / \exp(y)$
- $\exp(nx) = (\exp(x))^n$
- $\exp(x/n) = \sqrt[n]{(\exp(x))}$

Quelques valeurs

e^0	1
e^1	2,718
e^2	7,390
e^3	20,086
e^4	54,598
e^5	148,413
$\log_{10}(1)$	0
$\log_{10}(2)$	0,301
$\log_{10}(3)$	0,477
$\log_{10}(4)$	0,602
$\log_{10}(5)$	0,699
$\ln(1)$	0
$\ln(2)$	0,693
$\ln(3)$	1,099
$\ln(4)$	1,386
$\ln(5)$	1,609

John Napier



1614

L'inventeur **des logarithmes**

et de division, il ne précisa pas de base privilégiée pour ces fonctions. C'est Grégoire de Saint-Vincent qui nous met sur la piste du nombre e.
En 1647, alors qu'il travaille sur la quadrature de l'hyperbole, il démontre que la fonction obtenue vérifie la même propriété que celle des fonctions logarithmiques : transformer un produit en somme. Il faudra cependant attendre 1661 et ***Huygens*** pour faire le

rapprochement entre fonction logarithmique et aire sous l'hyperbole. Le logarithme de Saint-Vincent devient très vite le logarithme le plus simple et le plus naturel. La fonction ln sera d'ailleurs appelée pendant longtemps « logarithme hyperbolique ».
Parallèlement le nombre e fait sa première apparition dans la littérature à l'occasion d'une recherche qui paraît déconnectée des logarithmes : le calcul d'intérêt. ***Bernoulli***, en 1643, est

amené à calculer la limite de la suite $(1+1/n)^n$ dans le cadre de ses travaux.
Il tombe sur le nombre e mais personne ne fait le rapprochement avec les logarithmes naturels. Les premières mentions du nombre e sont donc faites à cette époque mais c'est Euler qui lui donnera son nom de nombre exponentiel en 1761. Le nombre e est une des constantes réelles les plus connues des mathématiques. Il vaut approximativement 2,7182818284590452353602874. Euler poursuivra les recherches sur les exponentielles. Les étapes marquantes de ses découvertes sont le développement en série de e :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Et son développement en fraction continue :

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{5}{6 + \cdots}}}}}}$$

L'histoire récente et les avancées scientifiques ont démontré l'utilité de cette découverte mathématique. Aujourd'hui on peut recenser plusieurs activités qui requièrent l'utilisation des exponentielles et des logarithmes. Ces fonctions interviennent dans les calculs de croissance de population, dans les phénomènes de développement bactériologique, de désintégration radioactive, dans les équations différentielles, les fonctions trigonométriques, les lois de probabilités ou les échelles de pH en chimie. L'étendue des applications est immense. D'une volonté simplificatrice est né un outil mathématique de premier ordre. Examinons ses applications concrètes.

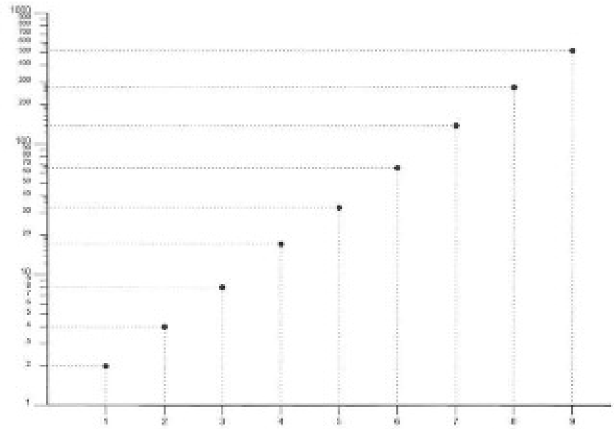
LES APPLICATIONS

Les équations différentielles

Parmi les applications les plus directes nous avons les équations différentielles ; équations qui régissent des phénomènes tels que la propagation de la chaleur, la désintégration radioactive ou l'élimination des produits dans le sang.
La fonction exponentielle est l'unique fonction qui vérifie l'équation différentielle f'=f et f(0)=1.
Plus généralement, la famille de fonctions exponentielles $f(x) = Ce^{ax}$ représente l'ensemble des solutions de l'équation du premier ordre f'=af où a est une constante et f la fonction inconnue recherchée.
Prenons l'exemple de la désintégration radioactive. La ***radioactivité*** est un

phénomène au cours duquel un noyau instable peut dégager de l'énergie – sous forme de rayon alpha, bêta ou gamma auxquels nous ne nous intéresserons pas ici – pour atteindre un état plus stable. La loi qui régit cette désintégration est donnée ci-après :
$dN(t)/dt = -\lambda N(t)$
où N(t) représente le nombre de noyaux radioactifs, nombre qui diminue au cours du temps.
Ici N(t) est notre fonction y, celle dont on recherche l'expression.
La solution de l'équation est $N(t) = N_0e^{-\lambda t}$, en notant N_0 la valeur de N à l'instant t = 0.
L'exponentielle modélise le nombre de noyaux radioactifs qu'il reste à tout instant dans une entité chimique. Cette valeur est en décroissance plus ou moins rapide selon les espèces chimiques.
La décroissance exponentielle, étudiée ici dans le cas particulier de la désintégration radioactive, mais de façon plus générale la décroissance exponentielle, en physique, est caractéristique des phénomènes sans vieillissement, c'est-à-dire qui se produisent avec une égale probabilité quelle qu'ait été leur durée de vie.
Une quantité est dite sujette à une décroissance exponentielle si elle diminue à un taux proportionnel à sa valeur.
Nous avons ici étudié un phénomène de décroissance mais il en va de même pour les phénomènes de croissance.
On peut modéliser des problèmes de la vie réelle grâce aux fonctions exponentielles.

Exemple d'échelle logarithmique :
représentation de la suite 2n dans un repère semi logarithmique

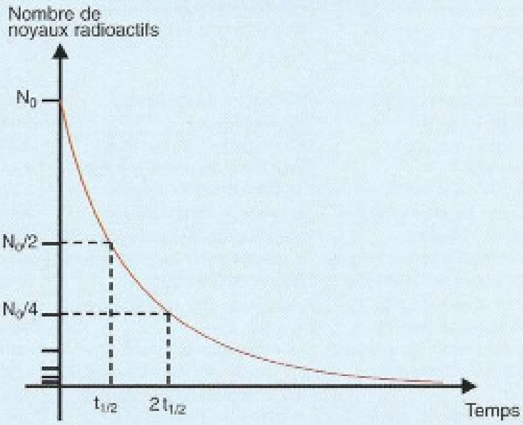


n	2^n
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512

Croissance exponentielle

En mathématique, en économie et en biologie on parle d'un phénomène à croissance exponentielle (ou géométrique) lorsque le taux de croissance d'une population est constant. La population en question peut être une population humaine, bactériologique ou numérique. Ainsi dans le cas du calcul d'intérêts, la population en croissance est la somme à rembourser.
On exprime souvent cette croissance en pourcentage. Une croissance de 5 % par an signifie que la population est multipliée par 1,05 chaque année.
Considérons la population française en 1950. Supposons qu'elle était de 20 millions d'habitant et qu'elle croissait de 5 % par an (on prendra ce taux de croissance par soucis de simplification mais il faut savoir que le taux de croissance annuelle actuel est de 0,58 %). D'après le modèle simplifié que nous avons choisi il y avait en 1951 (20+20*0,05) = 20*1,05 = 21 millions d'habitants en France. En 1952 il y en avait 21*1,05 = 20*1,05*1,05 = $20*1,05^2$ = 22,05 millions. Et en 1953 22,05*1,05=21*1,05*1,05=20*1,05*1,05*1,05=$20*1,05^3$=23,15 millions.
En itérant ce raisonnement on peut facilement extrapoler qu'au bout de n année, la population française sera de 20*1,05n millions. Ainsi en 2008, 58 années plus tard la population serait de $20*1,05^{58}$ = 339 millions. Or la population actuelle est de l'ordre de 60 millions et les chiffres que nous avons utilisés dans l'exemple sont erronés.
On peut généraliser ce raisonnement à n'importe quelle population en croissance à taux fixe. Si on appelle P_0 la population de départ, P_n la population au bout de n années et t le facteur multiplicatif (typiquement 1+taux de croissance en pourcent/100), la population au bout de n années sera égale à $P_n = P_0.t^n$
Si on ne prend des mesures qu'à intervalle régulier, la croissance exponentielle s'exprime sous forme d'une suite géométrique. Mais lorsqu'on essaie de prédire le comportement entre deux mesures consécutives il nous faut faire appel à une fonction exponentielle :
$f(t) = P_0.t^x$
Ainsi on parle d'une croissance exponentielle quand une population grandit de plus en plus vite vers $+\infty$ à taux fixe.
Jusqu'à présent nous avons surtout étudié les applications liées aux fonctions exponentielles. Les fonctions logarithmiques quant à elles sont surtout célèbres pour l'échelle qui porte leur nom : l'échelle logarithmique.

Exemple de décroissance exponentielle : la décroissance radioactive



L'échelle logarithmique

Vous avez sans doute déjà rencontré cette échelle en chimie pour mesurer les pH. Il est donné par la relation ci-dessous où $[H_3O^+]$ est la concentration en ions H_3O^+ :
$pH = -\log[H_3O^+]$ (logarithme en base 10)
De manière plus générale l'échelle logarithmique est utilisée comme alternative à l'échelle linéaire lorsqu'on étudie des phénomènes utilisant une gamme étendue de valeurs. En effet l'échelle logarithmique espace les valeurs faibles et rapproche les valeurs fortes, ce qui permet une lecture plus aisée et un graphique plus compact que l'échelle linéaire traditionnelle.
Cette échelle se présente comme suit : L'axe est gradué à intervalle régulier comme pour une échelle linéaire mais les valeurs correspondantes sont 0,1, 1, 10, 100, 1000, 10 000 et ainsi de suite.

Exemple d'échelle logarithmique

On a déjà mentionné l'utilisation de cette échelle pour mesurer l'acidité des solutions avec le pH mais elle est aussi utilisée lorsqu'on travaille avec des fréquences sonores. L'oreille humaine peut détecter des sons entre 20 et 20 000 Hz. Cette différence est assez importante si on veut avoir toutes les valeurs sur une même échelle. C'est pourquoi on utilise communément l'échelle logarithmique plus commode. Cette échelle est encore utilisée pour exprimer la magnitude d'un ***séisme***.

Dans la célèbre échelle de Richter une valeur est attribuée à la force du séisme : 3 pour des secousses ressenties par quelques personnes, 6 quand la plupart des gens paniquent et ainsi jusqu'à 9. Ce chiffre correspond au logarithme de l'amplitude des ondes de volume à 100 kilomètres de l'épicentre. Ainsi, si A représente l'amplitude maximale des ondes relevée par le sismographe et A_0 une amplitude de référence, la mesure de la magnitude du séisme est donnée par $\log A - \log A_0$
Cette formule peut se comprendre simplement : ce système de classification des séismes signifie que les ondes sismiques d'un séisme de magnitude 7 ont une amplitude dix fois plus grande que celles d'un séisme de magnitude 6.