Chapitre 8

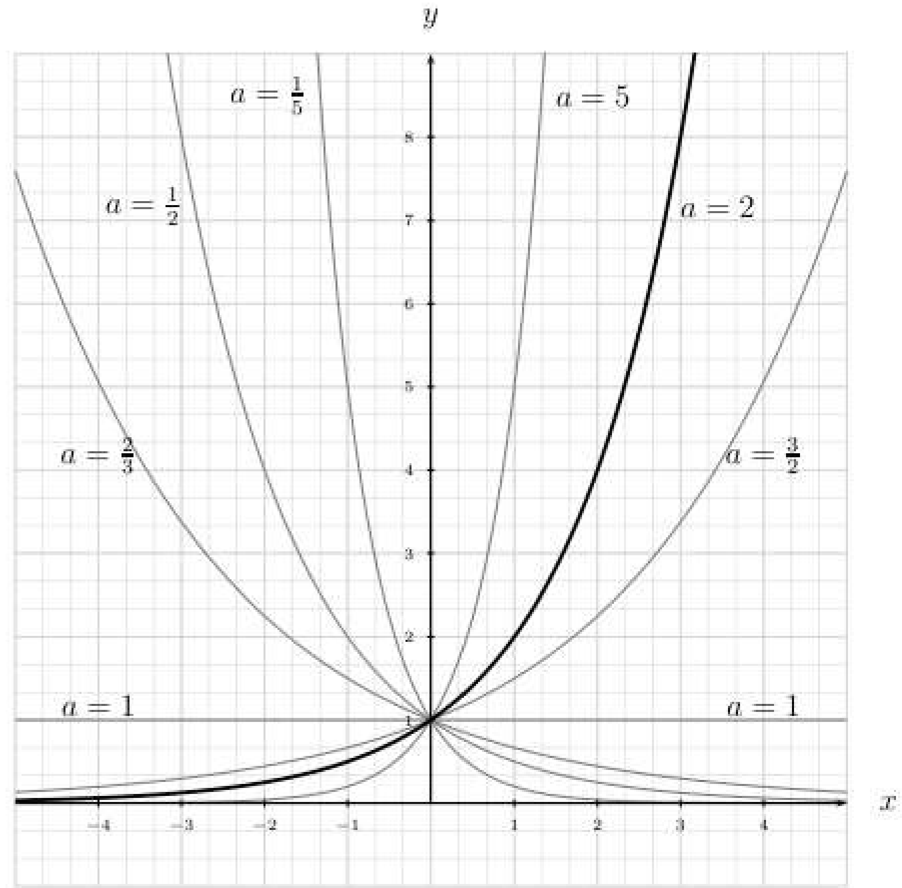
Exponentielles et logarithmes

8.1. Les fonctions exponentielles

Soit a est un nombre strictement positif. Les fonctions exponentielles sont définies par :

$$\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[; \ x \mapsto a^x$$

Voici les graphes de plusieurs *fonctions exponentielles*, dont $\exp_2$ (en gras).



On voit que pour $a > 0$ et $a \neq 1$, la fonction $\exp_a$ est bijective. Par conséquent, elle admet une fonction réciproque, baptisée le *logarithme en base* a et notée $\log_a$. On obtient ainsi une famille de fonctions pour $a > 0$ et $a \neq 1$:

$$\log_a :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}; \ x \mapsto \log_a(x)$$

8.2. Les logarithmes

D'un autre point de vue, le logarithme est juste une façon d'appeler la solution (lorsqu'elle existe) d'une équation en x de la forme suivante.

$$a^x = b$$

Lorsque $a > 0$ et $a \neq 1$, on voit sur le graphe de a^x que cette équation ne possède qu'une seule solution et ceci seulement si $b > 0$ (puisque les exponentielles sont strictement positives), cette solution s'appelle *le logarithme de b en base a* et est notée $\log_a(b)$. Ce nombre est un nombre réel (il peut être négatif, nul ou positif). Dans ce cas, on a

$$\boxed{a^x = b \iff x = \log_a(b)}$$

D'où le *slogan du logarithme* :

$$\boxed{\log_a(b) \text{ est la puissance à laquelle on élève la base } a \text{ pour obtenir le nombre } b}$$

Le slogan livre les formules suivantes pour tout $x \in]0, \infty[$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{a^{\log_a(x)} = x} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\log_a(a^y) = y}$$

Formules

Lorsque les expressions sont bien définies, on a les formules suivantes. Le lecteur remarquera la dualité de ces formules.

Pour les exponentielles		Pour les logarithmes
Ecriture a^x	Ecriture $\exp_a(x)$	
$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$	$\exp_a(x+y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y)$	$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$	$\exp_a(x-y) = \frac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)}$	$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$
$a^{x \cdot y} = (a^x)^y$	$\exp_a(x \cdot y) = (\exp_a(x))^y$	$\log_a(x^y) = y \log_a(x)$
$a^0 = 1$	$\exp_a(0) = 1$	$\log_a(1) = 0$

Formules de changement de base

Soit a et b deux nombres positifs différents de 1. On peut changer les bases des exponentielles et des logarithmes. Lorsque les expressions sont bien définies, on a les formules suivantes.

$$\boxed{\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}} \qquad \boxed{a^x = b^{\log_b(a)\, x}} \text{ car } a = b^{\log_b(a)}$$

La formule de changement de base pour le logarithme est essentielle pour pouvoir calculer, par exemple, $\log_3(2)$ à l'aide la calculatrice.

Pour résoudre les équations avec des exponentielles ou des logarithmes

Lorsqu'on a la même base $a > 0$ et $a \neq 1$, on peut utiliser la propriété suivante pour résoudre des équations.

$$\boxed{a^x = a^y \iff x = y} \qquad \boxed{x = y \iff \log_a(x) = \log_a(y)}$$

En effet, pour les deux encadrés "$\Rightarrow$" s'obtient en appliquant la fonction $\log_a$ à l'équation, tandis que "$\Leftarrow$" s'obtient à l'aide de la fonction $\exp_a$.

Preuve des formules

Pour démontrer les formules on va utiliser la formule $a^{\log_a(x)} = x$ et les formules pour les exponentielles.

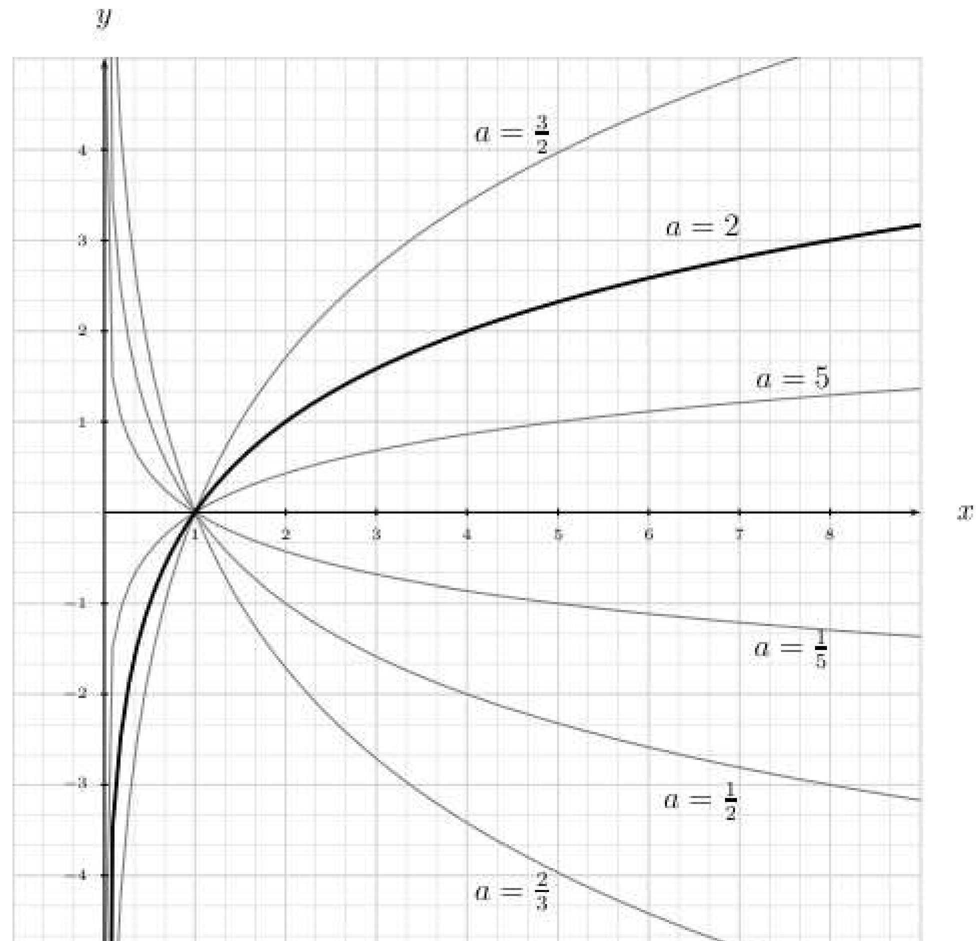
1. $\log_a(x \cdot y) = \log_a(a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)}) = \log_a(a^{\log_a(x)+\log_a(y)}) = \log_a(x) + \log_a(y)$
2. $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a\left(\frac{a^{\log_a(x)}}{a^{\log_a(y)}}\right) = \log_a(a^{\log_a(x)-\log_a(y)}) = \log_a(x) - \log_a(y)$
3. $\log_a(x^y) = \log_a\left((a^{\log_a(x)})^y\right) = \log_a\left(a^{\log_a(x)\cdot y}\right) = \log_a\left(a^{y\log_a(x)}\right) = y\log_a(x)$
4. $\log_b(x) = \log_b(a^{\log_a(x)}) \overset{3.}{=} \log_a(x)\log_b(a)$
   On a donc les formules équivalentes suivantes.
   $$\log_b(a)\log_a(x) = \log_b(x) \quad \text{et} \quad \log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

8.3. Les fonctions logarithmes

Soit a un nombre strictement positif différent de 1. Les fonctions logarithmes sont définies par :

$$\log_a :]0, \infty[\to \mathbb{R}; \; x \mapsto \log_a(x)$$

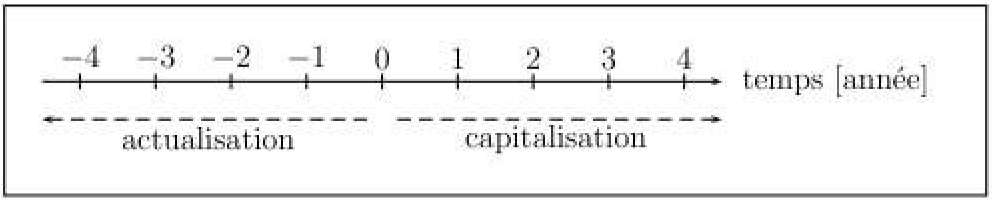
Voici les graphes de plusieurs *fonctions logarithmes*, dont $\log_2$ (en gras).



La fonction $\log_a$ est la fonction réciproque de $\exp_a$. C'est pour cette raison que les graphes sont obtenus à partir de ceux des fonctions exponentielles par une symétrie d'axe $x = y$ (il s'agit de la droite passant par l'origine avec un angle de 45°).

8.4. Application : calculs d'intérêts, actualisation et capitalisation

Toute la difficulté de cette section consiste à bien comprendre comment on peut déplacer un capital dans le temps. Lorsqu'on déplace un capital en direction du futur, on le capitalise. Si on déplace un capital en direction du passé, on l'actualise. Lorsqu'aucune contrainte spécifique n'est précisée, on s'imaginera toujours disposer d'un capital en l'année zéro. Dans ce cas, on peut visualiser l'actualisation et la capitalisation.



8.4.1. Capitalisation

Notons C_n le capital à l'année n et t le *taux d'intérêt (effectif) annuel* (supposé constant).

Intérêts simples

Lorsqu'on capitalise un capital initial C_0 selon la méthode des intérêts simples, on ajoute à C_0 la proportion d'intérêt correspondante.

$$C_n = C_0 + C_0 \cdot t \cdot n \qquad \text{donc} \qquad \boxed{C_n = C_0(1 + t \cdot n)}$$

Cette formule est valable pour tout $n > 0$ (on peut parler de demi-année,...).

Intérêts composés

On calcule les intérêts année par année, en les ajoutant au capital. Ainsi, chaque année, le montant sur lequel les intérêts sont calculés change !

$$\begin{aligned}
&C_1 = C_0 + C_0 \cdot t = C_0(1+t)\\
&C_2 = C_1 + C_1 \cdot t = C_1(1+t) = C_0(1+t)^2\\
&C_3 = C_2 + C_2 \cdot t = C_2(1+t) = C_0(1+t)^3\\
&C_4 = C_3 + C_3 \cdot t = C_3(1+t) = C_0(1+t)^4\\
&\ldots\\
&\boxed{C_n = C_0(1+t)^n}
\end{aligned}$$

On a donc démontré que cette formule est valable lorsque $n \in \mathbb{N}$. Mais, elle est valable pour tout nombre n réel (même si on ne démontrera pas) !

Exemple

On place 1000 CHF à 5% pendant 40 ans.

1. Le capital final après les 40 ans si on applique la méthode des intérêts simples est donné par

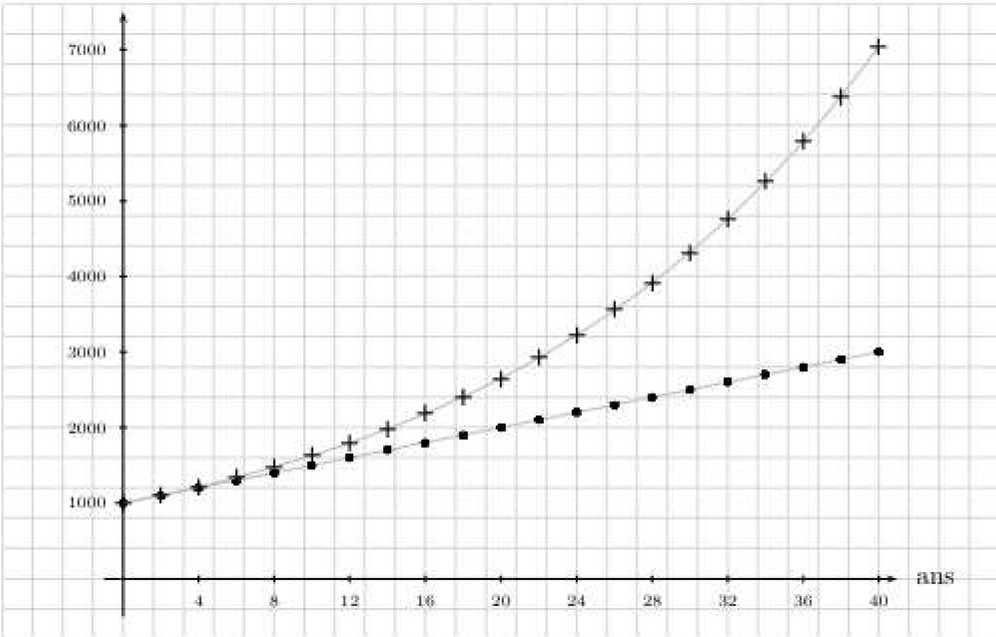
$$C_{40} = C_0(1 + t \cdot 40) = 1000(1 + 0.05 \cdot 40) = 1000 \cdot 3 = 3000 \text{ CHF}$$

2. Le capital final après les 40 ans si on applique la méthode des intérêts composés est donné par

$$C_{40} = C_0(1+t)^{40} = 1000(1+0.05)^{40} \cong 1'000 \cdot 7.03999 \cong 7'040.00 \text{ CHF}$$

Cela fait environ 4'040 CHF de plus qu'avec la méthode des intérêts simples !

3. Si on dessine les capitaux obtenus tous les deux ans pour des intérêts simples et composés (la période de placement reste l'année). On obtient le graphe suivant.



On voit que pour les intérêts simples, la courbe est une droite, tandis que pour les intérêts composés, il s'agit d'une courbe exponentielle !

Taux périodique (ou proportionnel ou relatif)

On peut désirer composer des intérêts m fois dans l'année selon des périodes égales (de longueur $\frac{1}{m}$). Pour cela, on introduit la notion d'un *taux d'intérêt périodique (ou proportionnel ou relatif)*, noté t_m.

Par exemple t_2 correspond à un taux semestriel, t_4 à un un taux trimestriel, t_{12} à un taux mensuel et t_{360} à un taux journalier.

On fixe ce taux de telle manière à ce que la capitalisation revienne au même que si cela avait été sur des périodes d'une année avec le taux d'intérêt (effectif) annuel. En termes mathématiques, en regardant comment on calcule le capital après une année, on trouve la condition suivante qui relie le taux (effectif) annuel avec le taux périodique.

$$C_1 = C_0(1+t) = C_0\,(1+t_m)^m \qquad \text{donc} \qquad \boxed{(1+t) = (1+t_m)^m}$$

$$\iff (1+t)^{\frac{1}{m}} = (1+t_m)$$

Exemple Si le taux d'intérêt annuel est de 3% pour un placement mensuel, alors le taux périodique est de $t_{12} \cong 0.247\%$.

8.4.2. Actualisation

Il s'agit cette fois d'aller dans le passé, en se demandant, par exemple, quel investissement C_0 on doit placer, à un taux d'intérêt annuel t, pour obtenir après n année un capital C_n. Les formules sont les mêmes que pour la capitalisation, si ce n'est que maintenant ce n'est pas C_0 qui est donné, mais C_n !

Exemple Si on souhaite avoir 50'000 CHF dans 20 ans sur un compte en banque à un taux de 2%, on doit placer

$$C_0 = C_{20} \cdot \frac{1}{(1+t)^{20}} = 50'000 \cdot (1+0.02)^{-20} \cong 50'000 \cdot 0.67297 \cong 33'648.60 \text{ CHF}$$

8.4.3. Équivalence de capitaux et échéance moyenne

Définition

Deux capitaux sont dit *équivalents* s'ils sont égaux au même instant.

Exemples

1. Si on suppose que le taux d'intérêt est constant à 5%, alors 1'000 CHF le premier janvier 2007 sont équivalents à 1'050 CHF le premier janvier 2008.

   En effet, une année après les 1'000 CHF sont devenus $1'000 \cdot (1.05)^1 = 1'050$ CHF.

2. Verser 5'000 CHF aujourd'hui sur un compte bancaire d'intérêts constants à 2% est équivalent à avoir versé 4'528.65 CHF il y a 5 ans.

   En effet, on a $5'000 \cdot (1.02)^{-5} \cong 4'528.65$ CHF.

Définition

L'*échéance moyenne* est l'unique date à laquelle plusieurs capitaux échéants à différentes dates sont réglés par un seul paiement équivalent à la somme de tous ces capitaux.

Exemple

Imaginons que l'on ait acheté 2 produits. Le premier a été acheté le premier juin 2006, il coûtait alors 1'500 CHF. Quant au deuxième, il a été commandé et il coûtera 2'500 CHF le jour de sa livraison le premier juin 2007. Pour ces deux achats, on considère que le taux d'intérêts est de 1%.

L'échéance moyenne correspond à la date où la somme des achats, qui vaut 4'000 CHF, sera équivalente au deux paiements. Cette échéance correspond au 16 janvier 2007 (autrement dit 7 mois et 15 jours après le premier juin 2006).

En effet, on commence par déplacer les deux valeurs au premier juin 2006 (on pourrait les déplacer à n'importe quelle date), la valeur totale vaut ainsi :

$$1'500 + 2'500 \cdot (1.01)^{-1} \cong 3975.25$$

Il faut trouver dans combien de temps ces 3975.25 CHF valent $1'500 + 2'500 = 4'000$ CHF.

$$3975.25 \cdot (1.01)^n = 4000 \iff (1.01)^n = \tfrac{4000}{3975.25} \iff n = \log_{1.01}(\tfrac{4000}{3975.25}) \cong 0.6238 \text{ ans}$$

Ainsi $n \cong 0.6238 \cdot 360 \cong 224.6$ jours, ce qui fait environ 7 mois et 15 jours.

8.5. Le nombre d'Euler

On examine ce que rapporte plusieurs placements de 1 CHF à des rendements différents.

1. Le premier placement est à 100% sur une période d'une année.
2. Le deuxième placement est à un taux périodique de $\frac{100}{2}\%$ sur une période de 6 mois.
3. Le troisième placement est à un taux périodique de $\frac{100}{3}\%$ sur une période de 4 mois.
4. Le quatrième placement est à un taux périodique de $\frac{100}{4}\%$ sur une période de 3 mois.

...

n. Le n-ième placement est à un taux périodique de $\frac{100}{n}\%$ sur une période de $\frac{1}{n}$ année.

...

En se référant à la page précédente, on remarque que les taux annuels associés ne sont pas tous de 100%. En fait, seul le premier placement est à un tel taux. Quant au deuxième, il correspond à un taux annuel de 125%. Le troisième placement correspond à un taux d'environ 137% et ainsi de suite.

Notons c_n (avec minuscule) le capital récupéré, pour le n-ième placement, après une année. En capitalisant en utilisant le taux périodique, on trouve la formule suivante

$$c_n = \left(1 + \tfrac{100}{n}\%\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Voici un tableau présentant quelques valeurs de c_n.

n	1	2	3	4	5	10	25
c_n	2.000	2.250	2.370	2.441	2.488	2.594	2.666
n	50	100	500	1000	2000	4000	8000
c_n	2.692	2.705	2.716	2.717	2.718	2.718	2.718

On remarque que lorsque n devient grand, le nombre c_n a tendance à se rapprocher d'un certain nombre. Le premier à avoir pressenti l'existence de ce nombre mystérieux est l'Écossais John Napier (1550-1617), qui inventa les logarithmes (d'où le logarithme népérien après que son nom soit francisé en Néper). Malgré cela, ce nombre est appelé *nombre d'Euler*, d'après un mathématicien suisse du 18e siècle : Leonhard Euler (1707-1783). Le nombre d'Euler est défini par la limite

$$\boxed{e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cong 2.71828}$$

Le nombre e est irrationnel. Cela signifie qu'il ne peut pas s'écrire comme une fraction et qu'il n'y a aucune période dans son écriture décimale.

Les premières décimales du nombre e sont 2.7182818284590452.

En novembre 1999, le mathématicien Xavier Gourdon a établi un record (pour l'époque) en calculant ses 1'250'000'000 premières décimales.