Fonctions

Fonctions linéaires, affines et constantes

§ 1. Fonctions linéaires

Comme il existe une infinité de fonctions différentes, on les classe par catégories.

La première catégorie est constituée par les **fonctions linéaires**.

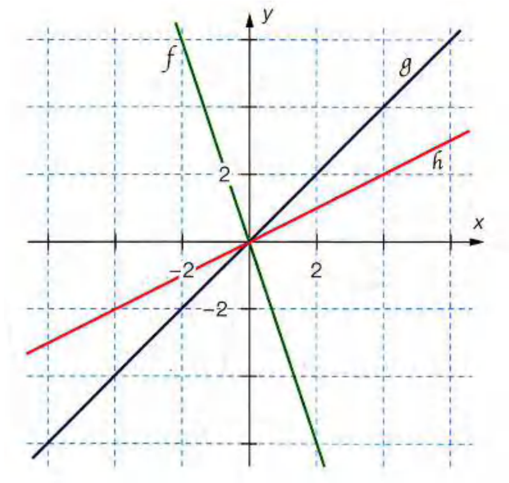
Une **fonction linéaire** est une fonction de la forme $x \; --->\; un\,nombre \cdot x$, que l'on résume en $x \; ---> \; ax$ (a étant un nombre connu, x étant la variable).

Le nombre a s'appelle le **facteur de linéarité** (ou **coefficient de linéarité**).

La représentation graphique d'une fonction linéaire est toujours une droite qui passe par l'origine des axes.

Le **nombre a correspond en fait à la pente de la droite**.

Un cas particulier est la fonction où $a = 1$. La fonction $x \; ---> \; x$ est appelée **fonction identité** (voir la fonction g ci-dessous).



$f: x \longmapsto -3x$

$g: x \longmapsto x$

$h: x \longmapsto 0{,}5x$

§ 2. Propriétés des fonctions linéaires

Dans le tableau ci-dessous, tous les nombres de la première ligne ont été multipliés par 3 pour obtenir leurs images, qui constituent la seconde ligne du tableau:

Ensemble de départ	3	4	7	8	11	32	50	...	n
Ensemble d'arrivée	9	12	21	24	33	96	150	...	$3n$

× 3 *facteur de linéarité*

× 4

propriété de la somme *propriété du produit*

On remarque que ce tableau correspond aux tableaux que l'on fait lorsqu'on veut appliquer la règle de trois (à part qu'ici le tableau est horizontal, alors que dans la règle de trois il est vertical).

On peut donc dire que les fonctions linéaires reliant un ensemble de départ et un ensemble d'arrivée correspondent à la proportionnalité entre les nombres de l'ensemble de départ et les nombres de l'ensemble d'arrivée.

Ainsi, si par exemple on double la valeur du nombre de départ, la valeur de l'image est aussi doublée. De même, si on additionne deux valeurs de l'ensemble de départ, la valeur de l'image est l'addition des images des valeurs choisies au départ.

Les fonctions linéaires satisfont donc aux propriétés suivantes:

- l'image d'une somme de nombres est égale à la somme de leurs images (**propriété de la somme**).
- l'image du double (du triple, ...) d'un nombre est égale au double (au triple, ...) de son image (**produit du produit**).

Seules les fonctions linéaires jouissent de ces propriétés.

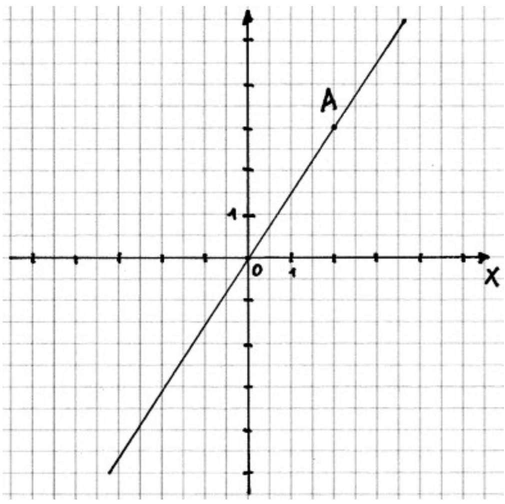
§ 3. Retrouver l'expression d'une fonction linéaire

On a parfois besoin de **retrouver l'expression fonctionnelle d'une fonction linéaire** dont le graphe est donné.

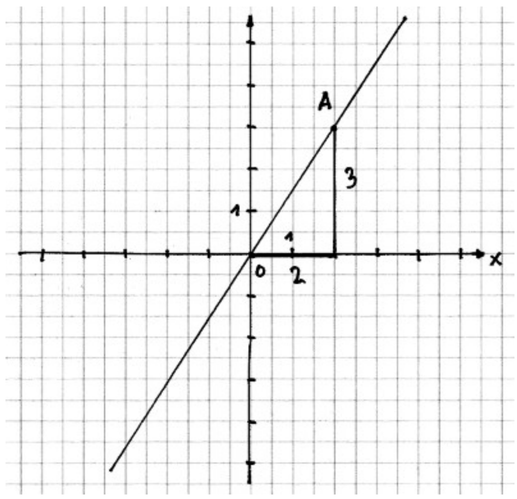
De manière générale, on sait que l'expression fonctionnelle d'une fonction linéaire est de la forme $x \;---> \; ax$, où a est la pente de la droite. Il suffit donc de trouver la pente de la droite pour obtenir l'expression fonctionnelle correspondante.

Exemple 1:

Trouver l'expression fonctionnelle de la fonction représentée par le graphe suivant:



On remarque tout d'abord que la droite passe par le point A(2;3). En tenant compte de ce point et de l'origine, on peut alors représenter un triangle rectangle dont les extrémités de l'hypoténuse sont l'origine et A et les côtés de l'angle droit sont horizontal et vertical:



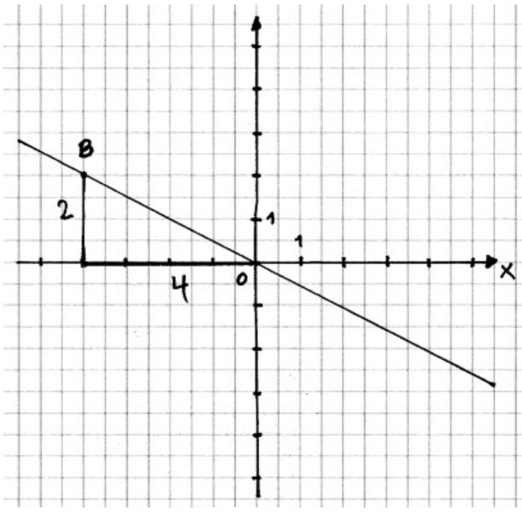
Les côtés de l'angle droit valent 2 et 3 (puisque les coordonnées de A sont 2 et 3).

Ainsi la pente de la droite est $a = \frac{3}{2} = 1,5$.

Par conséquent, l'expression fonctionnelle cherchée est $x \;---> \; 1,5x$.

Exemple 2:

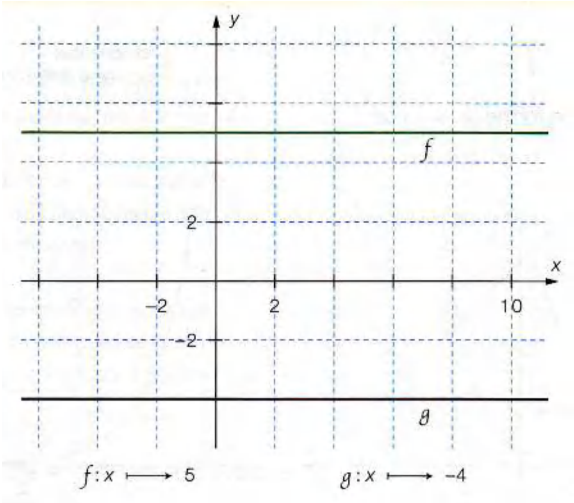
Trouver l'expression fonctionnelle de la fonction représentée par le graphe suivant:



On remarque tout d'abord que la droite passe par le point B(-4;2). En tenant compte de ce point et de l'origine, on peut alors représenter un triangle rectangle dont les extrémités de l'hypoténuse sont l'origine et B et les côtés de l'angle droit sont horizontal et vertical:
Les côtés de l'angle droit valent 4 et 2 (puisque les coordonnées de B sont -4 et 2).
Ainsi la pente de la droite est $a = \frac{2}{4} = 0,5$. Cependant, comme la fonction est décroissante, la pente est négative et, donc, on a $a = -0,5$ (dans l'exemple 1, la fonction était croissante et la pente était positive).
Par conséquent, l'expression fonctionnelle cherchée est $x ---> -0,5x$.
Ainsi, **si la fonction linéaire est croissante, sa pente est positive et, si la fonction linéaire est décroissante, sa pente est négative** (on doit rajouter un "-" devant le calcul de la pente).

§ 4. Fonctions constantes

Une **fonction constante** est une fonction de la forme $x ---> un\ nombre$, que l'on résume en $x ---> b$ (b étant un nombre connu). On remarque que la variable x n'apparaît pas dans l'expression de l'image d'une telle fonction.
La représentation graphique d'une fonction constante est une droite parallèle à l'axe des abscisses:



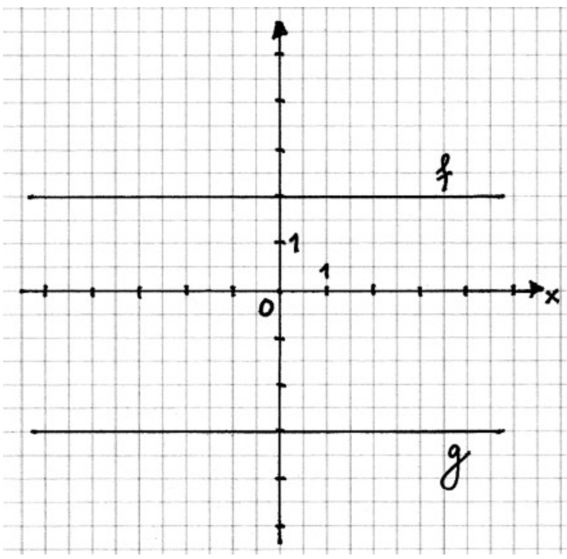
§ 5. Retrouver l'expression d'une fonction constante

On a parfois besoin de **retrouver l'expression fonctionnelle d'une fonction constante** dont le graphe est donné.

De manière générale, on sait que l'expression fonctionnelle d'une fonction constante est de la forme $x \; --->\; a$, où a est un nombre fixé. En fait, ce nombre correspond à l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe vertical; on l'appelle **ordonnée à l'origine** ou **hauteur à l'origine**. Il suffit donc de trouver la pente de la droite pour obtenir l'expression fonctionnelle correspondante.

Exemple:

Trouver l'expression fonctionnelle des fonctions représentées par les graphes suivants:



On remarque que la fonction f a une ordonnée à l'origine valant 2, alors que celle de g vaut -3. Par conséquent, l'expression fonctionnelle de f est $f: x \;--->\; 2$ et l'expression fonctionnelle de g est $g: x \;--->\; -3$,

§ 6. Fonctions affines

Une **fonction affine** est une fonction de la forme

$$x \;--->\; \textit{un nombre} \cdot x + \textit{un autre nombre},$$

que l'on résume en $x \;--->\; ax+b$ (a et b étant des nombres connus, x étant la variable).

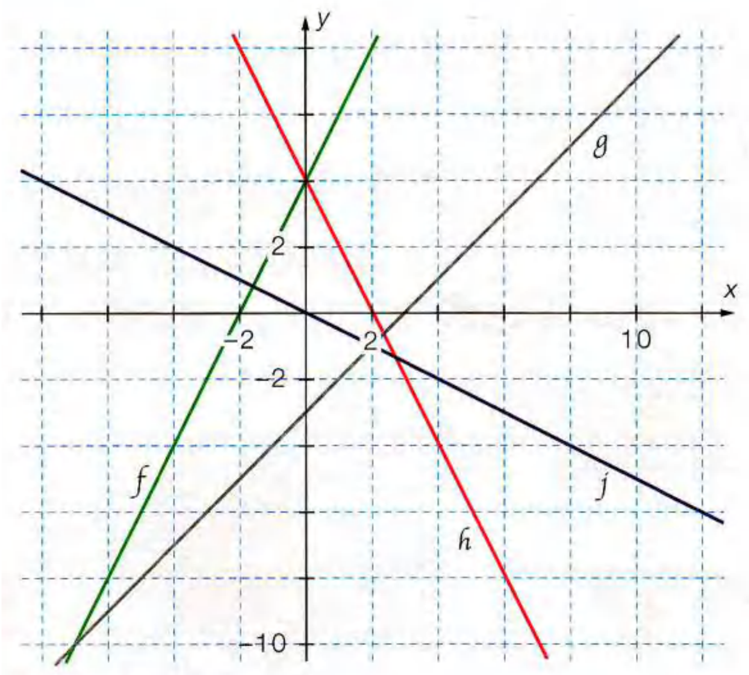
La représentation graphique d'une fonction affine est une droite (qui ne passe pas forcément par l'intersection des axes et qui n'est pas forcément horizontale).

$f: x \longmapsto 2x+4$

$g: x \longmapsto x-3$

$h: x \longmapsto -2x+4$

$j: x \longmapsto -0{,}5x$



On remarque qu'une fonction linéaire est une fonction affine pour laquelle $b=0$. Ainsi b est le nombre correspond à la distance entre l'origine des axes et le point d'intersection du graphe de la fonction et de l'axe y ou axe vertical. C'est pourquoi on appelle b l'**ordonnée à l'origine** ou la **hauteur à l'origine**.

Le graphe de la fonction *f* ci-dessus coupe l'axe y au point (0 ; 4). On a donc: $b=4$.

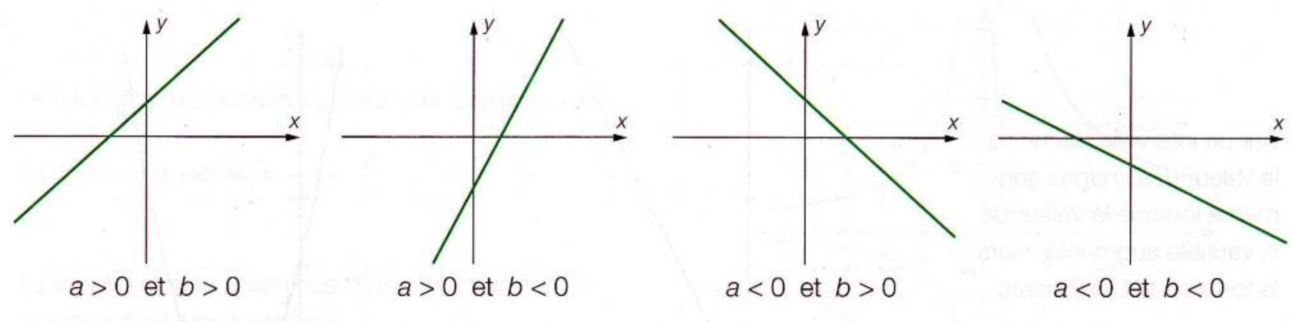
Le graphe de la fonction *g* ci-dessus coupe l'axe y au point (0 ; -3). On a donc: $b = -3$.

Le graphe de la fonction *h* ci-dessus coupe l'axe y au point (0 ; 4). On a donc: $b = 4$.

Le graphe de la fonction *j* ci-dessus coupe l'axe y au point (0; 0). On a donc: $b = 0$. La fonction *j* est linéaire.

Le nombre qui multiplie la variable *x* (le nombre *a*) est, comme dans les fonctions linéaires, la **pente de la droite**.

Voici des schémas de graphiques où les valeurs des nombres *a* et *b* sont positives ou négatives:



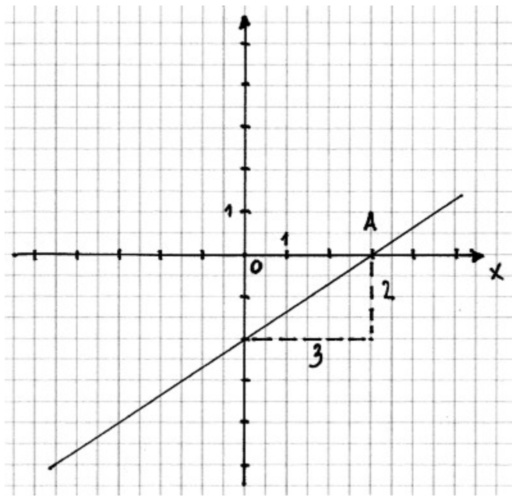
§ 7. Retrouver l'expression d'une fonction affine

On a parfois besoin de **retrouver l'expression fonctionnelle d'une fonction affine** dont le graphe est donné.

De manière générale, on sait que l'expression fonctionnelle d'une fonction affine est de la forme $x \; ---> \; ax+b$, où a est la pente de la droite et b l'ordonnée ou hauteur à l'origine. Il suffit donc de trouver la pente de la droite et son ordonnée à l'origine pour obtenir l'expression fonctionnelle correspondante.

Exemple 1:

Trouver l'expression fonctionnelle de la fonction représentée par le graphe suivant:



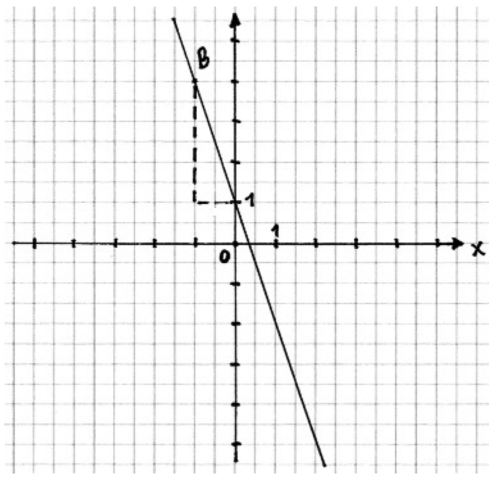
On remarque tout d'abord que l'ordonnée à l'origine du graphe est -2. Ainsi, $b = -2$.

En outre, le graphe passe par le point A(3;0), ce qui nous permet de dessiner le triangle rectangle pour calculer la pente de la droite: les côtés de l'angle droit valent 3 et 2 et la pente est $a = \frac{2}{3}$.

Par conséquent, l'expression fonctionnelle cherchée est $x \; ---> \; \frac{2}{3}x - 2$.

Exemple 2:

Trouver l'expression fonctionnelle de la fonction représentée par le graphe suivant:



On remarque tout d'abord que l'ordonnée à l'origine du graphe est 1. Ainsi, $b = 1$.

En outre, le graphe passe par le point B(-1;4), ce qui nous permet de dessiner le triangle rectangle pour calculer la pente de la droite: les côtés de l'angle droit valent 1 et 3 et la pente est $a = \frac{3}{1} = 3$. Comme la fonction est décroissante, la pente doit être négative; on a donc $a = -3$.

Par conséquent, l'expression fonctionnelle cherchée est $x \; ---> \; -3x + 1$.

Ainsi, **si la fonction affine est croissante, sa pente est positive et, si la fonction affine est décroissante, sa pente est négative** (on doit rajouter un “-” devant le calcul de la pente).