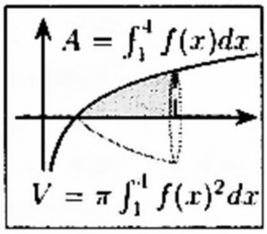
# Exponentielles et logarithmes




Les logarithmes ont été découverts par Neper (1550-1617) alors qu'il cherchait à simplifier les calculs trigonométriques nécessaires à l'astronomie. Le lien avec les fonctions exponentielles a été établi plus tard, après le travail de Leibniz (1646-1716) qui s'est disputé la paternité du calcul intégral avec Newton (1642-1727).

## 7.1. Exponentielles

Une *fonction exponentielle* est définie par

$$\exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow ]0; \infty[, \; x \longmapsto a^x$$

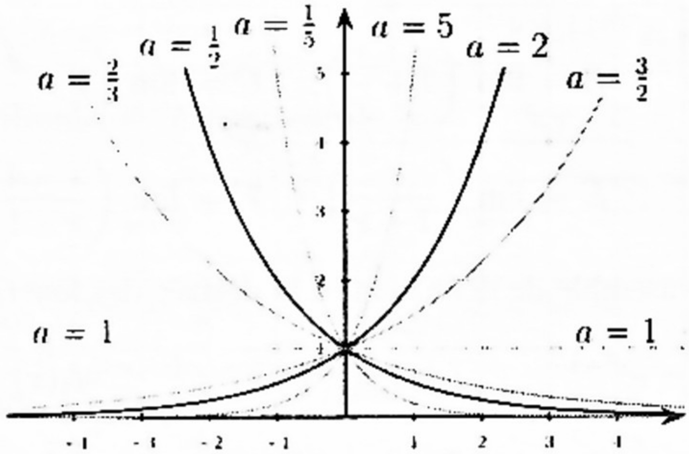
où $a$ est un nombre strictement positif appelé *base* (on exclut $a \leqslant 0$ car $a^x$ ne serait alors pas définie pour de nombreuses valeurs de $x$). On connaît déjà les propriétés suivantes :

| | | | |
|---|---|---|---|
| exposants entiers positifs : $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ facteurs}}$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ | | | |
| $a^0 = 1$ | $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ | $a^{x-y} = a^x / a^y$ | $a^{x \cdot y} = (a^x)^y$ |
| exposants rationnels : $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ est le nombre positif dont la $n$-ième puissance vaut $a^m$ | | | |

Lorsque $x \notin \mathbb{Q}$, on définit $\exp_a(x) = a^x$ de la manière suivante : on considère une suite de nombres rationnels $x_1, x_2, x_3, \ldots$ qui s'approchent de plus en plus de $x$ et on pose $a^x = \lim\limits_{n \to \infty} a^{x_n}$. Par exemple, le nombre $2^\pi$ peut être défini comme la limite de la suite

$$2^3, \quad 2^{31/10}, \quad 2^{314/100}, \quad 2^{3141/1000}, \quad 2^{31415/10000}, \quad \ldots$$

Ce procédé rend logiquement continues les fonctions $\exp_a$, dont voici certains graphes :




Une fonction exponentielle est croissante lorsque $a > 1$ et décroissante lorsque $0 < a < 1$. Les graphes des fonctions $\exp_a$ et $\exp_{1/a}$ sont symétriques par rapport à l'axe des $y$

**Exercice 1 :** *a*) Trouver sans calculatrice les valeurs suivantes :

$$\exp_{11}(2)\ ,\quad \exp_3(3)\ ,\quad \exp_{0.5}(-1)\ ,\quad \exp_2(-2)\ ,\quad \exp_{81}(0.5)\ ,\quad \exp_{1000}(-1/3)$$

*b*) Combien de décimales de $\sqrt{2}$ faut-il considérer pour estimer $3^{\sqrt{2}}$ avec une erreur inférieure à 0.00001 ?

**Exercice 2 :** Mettre sous la forme $a^{m/n}$ les expressions suivantes :

$$A = (a^3)^{-1}(a^{-5})^2a^6 \qquad B = \frac{(a^2)^3}{a^2a^3} \qquad C = \frac{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[2]{a^3}}{a}$$

$$D = \frac{a^2\cdot\sqrt[4]{a}}{a^5\cdot\sqrt{a}} \qquad E = \left(\frac{(a^3)^2}{\sqrt[4]{a^5\cdot a^2}}\right)^2 \qquad F = \frac{\sqrt[4]{a^7}}{\sqrt[7]{a^4}}\sqrt{\frac{a^3}{\sqrt[3]{a}}}$$

La dérivée d'une fonction $\exp_a$ en un point $x \in \mathbb{R}$ est par définition

$$\exp_a'(x) \;=\; \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x} \;=\; a^x \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} \;=\; \exp_a(x)\cdot\exp_a'(0)$$

Le nombre $\exp_a'(0)$ ne dépend que de $a$ : par exemple, on peut estimer $\exp_2'(0) \cong 0.7$ et $\exp_3'(0) \cong 1.1$. Par soucis de simplification, on veut trouver la valeur de $a$ pour laquelle $\exp_a'(0) = 1$. Ainsi, pour $\Delta x$ très proche de zéro, on aimerait avoir

$$\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} \approx 1 \quad\Longleftrightarrow\quad a^{\Delta x} \approx \Delta x + 1 \quad\Longleftrightarrow\quad a \approx (1+\Delta x)^{1/\Delta x}$$

On est alors amené à considérer $a = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(1+\Delta x)^{1/\Delta x} = \lim\limits_{z\to\pm\infty}(1+\frac{1}{z})^z$ : il s'agit du *nombre d'Euler* (1707-1783).

| | |
|---|---|
| $e = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x \cong 2.718281828459 \quad (\in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ | $(e^x)' = e^x$ |

La fonction $\exp(x) = e^x$ est la plus facile à dériver puisque $\exp'(x) = \exp(x)$.

**Exercice 3 :** Calculer les limites suivantes :

$$A = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+5} \quad B = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x} \quad C = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$$

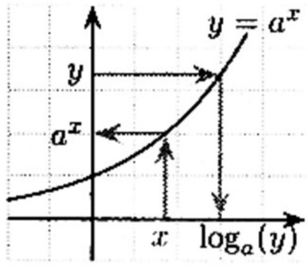
$$D = \lim_{x\to 0}(1-4x)^{1/x} \qquad E = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x \qquad F = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-4}{x-1}\right)^{x+1}$$

**Exercice 4 :** Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = e^{5x} \qquad f_2(x) = e^{x^2+3} \qquad f_3(x) = x^2e^x \qquad f_4(x) = e^{\sin(x)}$$

$$f_5(x) = e^{2/x} \qquad f_6(x) = \frac{e^{3x}}{x^2} \qquad f_7(x) = e^{-x}\cos(x) \qquad f_8(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{x-1}}$$

## 7.2. Logarithmes




La fonction $\exp_1$ est constante mais pour une base $a \neq 1$, l'exponentielle $\exp_a : \mathbb{R} \to ]0;\infty[$ est bijective. Cela signifie que pour tout $y > 0$, il existe un unique nombre $x \in \mathbb{R}$ tel que $a^x = y$. Ce nombre est noté $\log_a(y)$ et est appelé le *logarithme de $y$ en base $a$*. C'est la puissance à laquelle il faut élever $a$ pour obtenir $y$.

**Exercice 5 :** Calculer mentalement (par convention, on note "log" au lieu de "$\log_{10}$")

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\log_5(1)$ | $\log(1000)$ | $\log(0.0001)$ | $\log_2(8)$ | $\log_2(64)$ |
| $\log_2(1024)$ | $\log_3\left(\frac{1}{3^{17}}\right)$ | $\log_9(729)$ | $\log_3(729)$ | $\log_3(\sqrt[4]{27})$ |

Lorsque la base du logarithme est égale au nombre d'Euler, on écrit $\ln(x)$ (au lieu de $\log_e(x)$), et on parle de logarithme *naturel* ou *néperien* (de John Neper (1550-1617)).

Pour un nombre $a \neq 1$ strictement positif, on peut ainsi définir une fonction

$$\log_a : ]0,\infty[ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \log_a(x)$$

dont les propriétés découlent de celles des exponentielles :

| | |
|---|---|
| $\log_a(x)$ est la puissance à laquelle il faut élever $a$ pour obtenir $x$<br>$a^{\log_a(x)} = x \quad$ et $\quad \log_a(a^y) = y$ | |
| $\exp_a(0) = 1$ | $\log_a(1) = 0$ |
| $\exp_a(x+y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y)$ | $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$ |
| $\exp_a(x-y) = \dfrac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)}$ | $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$ |
| $\exp_a(x \cdot y) = \exp_a(x)^y$ | $\log_a(x^y) = y\log_a(x)$ |
| Formule de changement de base : $\quad \log_a(x) = \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$ | |

**Preuves**

1. $\log_a(x \cdot y) = \log_a(a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)}) = \log_a(a^{\log_a(x)+\log_a(y)}) = \log_a(x) + \log_a(y)$
2. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a\left(\dfrac{a^{\log_a(x)}}{a^{\log_a(y)}}\right) = \log_a(a^{\log_a(x)-\log_a(y)}) = \log_a(x) - \log_a(y)$
3. $\log_a(x^y) = \log_a\left((a^{\log_a(x)})^y\right) = \log_a\left(a^{\log_a(x)\cdot y}\right) = \log_a\left(a^{y\log_a(x)}\right) = y\log_a(x)$
4. $\log_b(x) = \log_b(a^{\log_a(x)}) \overset{3.}{=} \log_a(x)\log_b(a)$, donc $\log_a(x) = \log_b(x)/\log_b(a)$.

**Exercice 6 :** Donner une approximation à trois décimales des nombres suivants.

$$A = \log_5(6) \qquad B = \log_2(20) \qquad C = \log_7(0,2) \qquad D = \log_\pi(10) \qquad E = \log_{17}(1245)$$

**Exercice 7 :** Ecrire les expressions suivantes sous la forme $a\ln(x) + b\ln(y)$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$.

$$A = \ln(x^2y^3) \qquad B = \ln(xy^2\sqrt{y}) \qquad C = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^3y^2}}\right) \qquad D = \ln\left(\frac{x^7y^4}{\sqrt[5]{x^2}\ \sqrt[3]{y}}\right)$$

**Exercice 8 :** Ecrire les expressions suivantes à l'aide d'un seul logarithme.

$$A = 5\ln(x) - \ln(5x) - \tfrac{1}{2}\ln(x^4) \qquad B = \ln(y^3) + \tfrac{1}{3}\ln(x^3y^6) - 5\ln(y)$$

$$C = 2\ln(y^3/x) - 3\ln(y) + \tfrac{1}{2}\ln(x^4y^2) \qquad D = \ln(x^3y^2) - 2\ln(x\sqrt{y}) - 3\ln(x/y)$$

$$E = 2\ln(x) - 4\ln(1/y) - 3\ln(xy) \qquad F = \log_2(3)\log_3(4)\log_4(5)$$

**Exercice 9 :** Déterminer le nombre de chiffres et les quatre premiers chiffres de

$A = 7^{1234}$ $\qquad B = 13^{1746}$ $\qquad C = 2^{6972593} - 1$ (nombre premier découvert en 1999)

**Exercice 10 :** Résoudre les équations suivantes

$a)$ $7^{2x+3} = 7^{x^2}$ $\qquad b)$ $3^{5x-8} = 9^{x+2}$ $\qquad c)$ $(0.5)^{6-x} = 2^3$ $\qquad d)$ $\log_x(64) = 3$

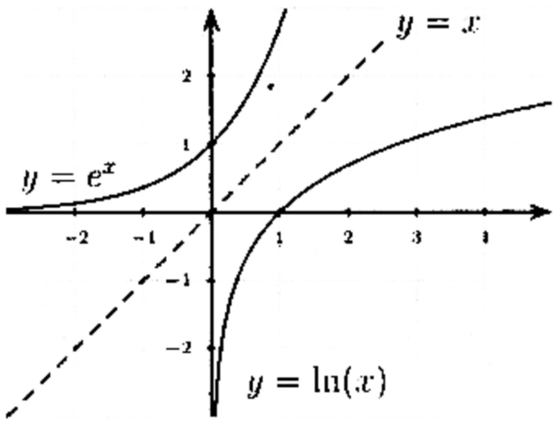
$e)$ $\log_x(1) = 0$ $\qquad f)$ $\log_4(x) = -3$ $\qquad g)$ $\ln(x+1) + \ln(x+5) = \ln(96)$

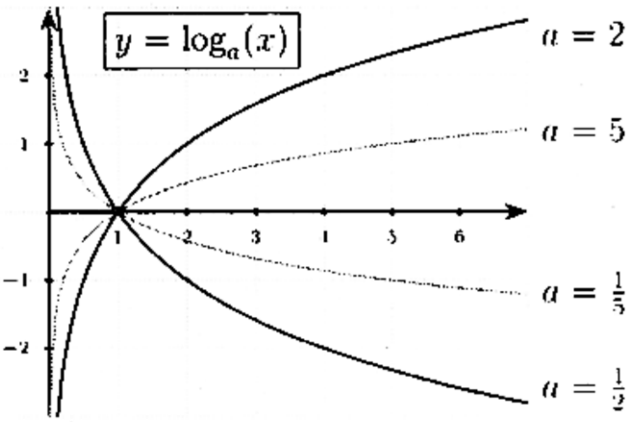
$h)$ $\log(8x-6) - \log(x-4) = 1$ $\qquad i)$ $\log(3x+1) = 3$ $\qquad j)$ $2^x3^{2x} = 100$

$k)$ $\log|3x-4| = 2\log(3)$ $\qquad l)$ $e^{2x} + e^x - 6 = 0$ $\qquad m)$ $8e^x + e^{-x} = 6$

$n)$ $\ln|x+4| + \ln(3) = \ln|x-2|$ $\qquad o)$ $(\ln x)^2 - 2\ln(x) = 3$

La fonction $\log_a$ est la fonction réciproque de $\exp_a$. Son graphe est donc obtenu à partir de celui de $\exp_a$ par une symétrie d'axe $y = x$ :




Une fonction logarithmique est croissante lorsque $a > 1$ et décroissante si $0 < a < 1$. Les graphes des fonctions $\log_a$ et $\log_{1/a}$ sont symétriques par rapport à l'axe des $x$.

En utilisant la règle de dérivation des fonctions composées, nous sommes en mesure de trouver la dérivée de plusieurs types de fonctions :

- logarithme naturel : en dérivant la relation $e^{\ln(x)} = x$, on trouve

$$e^{\ln(x)} \cdot (\ln(x))' = 1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad x \cdot (\ln(x))' = 1 \quad \text{donc} \quad (\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

- logarithme de base $a$ quelconque ($0 < a \neq 1$) :

$$(\log_a(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)' = \frac{(\ln(x))'}{\ln(a)} = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$$

- exponentielle de base $a$ quelconque ($a > 0$) :

$$(a^x)' = (e^{x\ln(a)})' = e^{x\ln(a)} \cdot (x\ln(a))' = e^{x\ln(a)} \cdot \ln(a) = \ln(a) \cdot a^x$$

- puissance d'exposant $r$ quelconque ($r \in \mathbb{R}$) :

$$(x^r)' = (e^{r\ln(x)})' = e^{r\ln(x)} \cdot (r\ln(x))' = e^{r\ln(x)} \cdot \frac{r}{x} = \frac{r}{x} \cdot x^r = rx^{r-1}$$

Résumons les nouvelles dérivées découvertes dans ce chapitre :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(e^x)' = e^x$ | $(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x$ | $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ | $(\log_a(x))' = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$ |

...sans oublier la règle $(x^r)' = rx^{r-1}$ qui était déjà connue !

**Exercice 11 :** Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions suivantes :

$f_1(x) = \ln(x-1)$ $\quad f_2(x) = \ln(3x^5)$ $\quad f_3(x) = x\ln(x) - x$ $\quad f_4(x) = \ln(\sqrt{3-x^2})$

$f_5(x) = \ln|\cos x|$ $\quad f_6(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$ $\quad f_7(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$ $\quad f_8(x) = \ln\left(\dfrac{x^2}{1-x}\right)$

**Exercice 12 :** Traiter les problèmes suivants qui nécessitent tous la dérivée.

a) Déterminer la tangente à la courbe $y = (e^{2x} - 3)^3$ en son point d'abscisse nulle.

b) Déterminer les points de la courbe $y = e^{2x} - 8e^x + 9x$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite $d : 3x - y - 21 = 0$.

c) Discuter du nombre de points à tangente horizontale de $f(x) = (x^2+a)e^x$ en fonction de la valeur de $a$.

d) Déterminer l'angle aigu formé par les courbes $y = 2e^x$ et $y = xe^x$ à leur intersection. Idem pour les courbes $y = \log_2(x)$ et $y = \log_5(x)$.

e) Montrer que, quels que soient les nombres réels $a$ et $b$, les courbes $y = \sqrt{a-2x}$ et $y = e^{x+b}$ se coupent à angle droit.

## 7.3. Comportements conflictuels

Nous pouvons établir le tableau comparatif suivant :

| Puissances exposant $n \geqslant 1$ | Exponentielles base $a > 1$ | Logarithmes base $a > 1$ |
|---|---|---|
| | (si $0 < a < 1$, les limites ci-dessous sont inversées) | |
| $\lim\limits_{x \to \infty} x^n = \infty$ | $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = \infty$ | $\lim\limits_{x \to \infty} \log_a(x) = \infty$ |
| $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \pm\infty$ | $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ | $\lim\limits_{x \to 0} \log_a(x) = -\infty$ |

Polynômes : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (a_n x^n)$

En cas de limite indéterminée faisant intervenir directement de telles fonctions, on peut considérer les priorités suivantes : "exponentielles $\gg$ polynômes $\gg$ logarithmes".

**Exemples :**

1. Etant donné un entier $n \geqslant 1$, on a $\lim\limits_{x \to \infty} \left( \dfrac{e^x}{x^n} \right) = \lim\limits_{x \to \infty} e^x = \infty$ car l'exponentielle l'emporte sur le polynôme dont l'effet pour $x \longrightarrow \infty$ est négligeable.

   On peut le montrer directement en utilisant le fait que $e^x > x$ :
   $$\frac{e^x}{x^n} = \left( \frac{e^{x/(2n)}}{\sqrt{x}} \right)^{2n} > \left( \frac{x/(2n)}{\sqrt{x}} \right)^{2n} = \left( \frac{\sqrt{x}}{2n} \right)^{2n} = \frac{x^n}{(2n)^{2n}} \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} \infty$$

2. On a $\lim\limits_{x \to \infty} \left( \dfrac{7x^2 - 3x + 2}{2^x} \right) = \lim\limits_{x \to \infty} \left( \dfrac{1}{2^x} \right) = 0$ car l'exponentielle (de base 2) l'emporte sur le polynôme dans la limite initiale du type "$\infty/\infty$".

3. On a $\lim\limits_{x \to \infty} \left( \dfrac{(x^2 + 2x - 7)e^{-2x}}{\ln(2x - 1)} \right) = \lim\limits_{x \to \infty} e^{-2x} = 0$ car l'exponentielle l'emporte sur le polynôme et le logarithme dans la limite indéterminée initiale.

4. On a $\lim\limits_{x \to \infty} \left( \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 7}{3x^3 + 2x - 4} \right) = \lim\limits_{x \to \infty} \left( \dfrac{2x^3}{3x^3} \right) = \lim\limits_{x \to \infty} \left( \dfrac{2}{3} \right) = \dfrac{2}{3}$ car le comportement d'un polynôme lorsque $x \longrightarrow \pm\infty$ est dicté par celui de son monôme dominant.

Exercice 13 : Déterminer les limites suivantes

$$A = \lim_{x \to -\infty} (x^{54} e^x) \qquad B = \lim_{x \to 0} (x \ln x) \qquad C = \lim_{x \to \infty} \frac{(3x^2 - 3x + 4)^3}{(2x^3 + x^2 - 5)^2}$$

$$D = \lim_{x \to \infty} \frac{x^{500} \ln(x)}{2^x} \qquad E = \lim_{x \to \infty} \frac{2e^x - 4}{3e^x + 5} \qquad F = \lim_{x \to -\infty} \frac{(3x + 4)^5}{(x^2 + 7x + 41)^2}$$

**Exercice 14 :** Etudier les fonctions suivantes .

$$f_1(x) = 2xe^{-x} \qquad f_2(x) = (x-2)^2 e^x \qquad f_3(x) = x^2 \ln(1/x) \qquad f_4(x) = \ln(x^2+4)$$

**Exercice 15 :** Le radium se désintègre selon la loi $N(t) = N_0 \cdot 2^{-t/1600}$ . si on considère une quantité $N_0$ de radium pur, alors $t$ années plus tard il en restera une quantité $N(t)$.

1. Combien restera-t-il de radium dans 100 ans s'il y en a 50 mg maintenant ?
2. Quand restera-t-il 20 mg de radium s'il y en a 50 mg au début ?
3. Quelle est la demi-vie du radium (= temps durant lequel la moitié des atomes initialement présents se désintègre) ?

**Exercice 16 :** Le carbone-14 se désintègre selon une loi $N(t) = N_0 \cdot 2^{ct}$ et sa demi-vie est d'environs 5'700 ans. Des archéologues ont trouvé un os qui contient 20% de la quantité de carbone-14 contenue dans un os actuel. Quel est l'âge de cet os ?

# Solutions des exercices

**Exercice 1 :** *a)* $11^2 = 121$. $3^3 = 27$, $(0.5)^{-1} = 2$, $2^{-2} = 0.25$, $81^{0.5} = 9$, $1000^{-1/3} = 0.1$ *b)* il suffit de prendre $n = 6$ ($a_6 = 1.414213$)

**Exercice 2 :** $A = a^{-7}$, $B = a$, $C = a^{7/6}$, $D = a^{-13/4}$, $E = a^{17/2}$, $F = a^{211/84}$

**Exercice 3 :** $A = e$, $B = e^3$, $C = e^2$, $D = e^{-4}$, $E = e^{-1}$, $F = e^{-3}$

**Exercice 4 :**

1) $D = \mathbb{R}$, $f_1'(x) = 5e^{5x}$

2) $D = \mathbb{R}$, $f_2'(x) = 2xe^{x^2+3}$

3) $D = \mathbb{R}$, $f_3'(x) = (x^2 + 2x)e^x$

4) $D = \mathbb{R}$, $f_4'(x) = \cos(x)e^{\sin x}$

5) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f_5'(x) = \dfrac{-2}{x^2}e^{2/x}$

6) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f_6'(x) = \dfrac{e^{3x}(3x-2)}{x^3}$

7) $D = \mathbb{R}$, $f_7'(x) = -e^{-x}(\cos x + \sin x)$

8) $D = ]1; \infty[$, $f_8'(x) = \dfrac{e^{2x}(4x-5)}{2\sqrt{(x-1)^3}}$

**Exercice 5 :** $\log_5(1) = 0$, $\log(1000) = 3$, $\log(10^{-4}) = -4$, $\log_2(8) = 3$, $\log_2(64) = 6$, $\log_2(1024) = 10$, $\log_3(3^{-17}) = -17$, $\log_9(729) = 3$, $\log_3(729) = 6$, $\log_3(\sqrt[4]{3^3}) = 3/4$

**Exercice 6 :** $A \cong 1,113$ $B \cong 4,322$ $C \cong -0,827$ $D \cong 2,011$ $E \cong 2,515$

**Exercice 7 :** $A = 2\ln(x) + 3\ln(y)$, $B = \ln(x) + \frac{5}{2}\ln(y)$, $C = -\frac{3}{2}\ln(x) - 2\ln(y)$, $D = \frac{33}{5}\ln(x) + \frac{11}{3}\ln(y)$

**Exercice 8 :** $A = \ln(x^2/5)$ $B = \ln(x)$ $C = \ln(y^4)$ $D = \ln(y^4/x^2)$ $E = \ln(y/x)$ $F = \log_2(5)$

**Exercice 9 :** On utilise la relation $a^b = (10^{\log(a)})^b = 10^{b\log(a)}$.

$$7^{1234} = 10^{1234\log(7)} = 10^{1042.85098\ldots} = 10^{1042}10^{0.85098\ldots} = 10^{1042}\cdot 7.09547\ldots = \underbrace{7095\ldots}_{1043 \text{ chiffres}}$$

$$13^{1746} = 10^{1746\log(13)} = 10^{1944.94509} = 10^{1944}10^{0.94509} = 10^{1944}\cdot 8.81237\ldots = \underbrace{8812\ldots}_{1945 \text{ chiffres}}$$

$$2^{6'972'593} - 1 = 10^{6'972'593\log(2)} - 1 = 10^{2'098'959}10^{0.6405} - 1 = \underbrace{4370\ldots}_{2'098'960 \text{ chiffres}} - 1$$

Dans ce dernier cas, le "$-1$" ne va influencer ni le nombre de chiffres ni les premiers chiffres.

**Exercice 10 :**

*a)* $7^{2x+3} = 7^{x^2} \Leftrightarrow 2x + 3 = x^2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -1$

*b)* $3^{5x-8} = (3^2)^{x+2} \Leftrightarrow 3^{5x-8} = 3^{2x+4} \Leftrightarrow 5x - 8 = 2x + 4 \Leftrightarrow 3x = 12 \Leftrightarrow x = 4$

*c)* $(2^{-1})^{6-x} = 2^3 \Leftrightarrow 2^{-6+x} = 2^3 \Leftrightarrow -6 + x = 3 \Leftrightarrow x = 9$

*d)* $\log_x(64) = 3 \Leftrightarrow 64 = x^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{64} = 4$

$e)$ $\log_x(1) = 0$ vrai pour n'importe quelle base de logarithme : $0 < x \neq 1$

$f)$ $\log_4(x) = -3 \Leftrightarrow x = 4^{-3} = 1/64$

$g)$ $\ln\big((x+1)(x+5)\big) = \ln(96) \Leftrightarrow (x+1)(x+5) = 96 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x = 7$ ou $x = -13$ mais le cas $x = -13$ est à exclure (solution parasite)!

$h)$ $\log\big((8x-6)/(x-4)\big) = 1 \Leftrightarrow (8x-6)/(x-4) = 10 \Leftrightarrow 8x-6 = 10x-40 \Leftrightarrow x = 17$

$i)$ $\log(3x+1) = 3 \Leftrightarrow 3x+1 = 1000 \Leftrightarrow x = 333$

$j)$ $2^x(3^2)^x = 100 \Leftrightarrow 18^x = 100 \Leftrightarrow x = \log_{18}(100) = \dfrac{\log(100)}{\log(18)} = \dfrac{2}{\log(18)} \cong 1.59$

$k)$ $\log|3x-4| = \log(3^2) \Leftrightarrow |3x-4| = 9 \Leftrightarrow 3x-4 = \pm 9 \Leftrightarrow x = 13/3$ ou $x = -5/3$

Les deux dernières équations font appel à la formule de Viète avec $e^x$ comme inconnue :

$l)$ $(e^x)^2 + (e^x) - 6 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2$ ou $e^x = -3 \Leftrightarrow x = \ln(2)$

$m)$ $8e^x + e^{-x} = 6 \Leftrightarrow 8e^{2x} + 1 = 6e^x \Leftrightarrow 8(e^x)^2 - 6(e^x) + 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 0.5$ ou $e^x = 0.25 \Leftrightarrow x = \ln(0.5) = -\ln(2)$ ou $x = \ln(0.25) = -\ln(4)$

**Exercice 11 :**

1) $D = ]1;\infty[$, $f_1'(x) = \dfrac{1}{x-1}$

2) $D = ]0;\infty[$, $f_2'(x) = \dfrac{5}{x}$

3) $D = ]0;\infty[$, $f_3'(x) = \ln(x)$

4) $D = ]-\sqrt{3};\sqrt{3}\,[$, $f_4'(x) = \dfrac{x}{x^2-3}$

5) voir ci-dessous

6) $D = ]0;\infty[\ \setminus\{1\}$, $f_6'(x) = \dfrac{\ln(x)-1}{(\ln x)^2}$

7) $D = ]0;\infty[\ \setminus\{1\}$, $f_7'(x) = \dfrac{-(\ln x + 1)}{(x\ln(x))^2}$

8) $D = ]-\infty;1[\ \setminus\{0\}$, $f_8'(x) = \dfrac{2-x}{x(1-x)}$

5) le domaine de définition de $f_5$ est $D = \mathbb{R}\setminus\{x : \cos x = 0\} = \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Pour dériver cette fonction, il faut se rappeler que $(|x|)' = \text{sign}(x) = |x|/x$ (pour $x \neq 0$) :

$$\begin{aligned} f_5'(x) &= \frac{1}{|\cos x|}\cdot(|\cos x|)' = \frac{1}{|\cos x|}\cdot\text{sign}(\cos x)\cdot(\cos x)' \\ &= \frac{1}{|\cos x|}\cdot\frac{|\cos x|}{\cos x}\cdot(-\sin x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan(x) \end{aligned}$$

De manière générale, on peut remarquer que des fonctions $\ln(f(x))$ et $\ln|f(x)|$ (avec la valeur absolue!) ont des dérivées identiques, mais pas forcément les mêmes domaines de définition.

**Exercice 12 :** $a)$ $f'(x) = 6e^{2x}(e^{2x}-3)^2$, $f'(0) = 24$, tangente $y = 24x - 8$

$b)$ La droite admet une pente $m = 3$ et on cherche les valeurs de $x$ pour lesquelles $f'(x) = 2e^{2x} - 8e^x + 9$ vaut 3. On aboutit à l'équation $(e^x)^2 - 4(e^x) + 3 = 0$ dont les solutions sont $e^x = 3$ et $e^x = 1$. On déduit ainsi $x = \ln(3)$ et $x = \ln(1) = 0$. Les points d'intersection sont $I_1(0;-7)$ et $I_2(\ln(3); 9\ln(3) - 15)$.

$c)$ La dérivée $f'(x) = e^x(x^2 + 2x + a)$ s'annule selon le signe du discriminant $\Delta(1;2;a) = 4(1-a)$ : on a un point à tangente horizontale si $a = 1$ (il s'agit en l'occurence d'un palier ascendant en $x = -1$), deux "pth" si $a < 1$ et aucun "pth" si $a > 1$.

*d*) $\sim 1,288°$ (en $x = 2$) / $\sim 23,42°$ (en $x = 1$)

*e*) Pour toute valeur $x$ vérifiant $\sqrt{a-2x} = e^{x+b}$, on a

$$(\sqrt{a-2x})'(e^{x+b})' = \frac{-2}{2\sqrt{a-2x}} \cdot e^{x+b} = -\frac{e^{x+b}}{\sqrt{a-2x}} = -1.$$

**Exercice 13 :** $A = 0$. $B = 0$. $C = 27/4$, $D = 0$, $E = 2/3$. $F = -\infty$

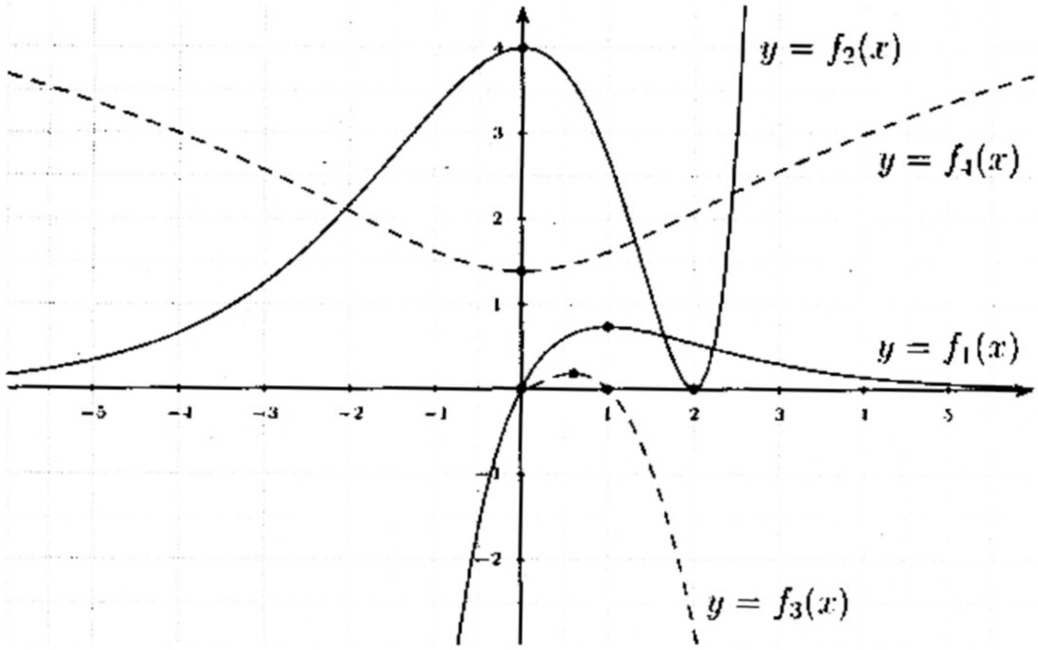
**Exercice 14 :**

$f_1$ : $D = \mathbb{R}$, $I_x(0;0)$, $I_y(0;0)$, $\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f_1(x) = 0$, $f_1'(x) = 2(1-x)e^{-x}$ nul pour $x = 1$, maximum en $(1; 2/e)$

$f_2$ : $D = \mathbb{R}$, $I_x(2;0)$, $I_y(0;4)$, $\lim_{x\to-\infty} f_2(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f_2(x) = \infty$, $f_2'(x) = x(x-2)e^x$ nul pour $x = 0$ et $x = 2$, maximum en $(0;4)$, minimum en $(2;0)$

$f_3$ : on peut remarquer que $f_3(x) = x^2(\ln(1) - \ln(x)) = -x^2\ln(x)$. $D = ]0,\infty[$. $I_x(1,0)$, $I_y$ inexistant, $\lim_{x\searrow 0} f_3(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f_3(x) = -\infty$, $f_3'(x) = -x(2\ln x + 1)$ nul pour $x = 0$ et $x = e^{-0.5}$, maximum en $(e^{-0.5}; \sim 0.184)$

$f_4$ : $D = \mathbb{R}$, $I_x$ inexistant, $I_y(0; \ln 4)$, fonction paire ($f(-x) = f(x)$) donc le graphe est symétrique par rapport à l'axe vertical, $\lim_{x\to\pm\infty} f_4(x) = \infty$, $f_4'(x) = 2x/(x^2+4)$ nul pour $x = 0$, minimum en $(0; \ln 4)$




**Exercice 15 :** 1. $N(100) = 50 \cdot 2^{-100/1600} \cong 47,88$ mg 2. $N(t) = 50 \cdot 2^{-t/1600}$ vaut 20 lorsque $t = -1600\log_2(0.4) \cong 2'115$ ans 3. $N(t) = 0.5N_0$ lorsque $t = 1600$

**Exercice 16 :** La condition $N(5'700) = \frac{1}{2}N_0$ se réécrit $2^{5'700c} = 2^{-1}$, donc $c = -1/5700$. On en déduit que $N(t) = N_0 2^{-t/5700}$ vaut $0.2N_0$ lorsque $t = -5700\log_2(0.2) \cong 13'235$ ans.