Fonctions

Fonctions quadratiques

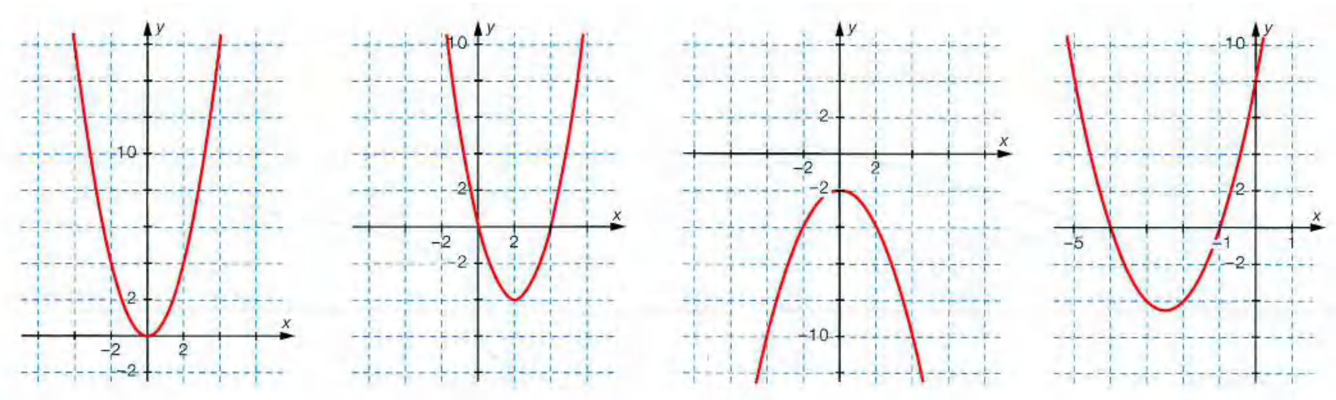
Une **fonction du deuxième degré** ou **fonction quadratique** est une fonction de la forme

$$x \;--->\; \textit{un nombre} \cdot x^2 + \textit{un autre nombre} \cdot x + \textit{un troisième nombre},$$

que l'on résume en $x \;--->\; ax^2 + bx + c$ (a, b et c étant des nombres connus, x étant la variable). Dans le cadre des fonctions du deuxième degré, on ne considère que les cas où $a \neq 0$ (sinon, on revient aux fonctions affines).

La représentation graphique d'une fonction quadratique est une **parabole**.

En voici quelques exemples:

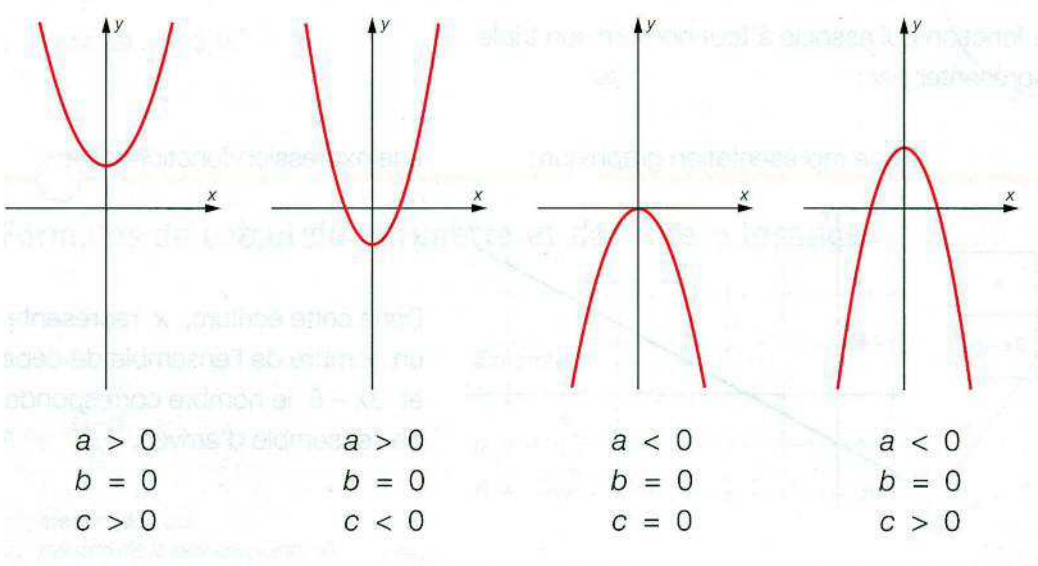


$x \longmapsto x^2$ $(a = 1 \;;\; b = 0 \;;\; c = 0)$ — $x \longmapsto x^2 - 4x$ $(a = 1 \;;\; b = -4 \;;\; c = 0)$ — $x \longmapsto -0{,}5x^2 - 2$ $(a = -0{,}5 \;;\; b = 0 \;;\; c = -2)$ — $x \longmapsto 2x^2 + 10x + 8$ $(a = 2 \;;\; b = 10 \;;\; c = 8)$

On remarque qu'une parabole est soit décroissante, puis croissante ou soit croissante, puis décroissante.

Ici, il n'est plus question de calculer la pente de ces courbes (elle varie constamment). Par contre, on peut constater que la valeur de c correspond à l'**ordonnée à l'origine** ou la **hauteur à l'origine** du graphe de la parabole.

Voici les schémas de fonctions quadratiques en fonctions des signes de a, b et c (il existe encore d'autres cas de figures):



On voit que le sommet de la parabole est un **minimum de la fonction** si $a > 0$ et est un **maximum de la fonction** si $a < 0$.

On peut calculer les coordonnées du sommet d'une parabole de la forme:

$$y = ax^2 + bx + c:$$

- la première coordonnée du sommet, x_s, est donné par $x_s = -\frac{b}{2a}$;

- la deuxième coordonnée du sommet, y_s, est donné par $y_s = ax_s^2 + bx_s + c$, ou x_s est la première coordonnée du sommet trouvée ci-dessus.

Exemple:

Trouver les coordonnées du sommet de la parabole $y = 2x^2 - 3x + 2$.

Ici, on a $a = 2$, $b = -3$ et $c = 2$.

On a alors $x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4} = 0,75$ et $y_s = ax_s^2 + bx_s + c = 2 \cdot 0,75^2 - 3 \cdot 0,75 + 2$ $= 1,125 - 2,25 + 2 = 0,875$.

Ainsi, les coordonnées du sommet de la parabole sont $(0,75;0,875)$.