Chapitre 5

Factorisation de polynômes

5.1 Polynômes de degré n

Soit n un nombre naturel. Un *polynôme p en x de degré n* est une somme de la forme

$$p(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \cdots + p_2 x^2 + p_1 x + p_0 \quad \text{avec} \quad p_k \in \mathbb{R} \text{ et } p_n \neq 0$$

Les nombres réels p_k ($k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$) sont les *coefficients* du polynôme. Le nombre réel p_n est le *coefficient dominant* du polynôme et le nombre p_0 est le *terme constant*.

Voici quelques exemples de polynômes.

Polynôme	Coefficient dominant	Terme constant	Degré
$p_1(x) = 3x^8 + 5x^7 - 7x^2 + 4$	3	4	8
$p_2(x) = -x^3 + x^2 + 5$	-1	5	3
$p_3(x) = 4$	4	4	0
$p_4(x) = 0$	0	0	pas défini

Les polynômes sont des expressions littérales. On peut donc les additionner, les soustraire et les multiplier. Le résultat d'une telle opération est encore un polynôme. Par contre, diviser un polynôme par un autre polynôme ne donne pas toujours un polynôme.

5.2 Factorisation de polynômes du deuxième degré

Lorsqu'on désire factoriser un polynôme de degré 2, noté $p(x) = ax^2 + bx + c$, on regarde d'abord si on peut deviner la factorisation. Dans le cas où l'on n'y arrive pas, on cherche les solutions de l'équation $p(x) = 0$. Un des trois cas se produit (voir les pages 38 et 39).

- Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est négatif. Dans ce cas, il n'y a pas de solution et le polynôme ne se factorise pas plus (voir le théorème en page 36).
- Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est nul. Dans ce cas, il se cache une identité remarquable et le polynôme se factorise ainsi (x_1 peut aussi être calculé par Viète)
$$p(x) = a(x - x_1)^2 \quad \big(= a(x - x_1)(x - x_1)\big)$$
- Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est positif. Dans ce cas, il y a deux solutions, notées x_1 et x_2 (calculées grâce à Viète) et le polynôme se factorise ainsi
$$p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

5.3 Division euclidienne

La *division euclidienne* (dans $\mathbb{Z}$) permet de diviser deux nombres entiers, elle fait apparaître un *quotient* et un *reste*. En divisant un nombre entier a par un nombre entier non nul b, on obtient

$$\boxed{a = b \cdot q + r}$$

où q est le quotient et où r est le reste qui doit vérifier la relation

$$0 \leqslant r < |b| \qquad \text{la valeur absolue n'est utile que si } b < 0$$

On dit qu'un nombre entier a *est divisible par* un nombre entier b non nul si le reste de division de a par b est nul.

La division euclidienne pour les polynômes

La *division euclidienne pour les polynômes* permet de diviser deux polynômes, elle fait apparaître un *quotient* et un *reste*. En divisant un polynôme a par un polynôme non nul b, on obtient

$$\boxed{a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x)}$$

où q est le quotient et où r est le reste qui doit vérifier

$$\begin{cases} 0 \leqslant \deg(r) < \deg(b) & \text{où } \deg(p) \text{ indique le degré du polynôme } p \\ \text{ou} \quad r(x) = 0 & \text{car le degré du polynôme nul n'est pas défini} \end{cases}$$

Définition

On dit qu'un polynôme a *est divisible par* un polynôme b non nul si le reste de division de a par b est le polynôme nul.

Exemples

Voici un exemple de division euclidienne de nombres entiers et un exemple de division euclidienne polynomiale. Ces deux divisions sont effectuées avec le même algorithme.

$$\begin{array}{r|l} 2785 & 131 \\ \cline{2-2} -\ 2620 & 20+1 \\ \cline{1-1} 165 & \\ -\ 131 & \\ \cline{1-1} 34 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 2x^3 + 7x^2 + 8x + 5 & x^2+3x+1 \\ \cline{2-2} -\ (\ 2x^3 + 6x^2 + 2x\ \ ) & 2x+1 \\ \cline{1-1} x^2 + 6x + 5 & \\ -\ (\ x^2 + 3x + 1\ ) & \\ \cline{1-1} 3x + 4 & \end{array}$$

On a ainsi les résultats suivants. De plus, en posant $x = 10$, ces résultats sont identiques.

$$\boxed{131 \cdot \underbrace{(20+1)}_{\text{quotient}} + \underbrace{34}_{\text{reste}} = 2785} \qquad \boxed{(x^2+3x+1)\underbrace{(2x+1)}_{\text{quotient}} + \underbrace{(3x+4)}_{\text{reste}} = 2x^3+7x^2+8x+5}$$

Le lecteur prendra toujours le temps de vérifier la division en vérifiant les résultats obtenus (une faute de signe est si vite arrivée).

5.3.1 Schéma de Horner

William George Horner (1786-1837), mathématicien britannique, a eu l'idée d'écrire les polynômes autrement pour avoir moins de multiplications à faire pour les évaluer.

$$\begin{aligned} p(x) &= p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + p_{n-2}x^{n-2} + \cdots + p_2 x^2 + p_1 x + p_0 \\ &= ((((((0 + p_n)x + p_{n-1})x + p_{n-2})x + \cdots)x + p_2)x + p_1)x + p_0 \end{aligned}$$

Ainsi, évaluer p en un nombre $b \in \mathbb{R}$ revient à calculer

$$p(b) = (\,(\,((\,(\,(0 + p_n\,)b + p_{n-1}\,)b + p_{n-2}\,)b + \cdots)b + p_2\,)b + p_1\,)b + p_0$$

Ce calcul peut-être effectué grâce à un schéma itératif, appelé *schéma de Horner*.

p_n	p_{n-1}	p_{n-2}	$\cdots$	p_2	p_1	p_0	b
0							
q_{n-1}	q_{n-2}	q_{n-3}	$\cdots$	q_1	q_0	$\boxed{p(b)}$	

$\downarrow$ addition verticale

$\nearrow$ multiplication par b

Exemple

On évalue $p(x) = 3x^6 - x^5 - 12x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 18x + 11$ en $x = 2$ (on a donc $b = 2$).
L'écriture ci-dessus donne $p(x) = ((((((0+3)\,x - 1)\,x - 12)\,x + 4)\,x - 3)\,x + 18)\,x + 11$.
En évaluant en $x = 2$, on a $p(2) = ((((((0+3)\,2 - 1)\,2 - 12)\,2 + 4)\,2 - 3)\,2 + 18)\,2 + 11$.

3	-1	-12	4	-3	18	11	2
0	6	10	-4	0	-6	24	
3	5	-2	0	-3	12	$\boxed{35}$	

$\downarrow$ addition verticale

$\nearrow$ multiplication par 2

Ainsi, on trouve que l'évaluation du polynôme p en $x = 2$ vaut $p(2) = 35$.

Théorème

Le schéma de Horner permet aussi d'effectuer la division euclidienne d'un polynôme p de degré n par un polynôme de la forme $x - b$ où b est un nombre réel quelconque.

Les nombres trouvés dans la ligne du bas seront les coefficients du polynôme quotient $q(x) = q_{n-1}x^{n-1} + q_{n-2}x^{n-2} + q_{n-3}x^{n-3} + \cdots + q_1 x + q_0$ et du polynôme reste $r(x) = r = p(b)$ (qui est de degré 0, donc un nombre, car on divise par un polynôme de degré 1).

On aura ainsi : $$p(x) = (x - b)q(x) + p(b)$$

Conséquence importante et immédiate du théorème

Soit p un polynôme et $b \in \mathbb{R}$, on a : $\boxed{p(b) = 0 \iff p(x) \text{ est divisible par } (x - b)}$

Exemple

Dans l'exemple ci-dessus, la division euclidienne de p par le polynôme $x - 2$ donne

$$p(x) = (x - 2)\underbrace{(3x^5 + 5x^4 - 2x^3 - 3x + 12)}_{= q(x) \text{ c'est le quotient}} + \underbrace{35}_{= r(x) = r = p(2) \text{ c'est le reste}}$$

Preuve du théorème

On écrit le polynôme p de degré n en utilisant la notation vue en page 41.

$$p(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + p_{n-2}x^{n-2} + \cdots + p_2x^2 + p_1x + p_0$$

On effectue le schéma de Horner pour évaluer le polynôme p en $x = b$:

$$\begin{array}{ccccccc|c}
p_n & p_{n-1} & p_{n-2} & \cdots & p_2 & p_1 & p_0 & b \\
\hline
0 & & & & & & & \\
\hline
q_{n-1} & q_{n-2} & q_{n-3} & \cdots & q_1 & q_0 & \boxed{r} &
\end{array}$$

$\downarrow$ addition verticale

$\nearrow$ multiplication par b

La dernière ligne permet de construire le polynôme q qui est de degré $n-1$.

$$q(x) = q_{n-1}x^{n-1} + q_{n-2}x^{n-2} + \cdots + q_2x^2 + q_1x + q_0$$

1. On commence par montrer que $p(x) = (x-b)q(x) + r$.

   Le schéma montre des relations entre les coefficients p_i et q_i.

$$\left\{\begin{array}{rcrcl}
q_{n-1} & = & & & p_n \\
q_{n-2} & = & bq_{n-1} & + & p_{n-1} \\
q_{n-3} & = & bq_{n-2} & + & p_{n-2} \\
 & \vdots & & & \\
q_1 & = & bq_2 & + & p_2 \\
q_0 & = & bq_1 & + & p_1 \\
r & = & bq_0 & + & p_0
\end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad (\bigstar)\left\{\begin{array}{rcrcl}
p_n & = & q_{n-1} & & \\
p_{n-1} & = & q_{n-2} & - & bq_{n-1} \\
p_{n-2} & = & q_{n-3} & - & bq_{n-2} \\
 & \vdots & & & \\
p_2 & = & q_1 & - & bq_2 \\
p_1 & = & q_0 & - & bq_1 \\
p_0 & = & r & - & bq_0
\end{array}\right.$$

   Montrons que $(x-b)q(x) + r$ est égal à $p(x)$.

$$(x-b)q(x) + r = (x-b)\big(q_{n-1}x^{n-1} + q_{n-2}x^{n-2} + \cdots + q_2x^2 + q_1x + q_0\big) + r$$

$$\begin{array}{rccccccccccc}
= & q_{n-1}x^n & + & q_{n-2}x^{n-1} & + & \cdots & + & q_1x^2 & + & q_0x & + & r \\
 & & - & bq_{n-1}x^{n-1} & - & \cdots & - & bq_2x^2 & - & bq_1x & - & bq_0
\end{array}$$

$$= q_{n-1}x^n + (q_{n-2} - bq_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (q_1 - bq_2)x^2 + (q_0 - bq_1)x + (r - bq_0)$$

$$\overset{(\bigstar)}{=} p_nx^n + p_{n-1}x^{n-1} + \cdots + p_2x^2 + p_1x + p_0 = p(x)$$

2. On termine en montrant que $r = p(b)$.

   Même si ce résultat a déjà été montré en utilisant l'écriture du polynôme avec les multiples parenthèses de la page précédente, on peut le démontrer à l'aide de la relation $p(x) = (x-b)q(x) + r$ en remplaçant x par b. Ainsi, on trouve que

$$p(b) = (b-b)q(b) + r = 0 + r = r$$

En conclusion, le polynôme q est bien le quotient et $p(b)$ le reste de la division de p par $x - b$ et on a la relation

$$p(x) = (x-b)q(x) + p(b)$$

□

5.4 Le lemme de Gauss

Soit un polynôme p de degré n à coefficients entiers et soit $\frac{a}{b}$ une fraction irréductible avec $a \in \mathbb{Z}$, et $b \in \mathbb{N}$, $b > 0$.

Si $\frac{a}{b}$ est un *zéro* du polynôme p (c'est-à-dire une solution de l'équation $p(x) = 0$), alors :

a) a divise le terme constant de p b) b divise le coefficient dominant de p

Preuve

On écrit le polynôme p de degré n en utilisant la notation vue en page 43.

$$p(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + p_{n-2} x^{n-2} + \cdots + p_2 x^2 + p_1 x + p_0$$

Par hypothèse, on a $p(\frac{a}{b}) = 0$. On a ainsi

$$0 = p\left(\frac{a}{b}\right) = p_n \frac{a^n}{b^n} + p_{n-1}\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + p_{n-2}\frac{a^{n-2}}{b^{n-2}} + \cdots + p_2 \frac{a^2}{b^2} + p_1 \frac{a}{b} + p_0$$

En multipliant chaque membre de l'équation par b^n , on voit que c'est équivalent à :

$$0 = p_n a^n + p_{n-1} a^{n-1} b + p_{n-2} a^{n-2} b^2 + \cdots + p_2 a^2 b^{n-2} + p_1 a b^{n-1} + p_0 b^n$$

a) On montre que a divise le terme constant p_0 en isolant $p_0 b^n$ et en factorisant par a.

$$p_0 b^n = -a \cdot \underbrace{\left(p_n a^{n-1} + p_{n-1} a^{n-2} b + p_{n-2} a^{n-3} b^2 + \cdots + p_2 a b^{n-2} + p_1 b^{n-1}\right)}_{\in \mathbb{Z} \quad \text{car } a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N} \text{ et } p \text{ est un polynôme à coefficients entiers}}$$

Ainsi, a divise $p_0 b^n$.
Comme a et b n'ont pas de diviseurs communs (autres que ± 1), alors[1] a divise p_0.

b) On montre que b divise le coefficient dominant p_n en isolant $p_n a^n$ et en factorisant par b.

$$p_n a^n = -b \cdot \underbrace{\left(p_{n-1} a^{n-1} + p_{n-2} a^{n-2} b + \cdots + p_2 a^2 b^{n-3} + p_1 a b^{n-2} + p_0 b^{n-1}\right)}_{\in \mathbb{Z} \quad \text{car } a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N} \text{ et } p \text{ est un polynôme à coefficients entiers}}$$

Ainsi, b divise $p_n a^n$.
Comme a et b n'ont pas de diviseurs communs (autres que ± 1), alors[1] b divise p_n.

□

Conséquence

Si p est un polynôme à coefficients entiers de coefficient dominant 1, alors les seuls zéros de p possibles sont :

a) un diviseur entier du terme constant b) un nombre irrationnel

Preuve

En effet, soit le zéro est irrationnel, soit c'est une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ $(a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0)$. Dans ce dernier cas, par le lemme de Gauss, b divise 1, donc $b = 1$ et a divise le terme constant. Donc l'éventuel zéro rationnel $\frac{a}{b} = a$ divise le terme constant. □

1. La preuve de ce résultat, appelé le lemme d'Euclide, se trouve dans le cours de math 2

Exemples

1. On cherche les zéros du polynôme $p(x) = x^3 + 3x - 2$ (c'est-à-dire les solutions de l'équation $x^3 + 3x - 2 = 0$).

   Comme p est à coefficients entiers, on peut appliquer le lemme de Gauss.

   Le lemme de Gauss dit que $Z \cap \mathbb{Q} \subset \{\pm 1, \pm 2\}$.

   Cela signifie que s'il existe un zéro rationnel (c'est-à-dire un élément de l'ensemble $Z \cap \mathbb{Q}$), alors il vaut ± 1 ou ± 2 (car il appartient à l'ensemble $\{\pm 1, \pm 2\}$).

   On trouve ces quatre valeurs en suivant l'énoncé du lemme de Gauss.

   a est un diviseur du terme constant -2, donc $a \in \{-2, -1, 1, 2\}$.
   b est un diviseur du coefficient dominant 1, donc $b = 1$.

   Et on combine a et b de manière à écrire toutes les fractions possibles avec a comme numérateur et b comme dénominateur.

   Malheureusement, on a $p(-2) = -16$, $p(-1) = -6$, $p(1) = 2$ et $p(2) = 12$. Par conséquent, le lemme de Gauss permet d'affirmer que p n'a pas de zéro rationnel.

   En fait, voici son seul zéro réel et on vient de prouver qu'il est irrationnel !

   $$\sqrt[3]{1+\sqrt{2}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{2}} \quad \cong \quad 0.59607$$

   Cette solution a été trouvée grâce à la formule de Cardan qui permet de résoudre n'importe quelle équation du troisième degré (voir le cours sur les nombres complexes donné aux options scientifiques).

2. On cherche à résoudre l'équation $x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0$.

   Afin de pouvoir appliquer le lemme de Gauss (il faut des coefficients entiers), on multiplie par 2 chaque membre de cette équation. On a ainsi l'équation équivalente :

   $$2x^3 - x^2 - x - 3 = 0$$

   On pose $p(x) = 2x^3 - x^2 - x - 3$ qui est un polynôme à coefficients entiers. On peut donc appliquer le lemme de Gauss.

   Le lemme de Gauss dit que $Z \cap \mathbb{Q} \subset \{\pm 1, \pm 3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}\}$.

   On remarque que $\frac{3}{2}$ est solution et grâce au schéma de Horner, on peut factoriser le polynôme de la manière suivante.

   $$p(x) = (x - \tfrac{3}{2})(2x^2 + 2x + 2) = 2(x - \tfrac{3}{2})(x^2 + x + 1) = (2x - 3)(x^2 + x + 1)$$

   Par la propriété du produit, on a $p(x) = 0 \iff x = \frac{3}{2}$ ou $x^2 + x + 1 = 0$. Comme $x^2 + x + 1 = 0$ n'admet pas de solution réelle (le discriminant est négatif), on constate que l'ensemble des solutions de l'équation est $S = \{\frac{3}{2}\}$.

5.4.1 Bonus : une preuve que la racine de 2 est irrationnelle

On considère le polynôme $p(x) = x^2 - 2$. Comme ce polynôme est à coefficients entiers, on peut appliquer le lemme de Gauss qui dit que $Z \cap \mathbb{Q} \subset \{\pm 1, \pm 2\}$, cela signifie que les candidats pour un éventuel zéro rationnel du polynôme p sont ± 1 et ± 2.

Or, aucune de ces valeurs n'est un zéro de p car $p(\pm 1) = -1$ et $p(\pm 2) = 2$. Ainsi, si p a des zéros, ils sont irrationnels.

Néanmoins les zéros de ce polynôme p sont bien connus ! En effet :

$$p(x) = 0 \iff x^2 = 2 \iff x = \pm\sqrt{2}$$

Par conséquent $\pm\sqrt{2}$ sont des nombres irrationnels.

5.5 Factorisation de polynômes de degré supérieur à deux

Méthode de factorisation

1. On tente de deviner une factorisation du polynôme p.
2. Si on échoue, on essaie de voir si ± 1 est un zéro du polynôme p.

   En effet, ± 1 est toujours dans la liste des candidats de zéros rationnels donnés par le lemme de Gauss.
3. Si ce n'est pas le cas et que le polynôme est à coefficients entiers, on utilise le lemme de Gauss pour trouver un zéro rationnel.

Si aux étapes 2 ou 3, on trouve un zéro de p, appelons-le b, on utilise le schéma de Horner pour factoriser le polynôme p par $x - b$.

$$p(x) = (x-b)q(x) + p(b) \overset{p(b)=0}{=} (x-b)q(x)$$

On obtient ainsi une étape de factorisation avec un polynôme q de degré $n-1$. Si ce polynôme est du deuxième degré (cas $n = 3$), alors on peut factoriser q à l'aide de la formule de Viète (voir page 39). Sinon, on recommence au point 1 de cette méthode pour le polynôme q.

Inconvénients de cette méthode

1. Le lemme de Gauss ne permet que de trouver les éventuelles solutions rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers. S'il n'y a que des solutions irrationnelles, le lemme de Gauss sera totalement inefficace !
2. De plus, cette méthode ne permet pas de trouver la factorisation d'un polynôme p qui n'admet pas de polynômes de degré 1 dans sa factorisation. Par exemple, elle ne fonctionne pas pour le polynôme suivant qui se factorise pourtant aisément à l'aide d'une identité remarquable.

   $$x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2+1)^2$$

   Ou encore le polynôme $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ dont la factorisation s'obtient en cherchant des nombres a et b tels que $p(x) = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 1)$. Voici la factorisation de ce polynôme :

   $$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \left(x^2 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}x + 1\right)\left(x^2 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}x + 1\right)$$

Exemple

Factorisons le polynôme $p(x) = 6x^3 - 17x^2 + 5$.

On ne voit pas de factorisation évidente et les nombres ± 1 ne sont pas des zéros de p.

Comme p est un polynôme à coefficients entiers, on peut appliquer le lemme de Gauss qui dit que $Z \cap \mathbb{Q} \subset \{\pm 1, \pm 5, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{5}{6}\}$. En fait, on a $p(-\frac{1}{2}) = 0$.

Pour avancer la factorisation, on utilise Horner avec $b = -\frac{1}{2}$.

6	-17	0	5	$-\frac{1}{2}$
0	-3	10	-5	
6	-20	10	$\boxed{0}$	

Ainsi, on a $p(x) = (x + \frac{1}{2})(6x^2 - 20x + 10) = (2x+1)(3x^2 - 10x + 5)$. Il reste à factoriser le polynôme de degré 2. On utilise donc la formule de Viète pour factoriser ce polynôme de degré 2, et on obtient ainsi

$$p(x) = 3\Big(2x+1\Big)\left(x - \frac{5+\sqrt{10}}{3}\right)\left(x - \frac{5-\sqrt{10}}{3}\right)$$

Remarquons que le lemme de Gauss ne permet pas de factoriser le polynôme $3x^2 - 10x + 5$, car ses zéros sont irrationnels ; il est donc essentiel d'utiliser la formule de Viète.

5.6 Polynômes irréductibles

Souvent, on écrit un polynôme de degré n en utilisant la notation vue en page 43.

$$p(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + p_{n-2}x^{n-2} + \cdots + p_2 x^2 + p_1 x + p_0$$

Mais, parfois, on a besoin d'écrire un polynôme sous la forme de produits de polynômes, c'est le principe de la *factorisation*.

Définition

Un polynôme p est un polynôme *irréductible* s'il ne peut pas se factoriser. Par exemple, les polynômes suivants sont irréductibles (sur $\mathbb{R}$).

$$x + 4 \qquad x^2 + 1 \qquad x^2 + x + 1$$

Tandis que les polynômes suivants sont *réductibles*.

$$x^2 \qquad x^2 - 1 \qquad x^2 + 2x + 1 \qquad 2x^2 - 3x - 5 \qquad x^3 + x^2 + x + 1$$

ATTENTION : bien que $x + 4 = \frac{1}{2}(2x+8)$, il ne s'agit pas d'une 'vraie' factorisation (sinon aucun polynôme n'aurait la possibilité d'être irréductible !). Voici une 'vraie' factorisation

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \left(x^2 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\,x + 1\right)\left(x^2 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\,x + 1\right)$$

Remarque (démontrable si on se place dans les nombres complexes)

Les seuls polynômes à coefficients réels irréductibles (dans $\mathbb{R}$) sont :

1. Les polynômes du premier degré (et les polynômes de degré zéro).
2. Les polynômes du deuxième degré dont le discriminant est négatif.