Chapitre 8

Fonctions

Les fonctions se cachent partout. La plupart des phénomènes de la vie de tous les jours peuvent être examinés du point de vue des fonctions : la température en fonction de l'heure, le prix du billet de train en fonction de la distance, le prix de l'entrecôte de cheval en fonction de la quantité achetée, etc.

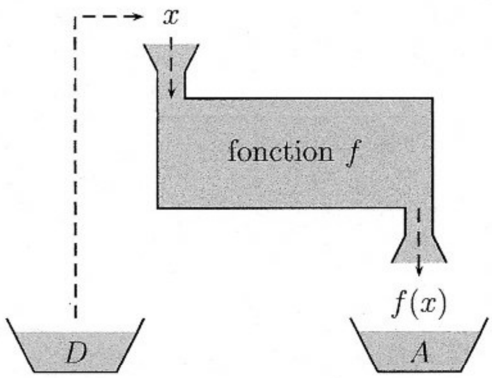
8.1 Les fonctions et leur représentations

Définition

Soit D et A deux ensembles.

Une *fonction* est une correspondance, souvent appelée f, qui assigne à CHAQUE $x \in D$ un UNIQUE élément de A, noté $f(x)$. On dit que $f(x)$ est *l'image de x par la fonction f*. D est appelé le *domaine de définition de f* et A est appelé le *domaine d'arrivée de f*.

Lorsque les ensembles D et A sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$, on parle de *fonctions réelles*.



Notation mathématique $\quad f : D \to A;\ x \mapsto f(x)$

Le lecteur remarquera que la flèche qui associe à un élément de départ son image a un petit trait vertical au début !

Précision au sujet des mots 'CHAQUE' et 'UNIQUE'

Le mot 'CHAQUE' signifie que $f(x)$ existe quel que soit $x \in D$.

Le mot 'UNIQUE' signifie qu'un élément x ne peut pas avoir deux images différentes.
En termes d'implications :

$$x_1 = x_2 \implies f(x_1) = f(x_2)$$

«si les éléments de départs sont identiques, alors leurs images sont les mêmes»

ou (sa contraposée)

$$f(x_1) \neq f(x_2) \implies x_1 \neq x_2$$

«si les images de deux éléments sont différentes, alors ces éléments ne sont pas les mêmes»

Les trois principales façons de se représenter une fonction réelle f

1. *Le tableau de valeurs.*

   Voici un tableau de valeurs représentant la fonction f.

x	-2.5	-1	0	1	1.5	2	2.5	3	4	5.5
$f(x)$	14.25	3	-2	-5	-5.75	-6	-5.75	-5	-2	6.25

   Malheureusement, il ne permet pas de savoir quelles sont les valeurs de f en dehors de celles qui y sont inscrites. C'est donc la manière la moins pratique pour présenter une fonction.

2. *La représentation graphique.*

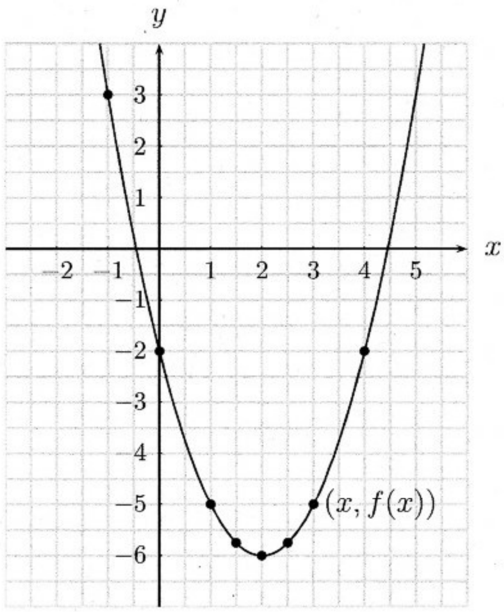
   La *représentation graphique* est la représentation du *graphe de f*, noté $\mathcal{G}_f$, qui est le sous-ensemble du plan suivant.

$$\boxed{\mathcal{G}_f = \{(x; f(x)) : x \in D\}}$$

   On le dessine en deux étapes :

   a) *On dessine un certain nombre de points.*

   Pour dessiner un point, on choisit une valeur pour x (prise dans le domaine de définition D) et on calcule son image $f(x)$. x sera la première coordonnée du point et $f(x)$ sera sa deuxième. Autrement dit, le point sur la verticale correspondant à x sera à hauteur $f(x)$.



   b) *On relie ces points intelligemment.*

   Sauf si le graphe est une droite, on relie les points à la main en respectant les *deux principes de base* : 1) on n'attribue pas à un seul x plusieurs images; 2) on n'attribue pas d'image à un élément x qui n'est pas dans le domaine de définition.

   Très pratique et relativement précise, la représentation graphique reste néanmoins restreinte à une région. Ici, par exemple, le graphe ne montre pas comment la fonction se comporte pour $x < -2$ et pour $x > 6$.

   Néanmoins, lorsqu'on dessine des graphes de fonctions, on s'arrange pour montrer tout ce qui est intéressant.

3. *L'expression mathématique.*

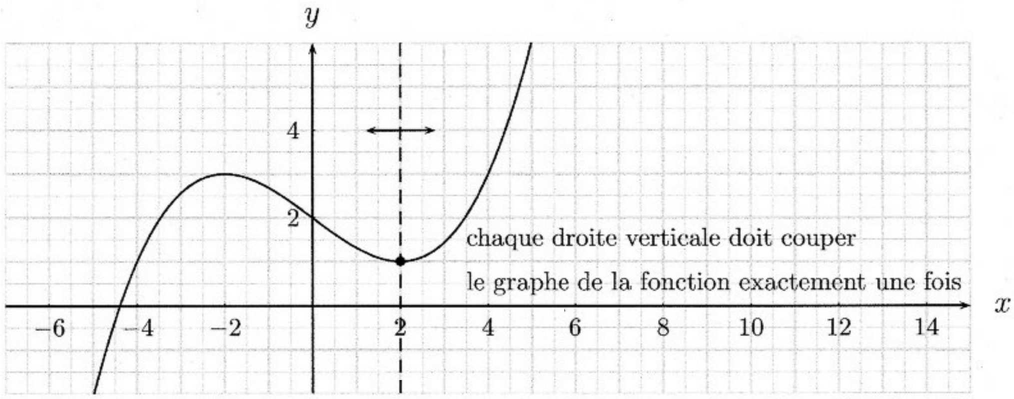
   Voici l'expression mathématique de la fonction f.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto f(x) = x^2 - 4x - 2$$

   L'expression mathématique est la meilleure façon de décrire une fonction, car en la connaissant on peut construire un tableau de valeurs et une représentation graphique. Alors que le contraire n'est pas possible (en tout cas pas de manière unique). L'expression mathématique contient TOUTE L'INFORMATION à propos de la fonction.

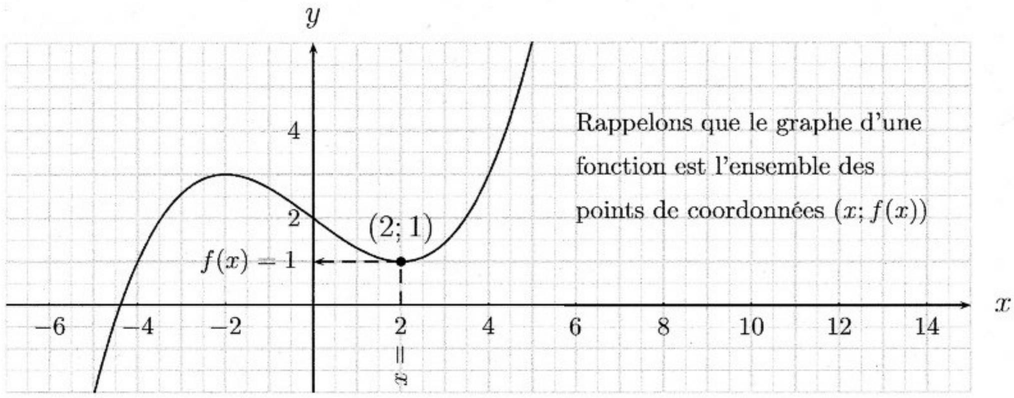
Le test de la droite verticale

Soit $f : D \to A$ une fonction réelle. Le *test de la droite verticale* consiste à vérifier, pour chaque $x \in D$, que la droite verticale touchant x sur l'axe des x (donc passant par le point $(x; 0)$) coupe la fonction exactement une fois.

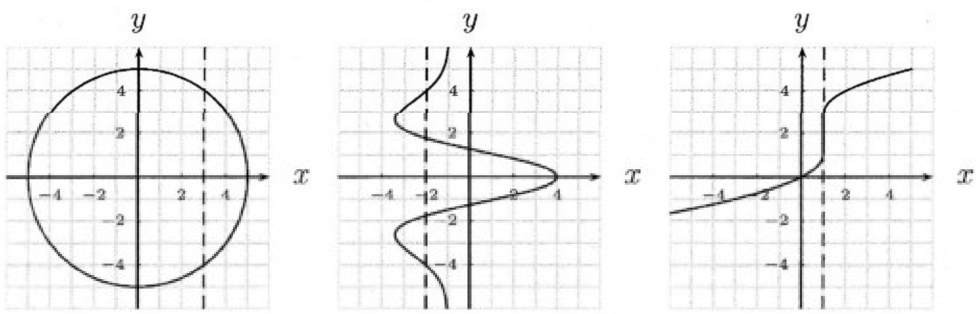


Ce test provient de la définition d'une fonction.

une fonction $f : D \to A$ assigne à CHAQUE $x \in D$ un UNIQUE élément de A, noté $f(x)$



Exemple de courbes qui ne sont pas le graphe d'une fonction réelle



Bien sûr, les mathématiciens ont trouvé la parade à ces difficultés. En définissant des fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, appelées *courbes paramétrées*, ils ont réussi à obtenir de tels graphes. On le fera dans le cours de géométrie avec les équations paramétriques des droites. Les élèves qui suivent une option scientifiques étudieront en troisième années les courbes paramétrées dans une plus grande généralité.

8.2 Images, domaine image et pré-images

Soit f une fonction de domaine de définition D et de domaine d'arrivée A. Soient aussi B un sous-ensemble de A et C un sous-ensemble de D.

1. L'*image de* C, notée $f(C)$, est définie par :

$$\begin{aligned} f(C) &= \{y \in A : y = f(x) \text{ avec } x \in C\} \\ &= \{f(x) \in A : x \in C\} \end{aligned}$$

   Il s'agit de l'ensemble des éléments de A qui sont images d'un élément (au moins) de l'ensemble C.

2. Le *domaine image de* f est défini par

$$\begin{aligned} f(D) &= \{y \in A : y = f(x) \text{ avec } x \in D\} \\ &= \{f(x) \in A : x \in D\} \end{aligned}$$

   Il s'agit de l'ensemble des éléments de A qui sont images d'un élément (au moins) de l'ensemble de définition D. Le domaine image de f est égale à l'image de D.

3. La *pré-image de* B, notée $f^{-1}(B)$, est définie par :

$$f^{-1}(B) = \{x \in D : f(x) \in B\}$$

   Il s'agit de l'ensemble des éléments de D dont l'image appartient à l'ensemble B. On a toujours $f^{-1}(A) = D$ (quelque soit la fonction).

Exemples

Reprenons la fonction de la page précédente $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto f(x) = x^2 - 4x - 2$.

1. À l'aide de la zone grisée (claire), on voit que :

$$f\big(]1.5, 2.5[\big) = [-6, -5.75[$$

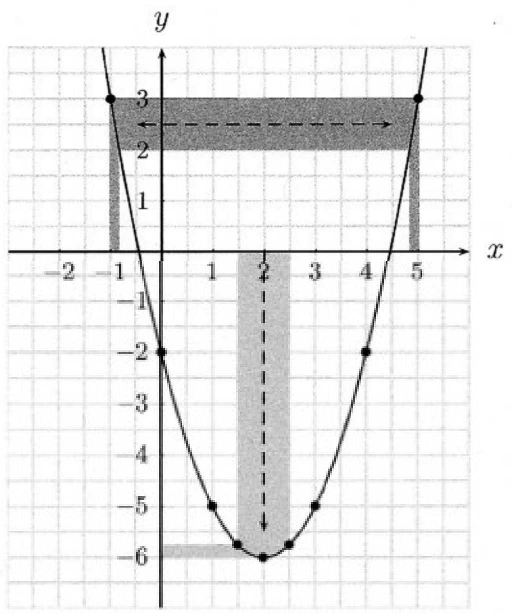
2. Le domaine image est :

$$f(\mathbb{R}) = [-6, +\infty[$$

   En effet, la fonction a un minimum de hauteur -6, et monte jusqu'à une hauteur infinie.

3. À l'aide de la zone grisée (foncée) et la formule de Viète, on peut vérifier que :

$$f^{-1}\big(]2,3]\big) = \Big[-1, 2-\sqrt{8}\Big[\cup \Big]2+\sqrt{8}, 5\Big]$$



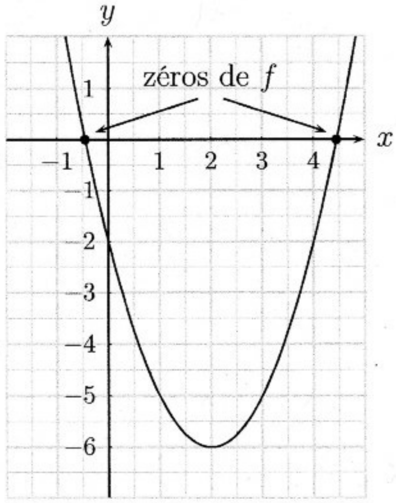
8.3 Les zéros d'une fonction

Définition

Soit $f : D \to A$ une fonction réelle ($D, A \subset \mathbb{R}$).

Les *zéros* de f sont les éléments de D qui sont envoyés sur 0 par la fonction f. L'*ensemble des zéros de* f est :

$$Z_f = \{x \in D : \underbrace{f(x) = 0}_{\text{équation à résoudre pour trouver les zéros de } f}\}$$



Exemple

L'ensemble des zéros de la fonction précédente, qui est donnée par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto f(x) = x^2 - 4x - 2$, est :

$$Z_f = \{2 - \sqrt{6}, 2 + \sqrt{6}\} \qquad \text{(merci à Viète)}$$

8.4 Graphes à savoir dessiner rapidement

8.4.1 Graphes des fonctions affines

Considérons une *fonction affine* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto ax + b$. On peut trouver un moyen d'identifier les paramètres a et b en évaluant la fonction.

En effet, on a $f(0) = b$. Ainsi b se trouve à l'intersection de la fonction avec l'axe vertical.

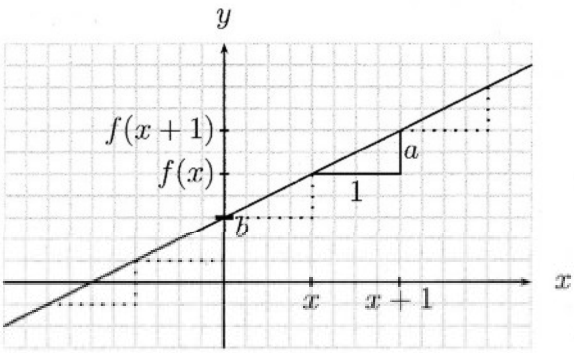
Pour découvrir quel est le rôle de a, on effectue le calcul suivant :

$$f(x+1) = a(x+1) + b = ax + a + b = ax + b + a = f(x) + a$$

Cela signifie que LORSQU'ON AVANCE HORIZONTALEMENT SUR LE GRAPHE DE 1 VERS LA DROITE, ON SE DÉPLACE VERTICALEMENT DE a.

On dit que a est la *pente* de f et que b est sa *hauteur*.

On peut ainsi voir a et b sur le graphe de la fonction.



La pente est aussi définie à l'aide du quotient

$$\boxed{\text{pente} = \frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}}}$$

La notion de pente d'une droite est décrite plus en détail dans le cours de géométrie à la page 132.

Une droite est déterminée par un point et une pente

Dans le cours de géométrie, on décrit ce phénomène en utilisant la représentation paramétrique d'une droite. En page 132, on donne l'expression fonctionnelle d'une droite qui passe par le point $(x_0; y_0)$ et qui est de pente a à l'aide de la formule suivante.

$$\boxed{y = y_0 + a(x - x_0)}$$

8.4.2 Graphes des fonctions exponentielles

Soit $a > 0$. On considère la *fonction exponentielle* $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto a^x$. On peut trouver un moyen d'identifier le paramètre a en évaluant la fonction.

En effet, on a $\exp_a(0) = a^0 = 1$. Ainsi le graphe coupe l'axe verticale à hauteur 1.

On a les relations

$$\exp_a(x+1) = a^{x+1} = a^x \cdot a = a \cdot \exp_a(x) \quad \text{et} \quad \exp_a(x-1) = a^{x-1} = \frac{a^x}{a} = \frac{\exp_a(x)}{a}$$

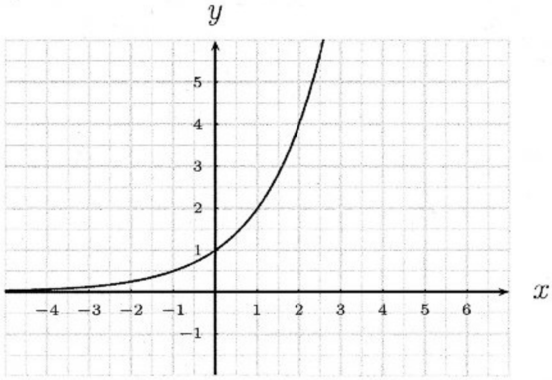
Cela signifie que :

LORSQU'ON AVANCE HORIZONTALEMENT SUR LE GRAPHE DE 1 VERS LA DROITE, LA HAUTEUR EST MULTIPLIÉE PAR a.

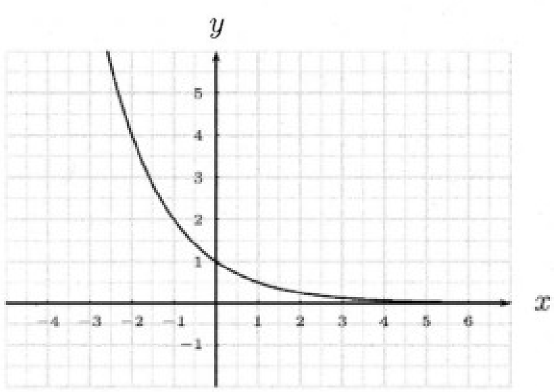
LORSQU'ON AVANCE HORIZONTALEMENT SUR LE GRAPHE DE 1 VERS LA GAUCHE, LA HAUTEUR EST DIVISÉE PAR a.

Exemples

1. Voici le graphe de $\exp_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \exp_2(x) = 2^x$. Pour cette fonction, on multiplie la hauteur par 2 lorsqu'on avance de 1 vers la droite et on divise la hauteur par 2 lorsqu'on avance de 1 vers la gauche.



2. Voici le graphe de $\exp_{\frac{1}{2}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \exp_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Pour cette fonction, on multiplie la hauteur par $\frac{1}{2}$ (on divise donc la hauteur par 2) lorsqu'on avance de 1 vers la droite et on divise la hauteur par $\frac{1}{2}$ (on multiplie donc la hauteur par 2) lorsqu'on avance de 1 vers la gauche.



Si le graphe de $\exp_{\frac{1}{2}}$ est obtenu par une symétrie d'axe Oy à partir du graphe de $\exp_2$, c'est parce qu'on a la relation :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}$$

Autrement dit :

$$\exp_2(-x) = \exp_{\frac{1}{2}}(x)$$

voir aussi les fonctions paires en page 88

8.4.3 Graphes des fonctions quadratiques

Considérons une *fonction quadratique* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. On peut trouver un moyen d'identifier les paramètres a, b et c en examinant la fonction.

En effet, on a $f(0) = c$. Ainsi c se trouve à l'intersection de la fonction avec l'axe vertical.

Or, grâce à la technique de calcul vue en page 38 (pour démontrer Viète), on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c = a\Big(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\Big) = a\left(\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

Donc, on a

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \text{ nombre} \qquad \text{En fait, nombre} = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

Cela nous montre que le graphe de f est une parabole et que :

1. Le sommet de la parabole est le point $S\left(-\frac{b}{2a};\ f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.
2. Il y a une symétrie d'axe vertical $x = -\frac{b}{2a}$ (passant par le sommet).
3. le paramètre a règle l'écartement et l'orientation de la parabole. On dit que a est la *courbure de la parabole.*

$a < 0$ grand	$a < 0$ petit	$a > 0$ petit	$a > 0$ grand
			

Une parabole est déterminée par un sommet et une courbure

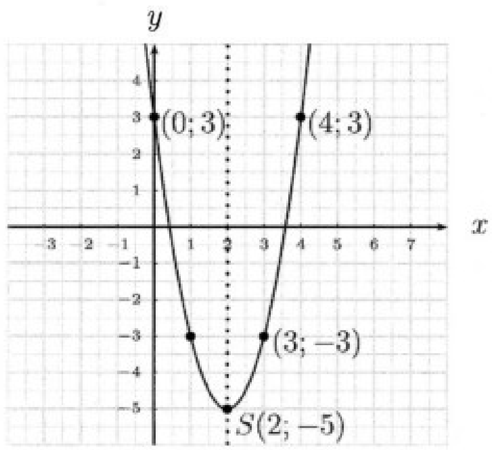
L'expression fonctionnelle d'une parabole qui passe par le sommet $(x_0; y_0)$ et qui est de courbure a est donnée par la formule suivante.

$$\boxed{y = y_0 + a(x - x_0)^2}$$

Procédure à suivre pour faire le graphe d'une fonction quadratique

Pour faire le graphe de la fonction d'expression $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$, on procède ainsi :

1. On calcule d'abord le sommet. Ici, on a $S(2; -5)$ car $-\frac{b}{2a} = 2$ et $f(2) = -5$.
2. Puis on place l'axe de symétrie.
3. Ensuite, on peut calculer un ou deux points et noter les points symétriques correspondant afin de pouvoir faire le graphe. Ici le fait que $f(0) = 3$ nous donne le point $(0; 3)$ et son symétrique $(4; 3)$.
4. Finalement, on relie les quelques points.
5. On vérifie que la courbure est la bonne.



8.4.4 Graphes des homographies

Une *homographie* est une fonction définie par

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad \text{avec} \qquad ad - bc \neq 0$$

Dans le cas où $c = 0$, la fonction est affine. Ce cas ayant déjà été examiné précédemment, regardons le cas où $c \neq 0$.

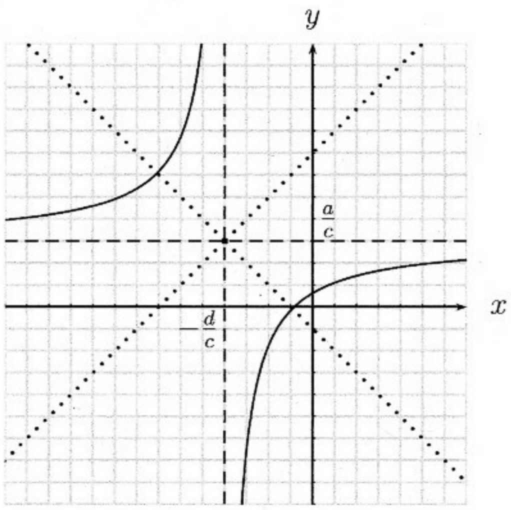
Dans le cas où $c \neq 0$, le domaine de définition est $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$. La condition $ad - bc \neq 0$ fait en sorte que la fonction soit injective[1] et la fonction sera surjective[1] si on prend le domaine d'arrivée $A = \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ (il s'agit du domaine image de la fonction).

On cherche donc à dessiner rapidement les fonctions suivantes :

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-\tfrac{d}{c}\} \to \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{a}{c}\};\ x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \qquad \text{avec} \qquad \begin{matrix} ad - bc \neq 0 \\ c \neq 0 \end{matrix}$$

Ces homographies (avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$) ont plusieurs propriétés graphiques.

- Il y a une asymptote horizontale $y = \frac{a}{c}$.
- Il y a une asymptote verticale $x = -\frac{d}{c}$.
- Il y a deux axes de symétries diagonaux comme indiqués sur le dessin ci-dessus (ils partent à 45° de l'intersection des deux asymptotes).

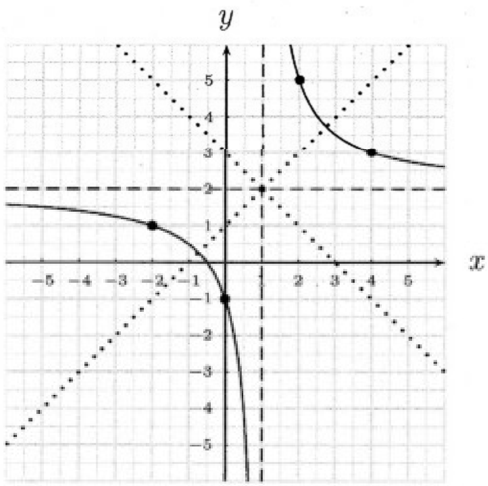


Ces axes de symétries sont très utiles pour tracer rapidement le graphe de la fonction. En effet, dès que l'on trouve un point du graphe, les axes nous permettent d'en trouver trois autres en faisant des symétries du premier point.

Procédure à suivre pour faire le graphe d'une homographie

Pour faire le graphe de l'homographie d'expression $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$, on procède ainsi :

1. On dessine d'abord les asymptotes horizontales et verticales. Ici $x = 1$ et $y = 2$.
2. Puis on place les axes de symétrie (partant à 45° de l'intersection des deux asymptotes).
3. Ensuite, on peut calculer un ou deux points et noter les points symétriques correspondant afin de pouvoir faire le graphe. Ici le fait que $f(0) = -1$ nous donne le point $(0; -1)$ et ses symétriques $(-2, 1)$, $(2, 5)$ et $(4, 3)$.
4. Finalement, on relie ces quatre points en s'arrangeant pour que la fonction s'approche de plus en plus des asymptotes.



1. voir la section 8.8

8.5 Opérations sur les fonctions

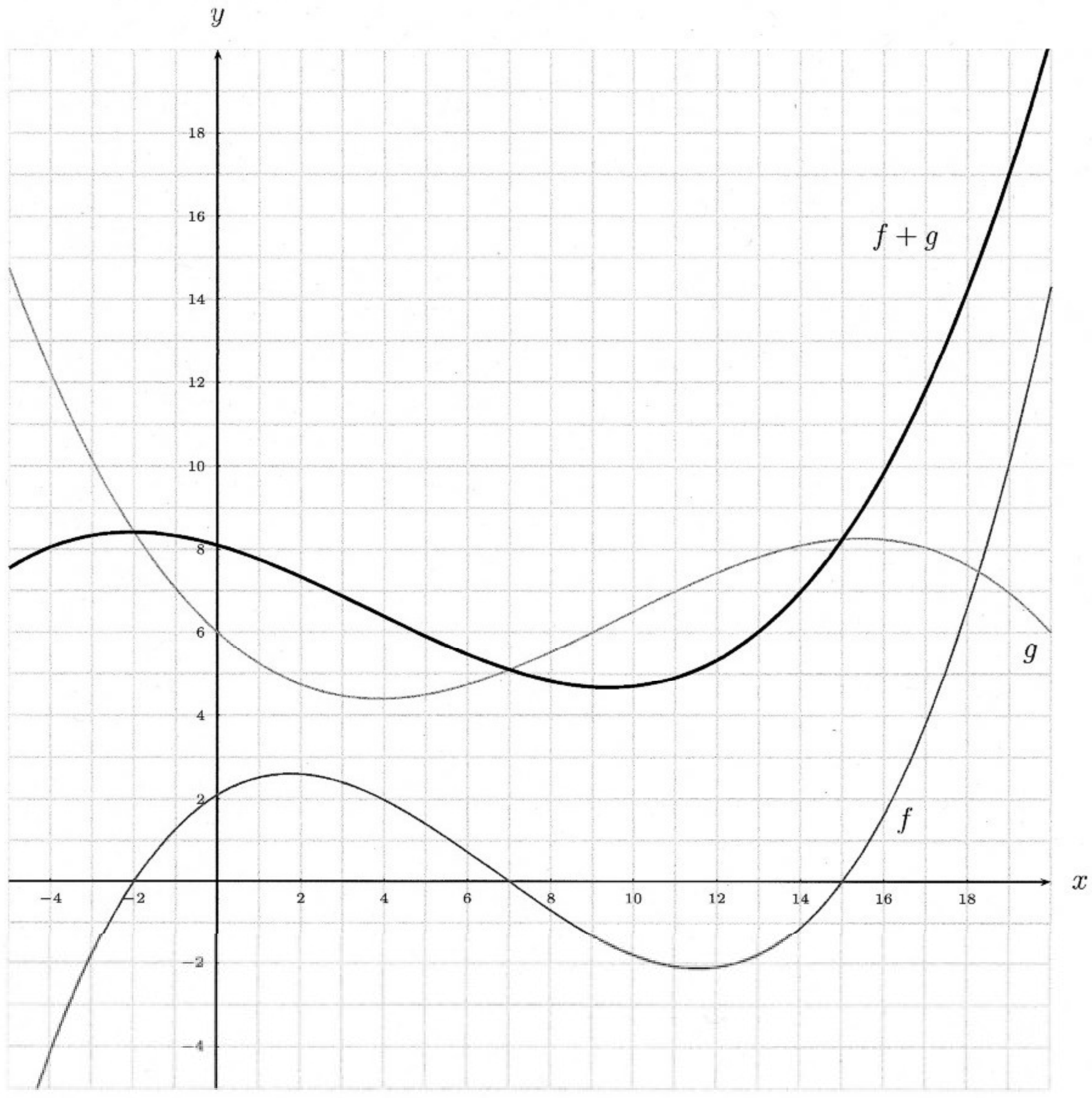
8.5.1 Addition de fonctions

Soit f et g deux fonctions réelles ayant le même domaine de définition D et le même domaine d'arrivée A. En d'autres termes, on a $f : D \to A$ et $g : D \to A$ avec $A,\ D \subset \mathbb{R}$.

On définit la *fonction somme*, notée $f + g : D \to A$, par

$$\boxed{(f+g)(x) = f(x) + g(x)}$$

Voici comment l'addition se comporte sur les graphes des fonctions.



Pour obtenir le graphe de $f + g$, on additionne, en chaque point, les hauteurs de f et de g.

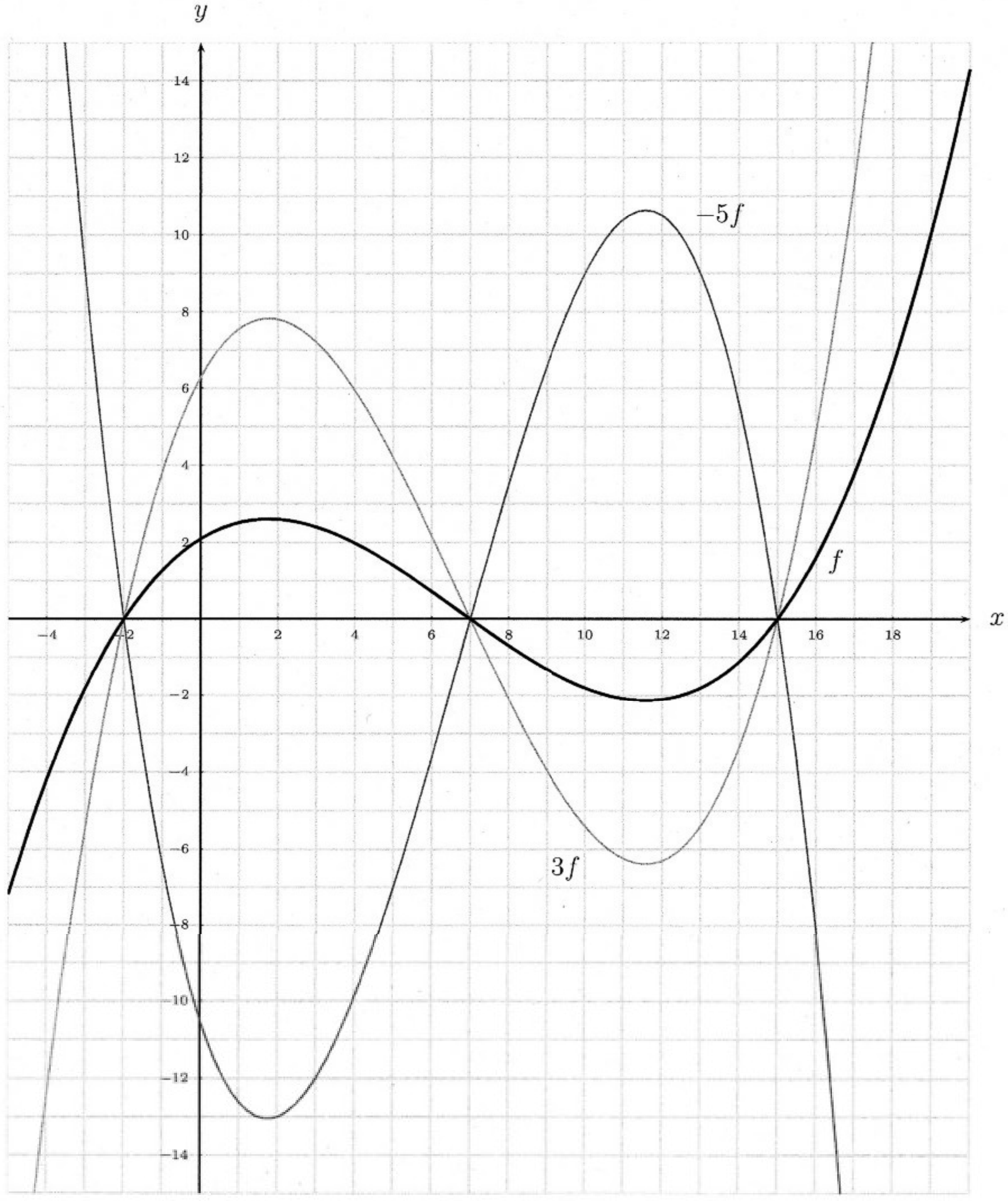
8.5.2 Multiplication d'une fonction par un nombre

Soit f une fonction réelle de domaine de définition D et de domaine d'arrivée A et λ un nombre réel. En d'autres termes, on a $f : D \to A$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On définit la *fonction f multipliée par* λ, notée $\lambda f : D \to A$, par

$$\boxed{(\lambda f)(x) = \lambda f(x)}$$

Voici comment la multiplication d'une fonction f par un nombre modifie le graphe de f.



Pour obtenir le graphe de λf, on multiplie, en chaque point, la hauteur de la fonction f par λ.

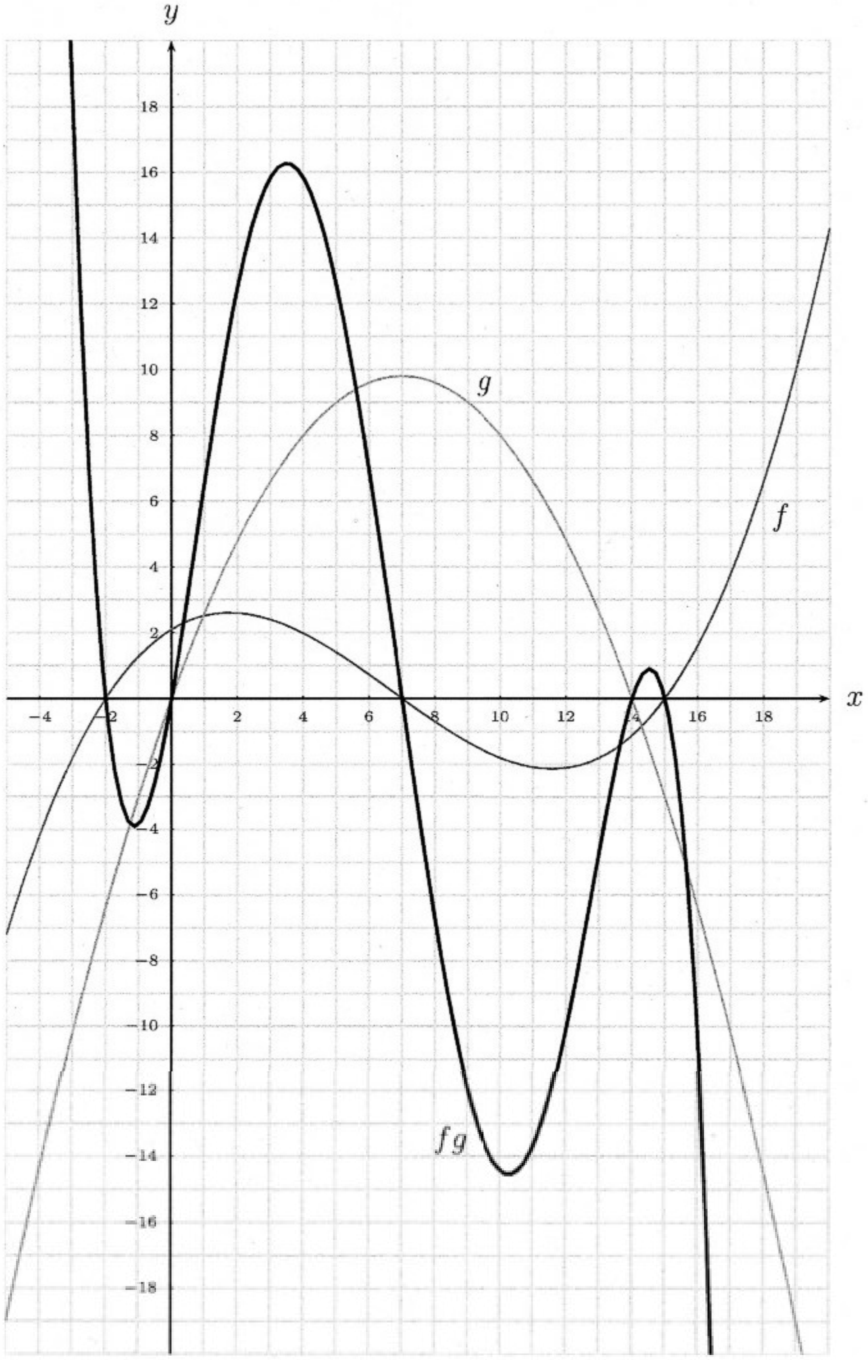
8.5.3 Multiplication de deux fonctions

Soit f et g deux fonctions réelles ayant le même domaine de définition D et le même domaine d'arrivée A. En d'autres termes, on a $f : D \to A$ et $g : D \to A$ avec A, $D \subset \mathbb{R}$.

On définit la *fonction multiplication*, notée $fg : D \to A$, par

$$\boxed{(fg)(x) = f(x)g(x)}$$

Voici comment la multiplication se comporte sur les graphes des fonctions.



Pour obtenir le graphe de fg, on multiplie, en chaque point, les hauteurs de f et de g.

On peut aussi remarquer que fg s'annule exactement là où f ou g s'annulent.

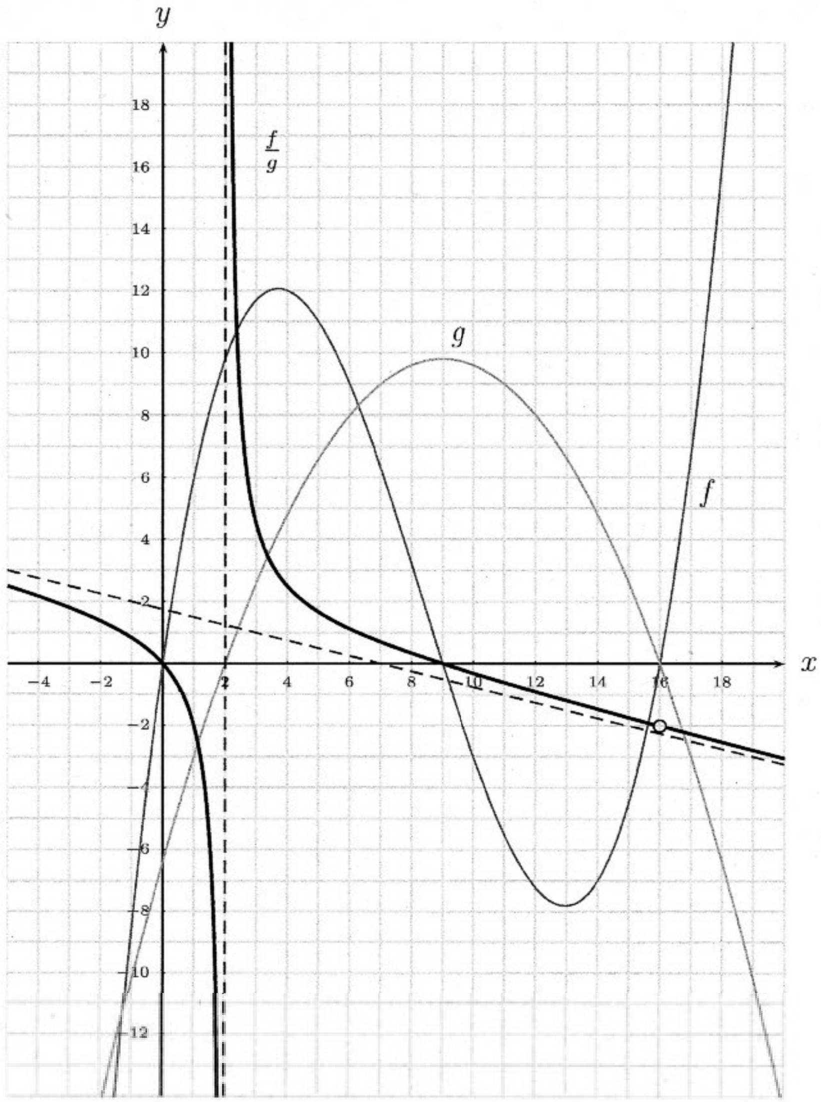
8.5.4 Division d'une fonction par une autre

Soit f et g deux fonctions réelles ayant le même domaine de définition D et le même domaine d'arrivée A. En d'autres termes, on a $f : D \to A$ et $g : D \to A$ avec $A, D \subset \mathbb{R}$. Rappelons que l'on note Z_g l'ensemble des zéros de g (ce sont les points x en lesquels la fonction g s'annule).

On définit la *fonction f divisée par g*, notée $\frac{f}{g} : D \setminus Z_g \to A$, par

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}}$$

Voici comment la multiplication se comporte sur les graphes des fonctions.



Pour obtenir le graphe de fg, on divise, en chaque point, la hauteur de f par celle de g.

Lorsque g s'annule, il peut se produire deux phénomènes pour la fonction f divisée par g. Une asymptote verticale peut apparaître (en $x = 2$ dans l'exemple ci-dessus), mais il peut y avoir un trou dans la fonction (en $x = 16$ dans l'exemple ci-dessus). Ces phénomènes seront étudiés plus en détails dans le chapitre sur les limites.

On voit aussi apparaître ce qu'on appelle une *asymptote oblique* : on y reviendra aussi dans le chapitre sur les limites.

8.5.5 Composition de fonctions

Soit f et g deux fonctions telles que le domaine d'arrivée de f soit le domaine de définition de g, disons $f : D_f \to D_g$ et $g : D_g \to A$ afin que l'on puisse appliquer une fonction après l'autre.

$$\begin{array}{ccccc} D_f & \xrightarrow{f} & D_g & \xrightarrow{g} & A \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Cela nous permet de définir *la fonction g composée avec f*, définie par

$$\begin{array}{ccccc} g \circ f & : & D_f & \longrightarrow & A \\ & & x & \longmapsto & \boxed{(g \circ f)(x) = g(f(x))} \end{array}$$

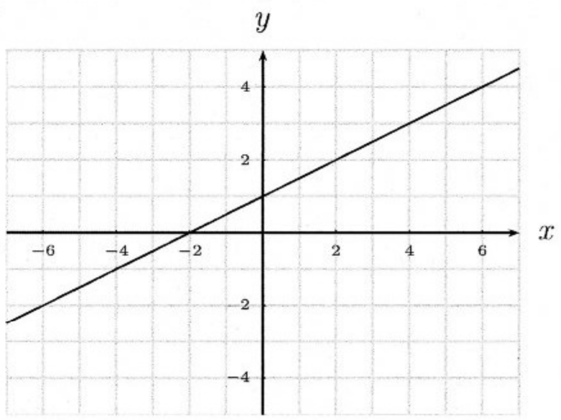
Attention

En général, la fonction $g \circ f$ n'est pas égale à la fonction $f \circ g$. Pour la fonction $g \circ f$, on fait d'abord f, puis g. Tandis que pour la fonction $f \circ g$, on fait d'abord g, puis f.

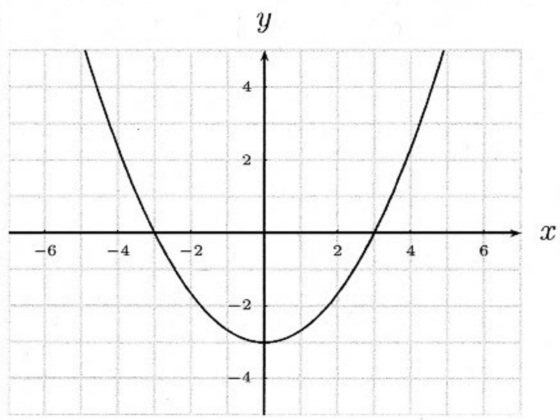
Illustration

Voici le graphe de deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

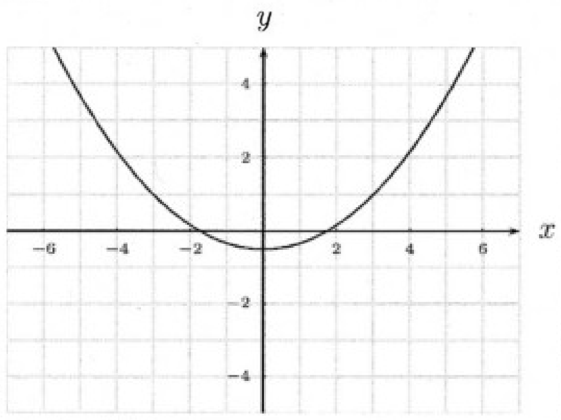


$g(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 9)$

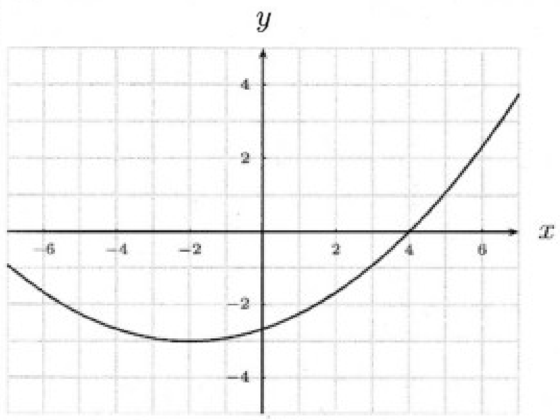


Voici le graphe des deux fonctions composées.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{6}(x^2 - 3)$



$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{12}(x^2 + 4x - 32)$



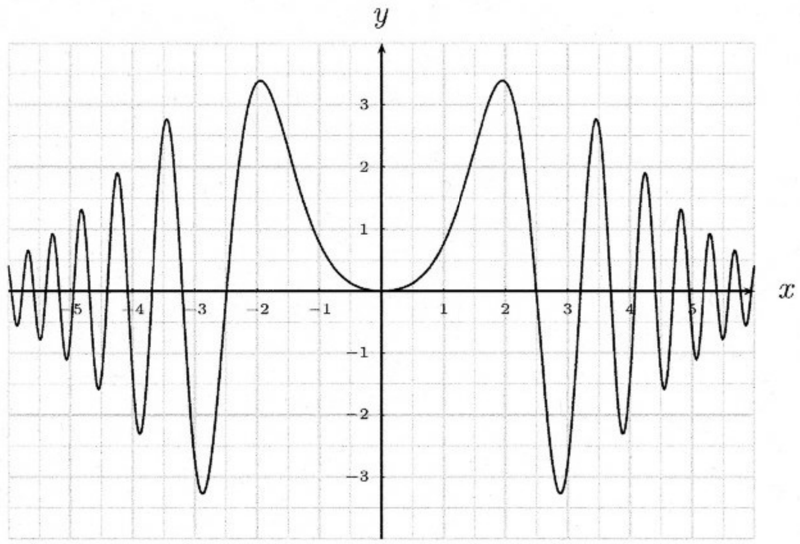
8.6 Les fonctions paires et impaires

Définition

Une fonction réelle $f : D \to \mathbb{R}$ est une *fonction paire* si pour tout $x \in D$, on a

$$f(-x) = f(x)$$

Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe vertical $x = 0$.
Voici le graphe d'une fonction paire.

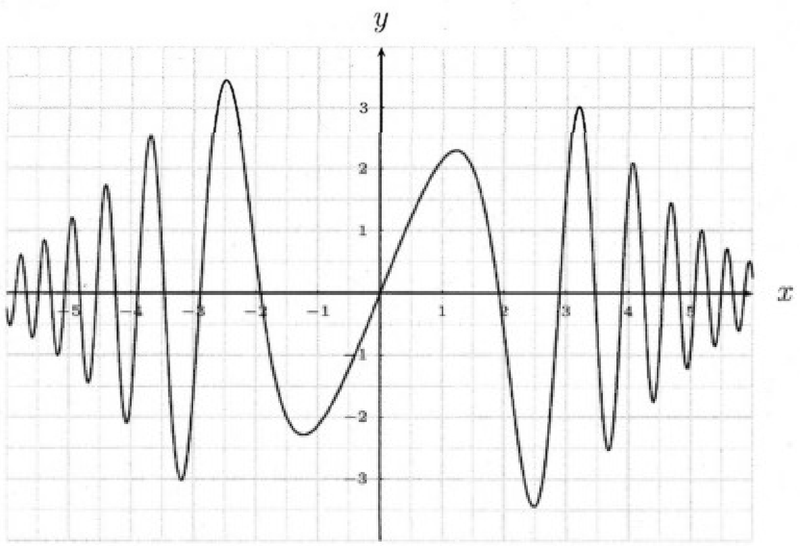


Définition

Une fonction réelle $f : D \to \mathbb{R}$ est une *fonction impaire* si pour tout $x \in D$, on a

$$f(-x) = -f(x)$$

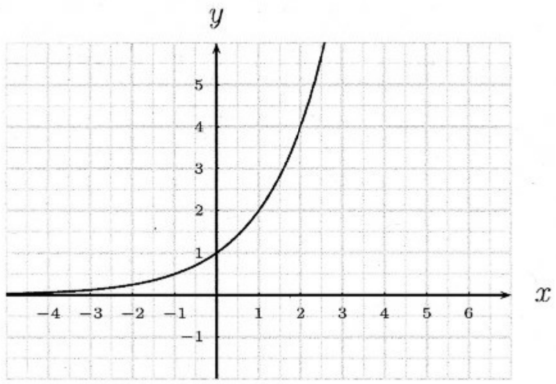
Le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.
Voici le graphe d'une fonction impaire.



Remarques

1. Il existe beaucoup de fonctions ni paires, ni impaires.

   Par exemple $\exp_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto 2^x$ n'est ni paire, ni impaire.

2. Il existe exactement une fonction réelle (définie sur $\mathbb{R}$) qui est paire et impaire en même temps. Il s'agit de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto 0$.

   En effet, si f est une fonction paire et impaire de domaine de définition $D = \mathbb{R}$, alors $f(-x) = f(x)$ (car f est paire) et $f(-x) = -f(x)$ (car f est impaire) et ceci pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Donc, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = -f(x) \iff 2f(x) = 0 \iff f(x) = 0$$

Théorème

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction paire ou impaire.

1. Si x_0 est un zéro de f, alors $-x_0$ est aussi un zéro de f.
2. Si $x_0 \in D$, alors $-x_0 \in D$.

Preuve

1. Si x_0 est un zéro de f, cela signifie que $f(x_0) = 0$.

   Pour montrer que $-x_0$ est un zéro de f, on effectue le calcul suivant :

$$f(-x_0) \overset{f\text{ (im)paire}}{=} \pm f(x_0) = 0$$

2. Si $x_0 \in D$, cela signifie que $f(x_0)$ existe.

   On montre que $-x_0 \in D$, grâce au fait que : $f(-x_0) \overset{f\text{ (im)paire}}{=} \pm f(x_0)$ existe.

Conséquences

On trouve ces conséquences en prenant la contraposée de chacun des points du théorème.

1. Si l'ensemble des zéros d'une fonction contient un nombre x_0, mais pas son opposé $-x_0$, alors la fonction n'est ni paire, ni impaire.
2. Si le domaine de définition d'une fonction contient un nombre x_0, mais pas son opposé $-x_0$, alors la fonction n'est ni paire, ni impaire.

8.7 Tableau de signes d'une fonction continue

Définition

On dit qu'une fonction f est *continue* si on peut dessiner son graphe (au-dessus de son domaine de définition) sans lever le crayon.

Tableau de signes

Le but d'un *tableau de signes* d'une fonction est de pouvoir indiquer le plus simplement possible lorsque la fonction est positive (son graphe est en dessus de l'axe des x) ou négative (son graphe est en dessous de l'axe des x).

Pour faire un tableau de signes, on utilise le fait qu'une fonction CONTINUE ne peut changer de signe que lorsque l'un des deux cas suivants se produit.

1. La fonction a un zéro.
2. Un nombre réel n'est pas dans le domaine de définition de la fonction

Ainsi pour établir le tableau de signes d'une fonction CONTINUE, on procède en trois étapes :

1. On commence par FACTORISER l'expression fonctionnelle de la fonction. Il n'est pas nécessaire de factoriser f le plus possible, mais il faut pouvoir imaginer le graphe de chacun des facteurs.
2. Puis on cherche le domaine de définition et les zéros de la fonction. Ce qui permet de trouver les valeurs où un changement de signes peut se produire. On note ces valeurs dans le tableau de signes en laissant une colonne vide à gauche et à droite de ces valeurs.
3. Il reste ensuite à trouver le signe de la fonction entre ces valeurs (la méthode la plus rapide (et ne nécessitant pas la calculatrice) est expliquée sur la page suivante).

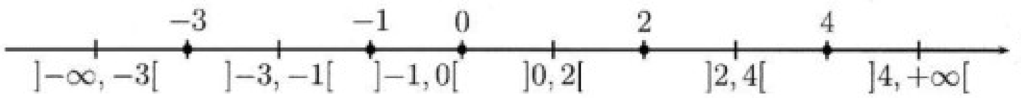
Pour bien comprendre, construisons le tableau de signes de la fonction déjà factorisée :

$$f(x) = \frac{x^2\,(x+3)\,(x-4)}{(x+1)^2\,(x-2)}$$

On voit immédiatement que le domaine de définition de f est $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ et que l'ensemble des zéros de f est $Z_f = \{-3, 0, 4\}$. Le tableau de signes est le suivant :

x		-3		-1		0		2		4	
$f(x)$	$-$	0	$+$	↯	$+$	0	$+$	↯	$-$	0	$+$

La première ligne (celle des x) est une façon plus ciblée de représenter la droite réelle.



De sorte qu'on ait une partition de $\mathbb{R}$ (une colonne par ensemble) :

$\mathbb{R} =]-\infty, -3[\cup \{-3\} \cup]-3, -1[\cup \{-1\} \cup]-1, 0[\cup \{0\} \cup]0, 2[\cup \{2\} \cup]2, 4[\cup \{4\} \cup]4, +\infty[$

La deuxième ligne (celle de $f(x)$) indique si la fonction est nulle, négative (symbole $-$), positive (symbole $+$) ou non définie (symbole ↯).

La méthode la plus rapide pour compléter les signes d'un tableau de signes

Pour simplifier, on va raisonner sur la base de l'exemple précédent (et ceci sans calculatrice). On commence par regarder le signe de $f(x)$ lorsque $x \in]-\infty, -3[$ (cela correspond à la deuxième colonne du tableau). En utilisant la règle des signes, on a :

$$f(\text{ un } x \text{ plus petit que } -3\ ) \;=\; \frac{+\ -\ -}{+\ -} \;=\; -$$

Ainsi la fonction est négative lorsque $x \in]-\infty, -3[$ (il est peut être plus aisé de penser à un nombre extrêmement loin dans les négatifs).

Ensuite, on remonte la droite réelle vers les nombres positifs. Pour trouver le signe correspondant à $f(x)$ pour $x \in]-3, -1[$, on peut tester avec un nombre quelconque dans cet intervalle, comme -2 par exemple. On a :

$$f(\,-2\,) \;=\; \frac{+\ +\ -}{+\ -} \;=\; +$$

On remarque ainsi que $f(-2)$ est positif. Néanmoins, si on observe plus attentivement ce qui s'est passé, on remarque que seul le signe en haut au milieu a changé. C'est le signe de $(x+3)$. Ce n'est pas un hasard :

> DANS UN TABLEAU DE SIGNES, SEUL LE TERME RESPONSABLE DE LA PRÉSENCE DE LA VALEUR CORRESPONDANTE DANS LE TABLEAU EST RESPONSABLE D'UN ÉVENTUEL CHANGEMENT DE SIGNE !

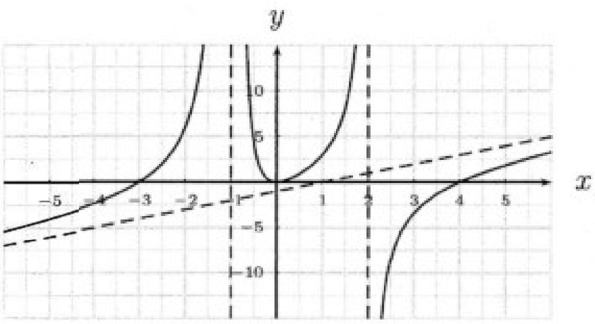
Voici comment on peut raisonner pour trouver les signes :

On cherche ...	On trouve ...	Pourquoi l'a-t-on trouvé
le premier signe tout à gauche	la fonction est négative	on a calculé le signe de $f(x)$ pour une valeur de x plus petite que -3
si $f(x)$ change de signe en -3	le signe change (la fonction est positive)	car $(x+3)$ change de signe en -3 (comme le montre le graphe de $(x+3)$)
si $f(x)$ change de signe en -1	le signe ne change pas (la fonction est positive)	car $(x+1)^2$ ne change pas de signe en -1 (comme le montre le graphe de $(x+1)^2$)
si $f(x)$ change de signe en 0	le signe ne change pas (la fonction est positive)	car x^2 ne change pas de signe en 0 (comme le montre le graphe de x^2)
si $f(x)$ change de signe en 2	le signe change (la fonction est négative)	car $(x-2)$ change de signe en 2 (comme le montre le graphe de $(x-2)$)
si $f(x)$ change de signe en 4	le signe change (la fonction est positive)	car $(x-4)$ change de signe en 4 (comme le montre le graphe de $(x-4)$)

Avec cette méthode, on a même un moyen pour vérifier si on a fait une erreur (en fait un nombre impair d'erreurs). En effet, il suffit de vérifier le signe tout à droite en calculant le signe de $f(x)$ pour une valeur de x plus grande que 4.

À titre indicatif, voici le graphe de cette fonction (le lecteur devrait s'apercevoir que faire un tableau de signes est beaucoup plus rapide que d'esquisser le graphe de la fonction).

Cette fonction a deux asymptotes verticales et une asymptote oblique.



Deuxième exemple

On cherche à établir le tableau de signes de la fonction

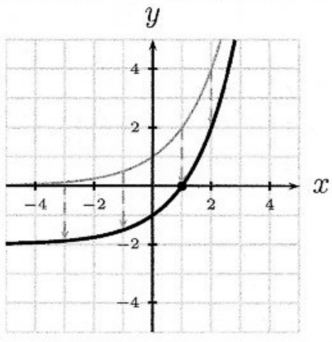
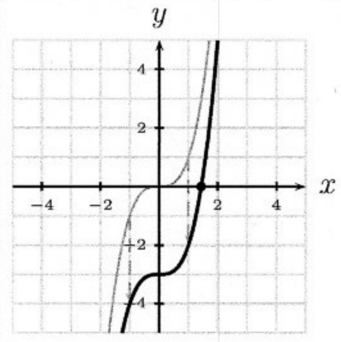
$$f(x) = \frac{(2^x - 2)(x^2 + x + 1)(x^3 - 3)}{(3 - x)(x^2 - 4)(x - 4)^2}$$

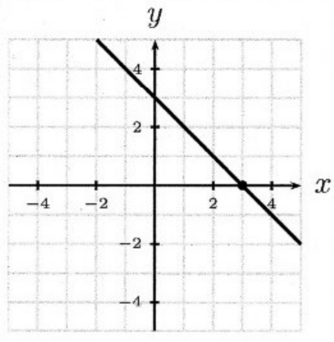
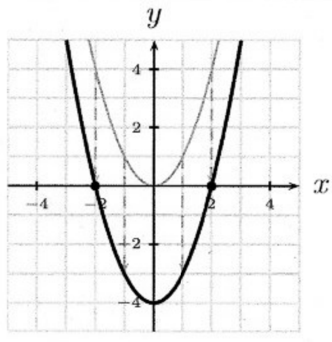
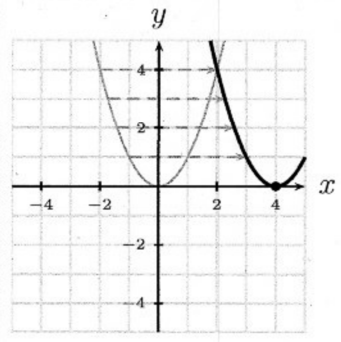
1. La fonction est déjà factorisée. On pourrait la factoriser plus, car

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$
$$x^3 - 3 = (x - \sqrt[3]{3})(x^2 + \sqrt[3]{3}x + \sqrt[3]{9})$$

De plus, comme le discriminant de $x^2 + x + 1$ est négatif, on sait que $x^2 + x + 1$ ne s'annule pas. Il est même évident que $x^2 + x + 1$ est toujours positif.

On peut maintenant imaginer les graphes de chaque facteur.

$2^x - 2$	$x^2 + x + 1$	$x^3 - 3$
	Comme le discriminant est négatif $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ la fonction ne s'annule pas et ainsi, $x^2 + x + 1$ est toujours positif.	

$3 - x$	$x^2 - 4$	$(x - 4)^2$
		

2. Le domaine de définition est $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2, 3, 4\}$.
Les zéros sont $Z = \{1, \sqrt[3]{3}\}$.

3. Pour établir le tableau de signes, on utilise le fait que $1 = \sqrt[3]{1} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{8} = 2$.

x		-2		1		$\sqrt[3]{3}$		2		3		4	
$f(x)$	$+$	↯	$-$	0	$+$	0	$-$	↯	$+$	↯	$-$	↯	$-$

On commence par la gauche en regardant le signe de chacun des termes. Puis on regarde si on doit changer de signes. En fait, on voit sur les graphes que seul en $x = 4$ on ne changera pas de signe.

8.8 L'injectivité, la surjectivité et la bijectivité

Lecture de l'injectivité, de la surjectivité et de la bijectivité sur un graphe

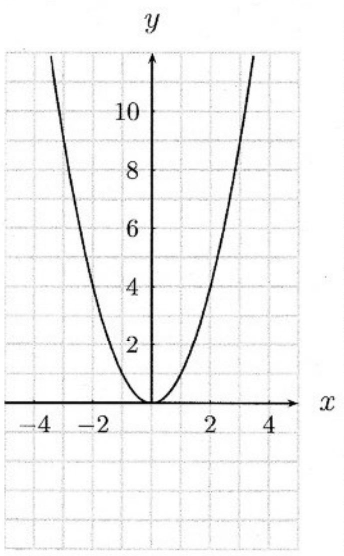
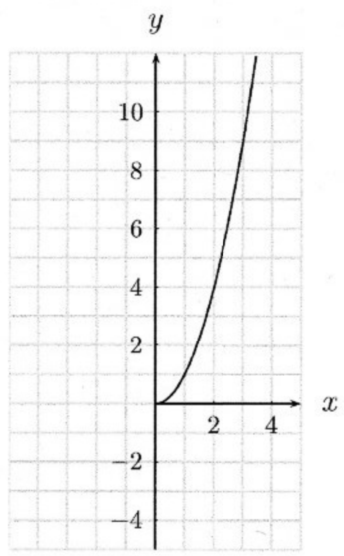
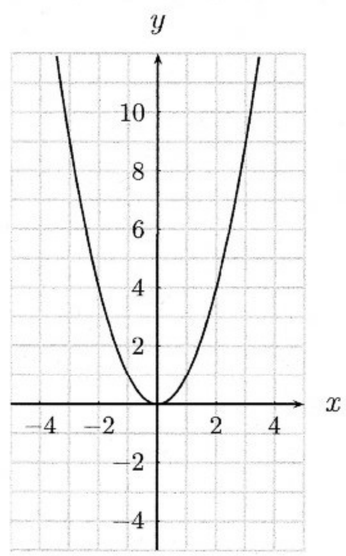
On dessine le graphe d'une fonction réelle $f : D \to A$.
Rappelons que le domaine de définition de f, noté D, et que le domaine d'arrivée de f, noté A sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ (car la fonction est réelle). C'est-à-dire D, $A \subset \mathbb{R}$.

Pour lire ces trois notions, on effectue *test de la droite horizontale*.

1. La fonction f est *injective* si CHAQUE droite horizontale (dont la hauteur est un nombre du domaine d'arrivée A) coupe le graphe AU PLUS une fois.
2. La fonction f est *surjective* si CHAQUE droite horizontale (dont la hauteur est un nombre du domaine d'arrivée A) coupe le graphe AU MOINS une fois.
3. La fonction f est *bijective* si elle est injective ET surjective.

   Autrement dit, si CHAQUE droite horizontale (dont la hauteur est un nombre du domaine d'arrivée A) coupe le graphe EXACTEMENT une fois.

Exemples

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0};\ x \mapsto x^2$	$g : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R};\ x \mapsto x^2$	$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto x^2$
		

On voit que

- la fonction f est surjective (puisque toute droite horizontale de hauteur positive ou nulle coupe le graphe AU MOINS une fois), mais elle n'est pas injective car la droite horizontale de hauteur 4 coupe DEUX fois le graphe.

- la fonction g est injective (puisque toute droite horizontale de hauteur quelconque coupe le graphe AU PLUS une fois), mais elle n'est pas surjective car la droite horizontale de hauteur -2 ne coupe JAMAIS le graphe.

- la fonction h n'est ni injective, ni surjective.

- aucune de ces fonctions n'est bijective.

Définitions algébriques de l'injectivité, de la surjectivité et de la bijectivité

Soit f une fonction de domaine de définition D et de domaine d'arrivée A.

1. Voici plusieurs façons équivalentes de définir l'injectivité de f.

   On dit que f est *injective* lorsque

   a) Si un élément de A est image d'un élément de D, alors il ne l'est que d'un seul.

   b) Si pour tout x_1 et x_2 dans D tels que $x_1 \neq x_2$, alors $f(x_1) \neq f(x_2)$.

   c) Pour tout x_1 et x_2 dans D tels que $f(x_1) = f(x_2)$, on a $x_1 = x_2$.

   d) Pour chaque $y \in A$, il existe *au plus* un $x \in D$ tel que $f(x) = y$.

   f n'est pas injective s'il existe x_1 et x_2 dans D tels que $f(x_1) = f(x_2)$ et $x_1 \neq x_2$.

2. Voici plusieurs façons équivalentes de définir la surjectivité de f.

   On dit que f est *surjective* lorsque

   a) Tout élément de A est image d'un élément (au moins) de D.

   b) $f(D) = A$ (autrement dit $A \subset f(D)$ car $f(D) \subset A$ est toujours vrai).

   c) Pour chaque $y \in A$, il existe *au moins* un $x \in D$ tel que $f(x) = y$.

   f n'est pas surjective s'il existe un $y \in A$ qui n'est image d'aucun élément $x \in D$.

3. Voici plusieurs façons équivalentes de définir la bijectivité de f.

   On dit que f est *bijective* lorsque

   a) f est injective et surjective.

   b) Pour chaque $y \in A$, il existe *exactement* un $x \in D$ tel que $f(x) = y$.

Pour les démonstrations

Lorsqu'on cherche à montrer que f est injective, il est habituel de montrer 1c). Néanmoins, la différence entre 1d), 2c) et 3b) venant du mot en italique (pour 1d), c'est *au plus* ; pour 2c), c'est *au moins* ; pour 3b), c'est *exactement*), on peut aussi montrer l'injectivité avec 1d), la surjectivité avec 2c) ou directement la bijectivité avec 3b).

Exemple. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto 2x + 1$.

1. Montrons que f est injective avec 1c).

   Soit x_1 et x_2 dans $D = \mathbb{R}$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. À montrer $x_1 = x_2$.

   $$f(x_1) = f(x_2) \overset{\text{définition de } f}{\Longrightarrow} 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \overset{-1}{\Longrightarrow} 2x_1 = 2x_2 \overset{:2}{\Longrightarrow} x_1 = x_2$$

   Remarquons qu'ici, on n'a pas besoin du sens '$\Longleftarrow$'.

2. Montrons directement que f est bijective avec 3b).

   Pour chaque $y \in A = \mathbb{R}$, on cherche *exactement* un $x \in D = \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.

   $$f(x) = y \overset{\text{définition de } f}{\Longleftrightarrow} 2x + 1 = y \overset{-1}{\Longleftrightarrow} 2x = y - 1 \overset{:2}{\Longleftrightarrow} x = \frac{y-1}{2}$$

   Remarquons qu'ici, on a vraiment besoin des équivalences '$\Longleftrightarrow$'.

8.8.1 Utilité de l'injectivité pour les équations

Si f est une fonction injective, alors on a, pour x_1 et x_2 dans D :

$$x_1 = x_2 \Longleftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

En effet, l'implication '$\Longrightarrow$' est due au fait que f est une fonction et l'implication '$\Longleftarrow$' au fait que cette fonction est injective.

Cela signifie que si, dans une équation, on applique une fonction injective de chaque côté de l'égalité, alors on obtient une équation équivalente. Les fonctions injectives correspondent aux OPÉRATIONS RÉVERSIBLES vues précédemment (voir page 36, section 4.1).

Exemples

1. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto x^2$ n'est pas injective. Ainsi, on a

$$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4, \quad \text{mais} \quad x^2 = 4 \not\Rightarrow x = 2$$

2. Par contre, la fonction $g : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \sqrt{x}$ est injective, donc

$$x^2 = 4 \iff \sqrt{x^2} = 2 \iff |x| = 2 \iff x = \pm 2$$

Cela aurait aussi pu se voir grâce à la factorisation $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$.

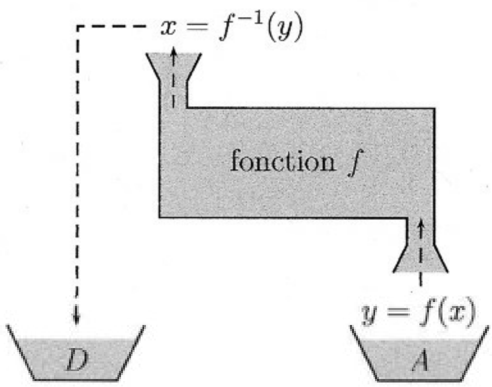
8.9 Les fonctions réciproques

Lorsqu'on considère une fonction $f : D \to A;\ x \mapsto f(x)$, il est intéressant de savoir si on peut trouver une fonction qui fait l'opération inverse, que l'on noterait f^{-1} (ou ${}^r f$).

Faire l'opération inverse revient à résoudre, pour chaque $y \in A$, l'équation $f(x) = y$ (dont l'inconnue est x).

Théorème

Ces équations ont une UNIQUE solution en x pour CHAQUE y dans A si et seulement si f est une fonction bijective.



Définition. Si $f : D \to A$ est bijective, alors la *fonction réciproque de* f, notée f^{-1} (ou ${}^r f$), est définie par :

$$f^{-1} : A \to D;\ y \mapsto f^{-1}(y)$$

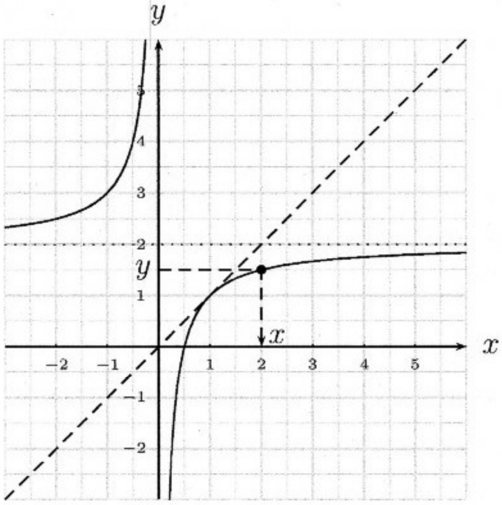
où, pour chaque $y \in A$, $f^{-1}(y)$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = y$ (d'inconnue x).

Preuve du théorème Elle tient en deux arguments :

- Dire que l'équation $f(x) = y$ (d'inconnue x) admet au moins une solution pour chaque y dans A est équivalent à dire que f est surjective (par définition).
- Dire que l'équation $f(x) = y$ (d'inconnue x) admet au plus une solution pour chaque y dans A est équivalent à dire que f est injective (par définition). $\square$

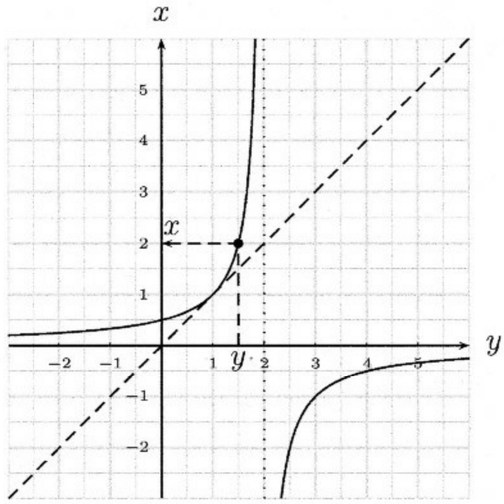
Illustration par un exemple (à lire comme une bande dessinée)

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$$
$$x \mapsto \frac{2x-1}{x}$$



Voir la réciproque f^{-1} sur le graphe de f, c'est lire le graphe à l'envers (en partant des y et en allant sur les x).

$$f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
$$y \mapsto \frac{1}{2-y}$$



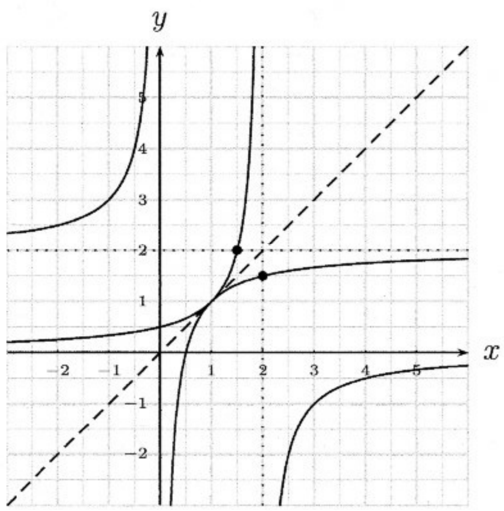
Il peut être plus pratique d'échanger les axes afin de la lire plus habituellement (l'axe des x devient celui des y)

Mais la coutume veut qu'on écrive la fonction réciproque en x (au lieu de y).

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\};\ x \mapsto \frac{2x-1}{x}$$

$$f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\};\ x \mapsto \frac{1}{2-x}$$

Si on représente graphiquement les deux fonctions sur le même repère, on voit que ces graphes sont symétriques et que l'AXE DE SYMÉTRIE est la droite d'équation $y = x$ (qui coupe le plan à l'origine avec un angle de 45°).



Calcul algébrique de la réciproque de cet exemple

Pour CHAQUE $y \in A$, on cherche l'UNIQUE $x \in D$ tel que $f(x) = y$.

$$f(x) = y \iff \frac{2x-1}{x} = y \iff 2x - 1 = yx \iff 2x - yx = 1 \iff x(2-y) = 1$$
$$\iff x = \frac{1}{2-y} \qquad \text{Donc : } f^{-1}(y) = \frac{1}{2-y} \quad \text{ou mieux} \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{2-x}$$

Le lecteur attentif remarquera que ce calcul est similaire à ceux de la page 94 (voir 1d) pour l'injectivité, 2c) pour la surjectivité et 3b) pour la bijectivité). Ici, on ne doit trouver qu'une seule valeur de x possible (ce qui montre directement que f est bijective).

Propriétés de la fonction réciproque

Soit $f : D \to A$ une fonction bijective et $f^{-1} : A \to D$ sa fonction réciproque.

1. On a $f^{-1}(f(x_0)) = x_0$ pour tout $x_0 \in D$.
2. On a $f(f^{-1}(y)) = y$ pour tout $y \in A$.
3. f^{-1} est bijective.

Les propriétés 1 et 2 montrent que la fonction définie est bien la fonction inverse de f.

Théorème de la fonction réciproque

Soit $f : D \to A$ une fonction.

Supposons qu'il existe une fonction $g : A \to D$ satisfaisant les propriétés suivantes.

1. $g(f(x)) = x$ pour tout x dans D.
2. $f(g(y)) = y$ pour tout y dans A.

Alors, f est bijective et $g = f^{-1}$ (donc g est bijective).

Moralité. Ce théorème montre que s'il existe une fonction g qui satisfait les mêmes propriétés que celles de la fonction inverse de f, alors cette fonction g est égale à la fonction réciproque. On peut ainsi trouver la réciproque d'une fonction f sans montrer qu'elle est bijective, seulement en vérifiant ses propriétés 1 et 2.

Conséquence du théorème

Soit $f : D \to A$ une fonction bijective. Alors $(f^{-1})^{-1} = f$.

Preuve des propriétés de la fonction réciproque

1. Soit $x_0 \in D$ (on utiliserait volontiers x, mais c'est déjà l'inconnue de l'équation ci-dessous).

   Par définition de f^{-1}, $f^{-1}(f(x_0))$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = f(x_0)$ (d'inconnue x). Mais on voit que x_0 est aussi solution de cette équation.
   Ainsi, comme cette équation n'admet qu'une unique solution, on doit avoir

   $$f^{-1}(f(x_0)) = x_0$$

2. Soit $y \in A$.

   Par définition de la fonction réciproque, $f^{-1}(y)$ est solution de l'équation $f(x) = y$ (d'inconnue x). Ainsi, on a $f(f^{-1}(y)) = y$ (en remplaçant x par $f^{-1}(y)$).

3. Pour montrer que f^{-1} est bijective, on va montrer qu'elle est injective et surjective.
   (a) Pour montrer que f^{-1} est injective, il faut montrer que, pour tout y_1 et y_2 dans A, on a

   $$f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) \Longrightarrow y_1 = y_2$$

   C'est le cas, car si $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$, alors en appliquant f à chaque terme de l'égalité on trouve $f(f^{-1}(y_1)) = f(f^{-1}(y_2))$. Par le point 2. de la preuve, on a

   $$y_1 = f(f^{-1}(y_1)) = f(f^{-1}(y_2)) = y_2$$

(b) Pour montrer que f^{-1} est surjective, il faut montrer que, pour tout x dans D (c'est le domaine d'arrivée de f^{-1}), on peut trouver y dans A (c'est le domaine de définition de f^{-1}) tel que $f^{-1}(y) = x$.

Choisissons un x quelconque dans D. Il faut trouver un y (au moins) dans A tel que $f^{-1}(y) = x$. Essayons $y = f(x)$ (on n'a pas trop le choix, car à partir des objets mathématiques x et f, il faut trouver un élément de A, il est donc naturel de tenter $y = f(x)$).

Pour vérifier que ce candidat est le bon, il faut montrer que $f^{-1}(f(x)) = x$. C'est le cas grâce au point 1. de la preuve.

$\square$

Preuve du théorème de la fonction réciproque

1. Montrons que f est bijective en montrant qu'elle est injective et surjective.
   (a) Pour montrer que f est injective, il faut montrer que, pour tout x_1 et x_2 dans D, on a
   $$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$
   C'est le cas, car si $f(x_1) = f(x_2)$, alors en appliquant g à chaque terme de l'égalité on trouve $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Par l'hypothèse 1 de l'énoncé du théorème, on a
   $$x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$$
   (b) Pour montrer que f est surjective, il faut montrer que, pour tout y dans A, on peut trouver x dans D tel que $f(x) = y$.

   Choisissons un y dans A. Il faut trouver un x dans D tel que $f(x) = y$. Essayons $x = g(y)$ (on n'a pas trop le choix, car à partir des objets mathématiques y et g, il faut trouver un élément de D, il est donc naturel de tenter $g(y)$).

   Pour vérifier que ce candidat est le bon, il faut montrer que $f(g(y)) = y$. C'est le cas grâce à l'hypothèse 2 de l'énoncé du théorème.
2. Montrons que $g = f^{-1}$.

   Pour montrer que les fonctions $g : A \to D$ et $f^{-1} : A \to D$ sont les mêmes, on doit montrer que
   $$g(y) = f^{-1}(y) \quad \text{pour tout } y \text{ dans } A$$
   Soit y dans A, pour montrer que $g(y) = f^{-1}(y)$, il faut montrer que $g(y)$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x (voir la définition de f^{-1}).

   On constate que $f(g(y)) = y$ par l'hypothèse 2 de l'énoncé du théorème. Donc $g(y)$ est solution de l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x. Comme cette équation admet une unique solution (car f est injective), notée $f^{-1}(y)$, on a $g(y) = f^{-1}(y)$.

$\square$

Preuve de la conséquence du théorème

Comme f est bijective, alors on peut parler de la fonction réciproque $f^{-1} : A \to D$ dont les propriétés sont

1. On a $f^{-1}(f(x)) = x$ pour tout $x \in D$.
2. On a $f(f^{-1}(y)) = y$ pour tout $y \in A$.

En appliquant le théorème pour $g = f^{-1}$, on obtient $f = (f^{-1})^{-1}$ $\square$