Fonctions

Fonctions avancées

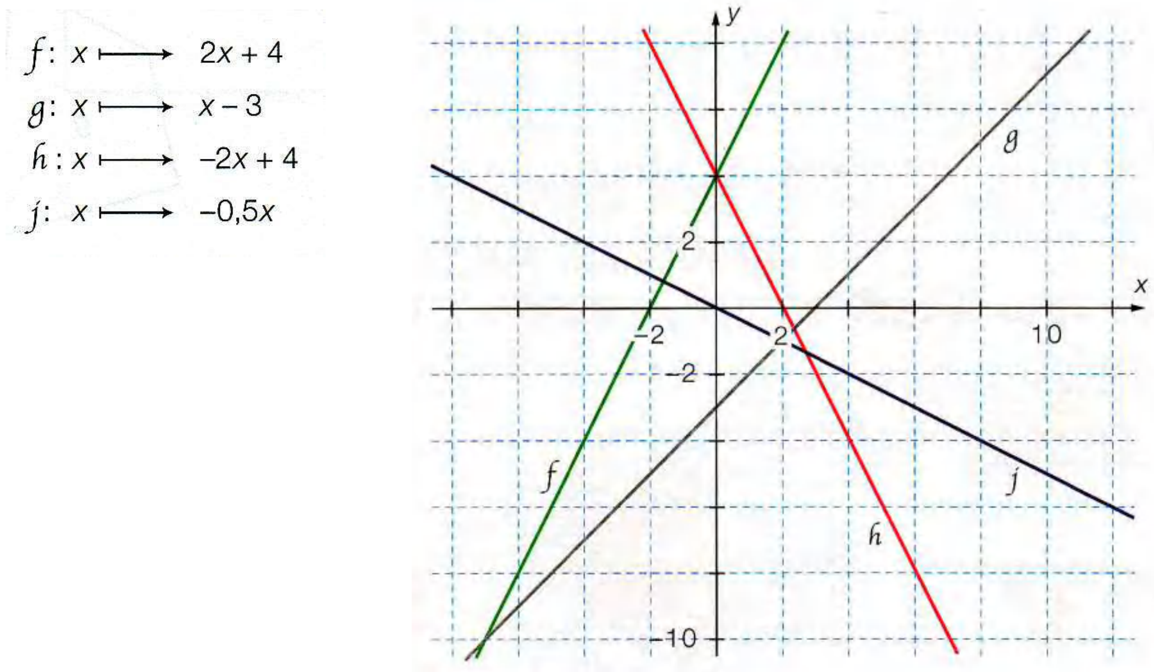
§ 1. Retour sur les fonctions affines

Une **fonction affine** est une fonction de la forme

$$x \;--->\; un\ nombre \cdot x + un\ autre\ nombre,$$

que l'on résume en $x \;--->\; ax+b$ (a et b étant des nombres connus, x étant la variable).

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite (qui ne passe pas forcément par l'intersection des axes et qui n'est pas forcément horizontale).



On remarque qu'une fonction linéaire est une fonction affine pour laquelle $b=0$. Ainsi b est le nombre correspond à la distance entre l'origine des axes et le point d'intersection du graphe de la fonction et de l'axe y ou axe vertical. C'est pourquoi on appelle b l'**ordonnée à l'origine** ou la **hauteur à l'origine**.

Le graphe de la fonction *f* ci-dessus coupe l'axe y au point (0 ; 4). On a donc: $b = 4$.

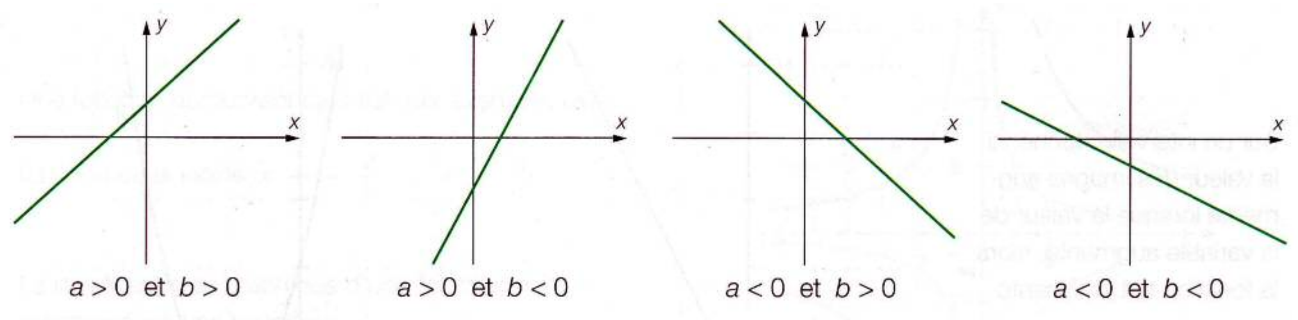
Le graphe de la fonction *g* ci-dessus coupe l'axe y au point (0 ; -3). On a donc: $b = -3$.

Le graphe de la fonction *h* ci-dessus coupe l'axe y au point (0 ; 4). On a donc: $b = 4$.

Le graphe de la fonction *j* ci-dessus coupe l'axe y au point (0; 0). On a donc: $b = 0$. La fonction *j* est linéaire.

Le nombre qui multiplie la variable *x* (le nombre *a*) est, la **pente de la droite**.

Voici des schémas de graphiques où les valeurs des nombres *a* et *b* sont positives ou négatives:



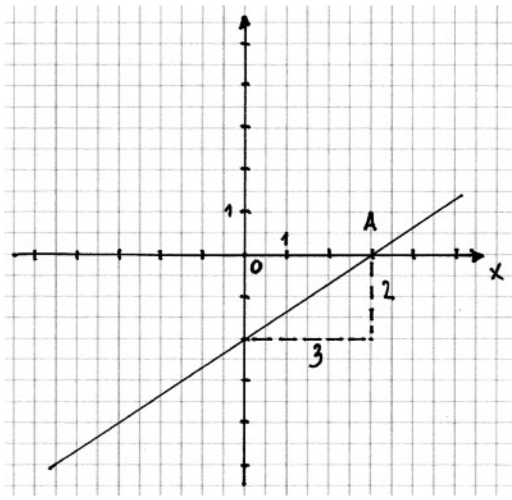
§ 2. Retrouver l'expression d'une fonction affine

On a parfois besoin de **retrouver l'expression fonctionnelle d'une fonction affine** dont le graphe est donné.

De manière générale, on sait que l'expression fonctionnelle d'une fonction affine est de la forme $x \; --->\; ax + b$, où a est la pente de la droite et b l'ordonnée ou hauteur à l'origine. Il suffit donc de trouver la pente de la droite et son ordonnée à l'origine pour obtenir l'expression fonctionnelle correspondante.

Exemple 1:

Trouver l'expression fonctionnelle de la fonction représentée par le graphe suivant:



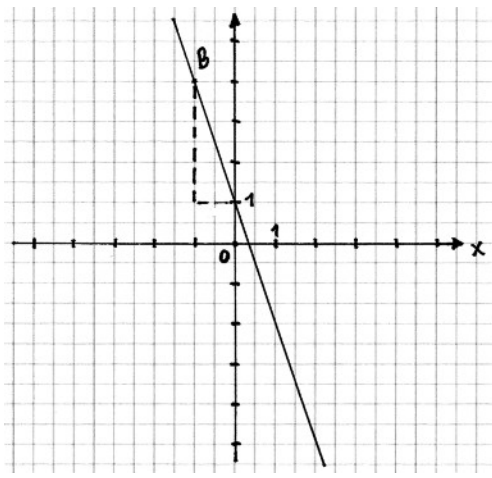
On remarque tout d'abord que l'ordonnée à l'origine du graphe est -2. Ainsi, $b=-2$.

En outre, le graphe passe par le point A(3;0), ce qui nous permet de dessiner le triangle rectangle pour calculer la pente de la droite: les côtés de l'angle droit valent 3 et 2 et la pente est $a=\frac{2}{3}$.

Par conséquent, l'expression fonctionnelle cherchée est $x \;--->\; \frac{2}{3}x-2$.

Exemple 2:

Trouver l'expression fonctionnelle de la fonction représentée par le graphe suivant:



On remarque tout d'abord que l'ordonnée à l'origine du graphe est 1. Ainsi, $b=1$.

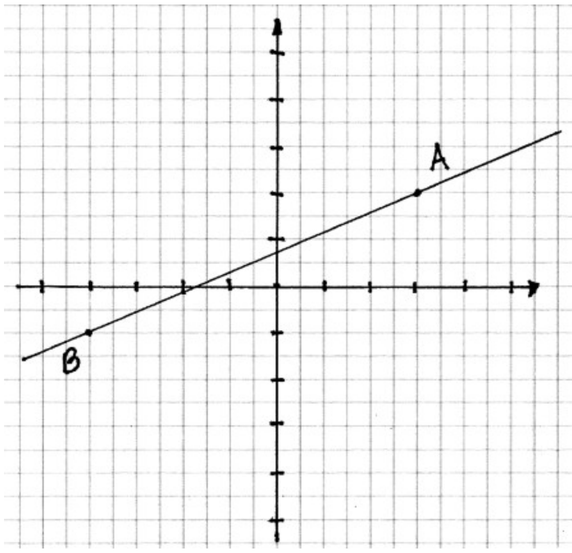
En outre, le graphe passe par le point B(-1;4), ce qui nous permet de dessiner le triangle rectangle pour calculer la pente de la droite: les côtés de l'angle droit valent 1 et 3 et la pente est $a=\frac{3}{1}=3$. Comme la fonction est décroissante, la pente doit être négative; on a donc $a=-3$.

Par conséquent, l'expression fonctionnelle cherchée est $x \;--->\; -3x+1$.

Ainsi, **si la fonction affine est croissante, sa pente est positive et, si la fonction affine est décroissante, sa pente est négative** (on doit rajouter un “-” devant le calcul de la pente).

Exemple 3:

Trouver l’expression fonctionnelle de la fonction représentée par le graphe suivant:

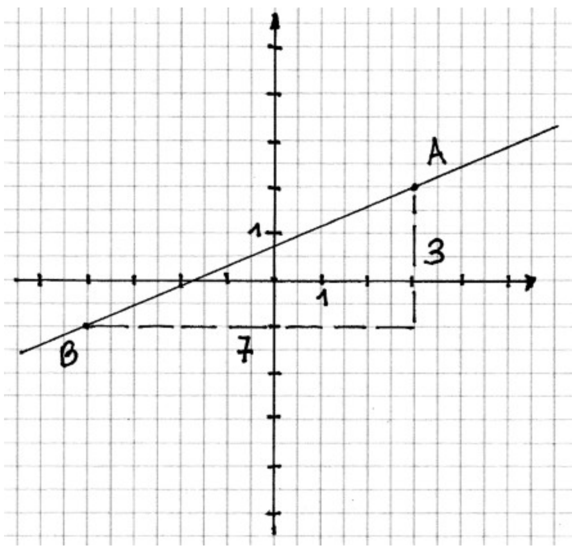


Ici, on ne peut pas lire sur le graphe l’ordonnée à l’origine (on ne pourrait qu’en dire une approximation). On doit donc procéder différemment. Voici deux manières de faire:

1ère manière:

Les coordonnées de A sont A (3 ; 2) et celles de B sont B (-4; -1).

On peut calculer la pente de la droite comme précédemment. On a:



Ainsi, la pente de la droite est $a = \frac{3}{7}$ et l'équation de la droite s'écrit $y = \frac{3}{7}x + b$.

Reste à trouver b (hauteur à l'origine).

En utilisant le point A (3 ; 2), on peut substituer dans l'équation de la droite x par 3 (première coordonnée de A) et y par 2 (deuxième coordonnée de A). L'égalité dans l'équation de la droite doit être vérifiée puisque le point A appartient à la droite.

On obtient ainsi: $2 = \frac{3}{7} \cdot 3 + b$, ce qui est une équation du premier degré à une inconnue.

On a alors: $2 = \frac{3}{7} \cdot 3 + b$ ==> $2 = \frac{9}{7} + b$ ==> $b = 2 - \frac{9}{7} = \frac{5}{7}$.

L'équation de la droite est alors $y = \frac{3}{7}x + \frac{5}{7}$.

<u>2ème manière:</u>

Les coordonnées de A sont A (3 ; 2) et celles de B sont B (-4; -1).

L'équation générale de la droite est $y = ax + b$.

On va utiliser successivement les coordonnées de A et de B pour trouver deux équations du premier degré à deux inconnues (a et b).

Avec A (3 ; 2), en remplaçant x par 3 et y par 2 dans $y = ax + b$, on obtient $2 = 3a + b$.

Avec B (-4 ; -1), en remplaçant x par -4 et y par -1 dans $y = ax + b$, on obtient $-1 = -4a + b$.

On obtient ainsi le système suivant à résoudre:

$$3a + b = 2,$$
$$-4a + b = -1.$$

En soustrayant la deuxième équation de la première, on obtient: $7a = 3$, d'où $a = \frac{3}{7}$.

En substituant a par $\frac{3}{7}$ dans $3a + b = 2$, on obtient: $3 \cdot \frac{3}{7} + b = 2$ ==> $\frac{9}{7} + b = 2$ ==> $b = 2 - \frac{9}{7} = \frac{5}{7}$.

L'équation de la droite est alors, comme dans la 1ère manière, $y = \frac{3}{7}x + \frac{5}{7}$.

<u>§ 3. Expressions fonctionnelles de droites parallèles</u>

Soient les deux droites suivantes:

$d_1 : \ y = a_1 x + b_1$ et

$d_2 : \ y = a_2 x + b_2$.

Les deux droites seront parallèles si $a_1 = a_2$. Inversement, si $a_1 = a_2$, alors les droites sont parallèles.

Exemples:

Les droites $y = 2x - 5$ et $y = 2x + 2$ sont parallèles car $a_1 = 2 = a_2$.

Les droites $y = -3x + 2$ et $y = -2x - 6$ ne sont pas parallèles car $a_1 = -3 \neq -2 = a_2$.

§ 4. Expressions fonctionnelles de droites perpendiculaires

Soient les deux droites suivantes: $d_1 :\ y = a_1 x + b_1$ et

$d_2 :\ y = a_2 x + b_2$.

Les deux droites seront perpendiculaires si $a_1 = -\frac{1}{a_2}$ ou (ce qui revient au même) $a_2 = -\frac{1}{a_1}$. Inversement, si $a_1 = -\frac{1}{a_2}$ ou si $a_2 = -\frac{1}{a_1}$, alors les droites sont perpendiculaires.

Exemples:

Les droites $y = 2x - 5$ et $y = -\frac{1}{2}x + 2$ sont parallèles car $a_2 = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{a_1}$.

Les droites $y = -3x + 2$ et $y = -x - 6$ ne sont pas parallèles car $a_2 = -1 \neq -\frac{1}{-3} = -\frac{1}{a_1}$.

§ 5. Intersections de droites

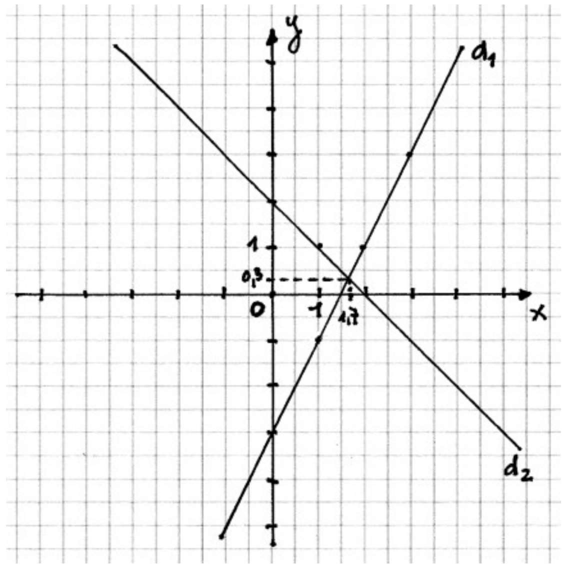
Pour **trouver graphiquement l'intersection de deux droites**, il faut les dessiner et trouver les coordonnées du point d'intersection (s'il existe).

Pour **trouver algébriquement l'intersection de deux droites**, il faut résoudre le système de deux équations du premier degré à deux inconnues formé par les équations des deux droites.

Exemple:

Trouver l'intersection des droites $d_1 : y = 2x - 3$ et $d_2 : y = -x + 2$.

Graphiquement: on dessine les deux droites dans un système d'axes:



On lit sur le dessin la valeur sur l'axe x (axe horizontal): $x \simeq 1,7$ et la valeur sur l'axe y (axe vertical): $y \simeq 0,3$.

Ainsi, l'intersection des droites est au point $(1,7 : 0,3)$ (approximativement).

Algébriquement: en mettant ensemble les équations des deux droites, on a le système suivant: $y = 2x - 3$,

$y = -x + 2$.

En multipliant la deuxième équation par 2, on obtient $2y = -2x + 4$. Par addition avec la première équation, on trouve $3y = 1$, d'où $y = \frac{1}{3}$.

Avec $y = \frac{1}{3}$ dans $y = 2x - 3$, on obtient $\frac{1}{3} = 2x - 3$, d'où $2x = \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}$ et, finalement, $x = \frac{5}{3}$.

Ainsi, l'intersection des droites est au point $(\frac{5}{3}; \frac{1}{3})$ (précisément).

En remarque que la manière algébrique est plus précise que la manière géométrique.

§ 6. Retour sur les fonctions quadratiques

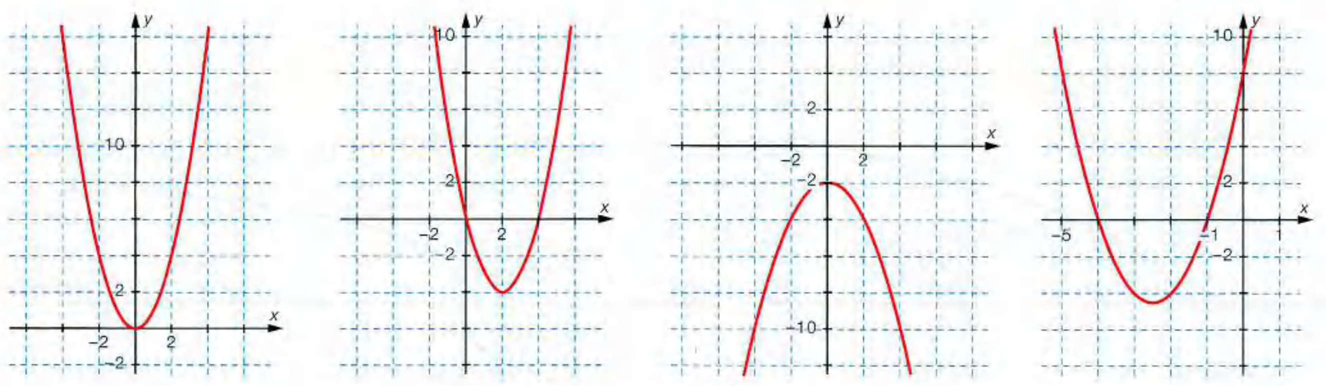
Une **fonction du deuxième degré** ou **fonction quadratique** est une fonction de la forme

$$x \;--->\; \textit{un nombre} \cdot x^2 + \textit{un autre nombre} \cdot x + \textit{un troisième nombre},$$

que l'on résume en $x \; ---> \; ax^2 + bx + c$ (a, b et c étant des nombres connus, x étant la variable). Dans le cadre des fonctions du deuxième degré, on ne considère que les cas où $a \neq 0$ (sinon, on revient aux fonctions affines).

La représentation graphique d'une fonction quadratique est une **parabole**.

En voici quelques exemples:

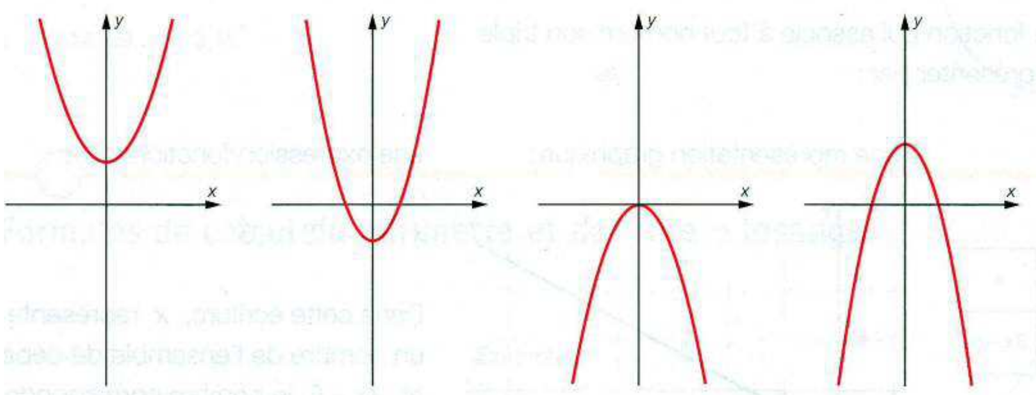


$x \longmapsto x^2$	$x \longmapsto x^2 - 4x$	$x \longmapsto -0{,}5x^2 - 2$	$x \longmapsto 2x^2 + 10x + 8$
($a = 1$; $b = 0$; $c = 0$)	($a = 1$; $b = -4$; $c = 0$)	($a = -0{,}5$; $b = 0$; $c = -2$)	($a = 2$; $b = 10$; $c = 8$)

On remarque qu'une parabole est soit décroissante, puis croissante ou soit croissante, puis décroissante.

Ici, il n'est plus question de calculer la pente de ces courbes (elle varie constamment). Par contre, on peut constater que la valeur de c correspond à l'**ordonnée à l'origine** ou la **hauteur à l'origine** du graphe de la parabole.

Voici les schémas de fonctions quadratiques en fonctions des signes de a, b et c (il existe encore d'autres cas de figures):



$a > 0$	$a > 0$	$a < 0$	$a < 0$
$b = 0$	$b = 0$	$b = 0$	$b = 0$
$c > 0$	$c < 0$	$c = 0$	$c > 0$

On voit que le sommet de la parabole est un **minimum de la fonction** si $a > 0$ et est un **maximum de la fonction** si $a < 0$.

§ 7. Sommets de paraboles

On peut calculer les coordonnées du sommet d'une parabole de la forme:

$$y = ax^2 + bx + c:$$

- la première coordonnée du sommet, x_s, est donné par $x_s = -\frac{b}{2a}$;
- la deuxième coordonnée du sommet, y_s, est donné par $y_s = ax_s^2 + bx_s + c$, ou x_s est la première coordonnée du sommet trouvée ci-dessus.

Exemple:

Trouver les coordonnées du sommet de la parabole $y = 2x^2 - 3x + 2$.

Ici, on a $a = 2$, $b = -3$ et $c = 2$.

On a alors $x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4} = 0,75$ et $y_s = ax_s^2 + bx_s + c = 2 \cdot 0,75^2 - 3 \cdot 0,75 + 2$ $= 1,125 - 2,25 + 2 = 0,875$.

Ainsi, les coordonnées du sommet de la parabole sont $(0,75;0,875)$.

§ 8. Différentes expressions fonctionnelles pour une parabole

L'**expression fonctionnelle générale d'une parabole** est $y = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des nombres réels.

Si on connaît ou on calcule les coordonnées $(x_s; y_s)$ du **sommet de cette parabole** (voir § 7 ci-dessus), alors l'**expression fonctionnelle de cette même parabole** peut s'écrire $y = a(x - x_s)^2 + y_s$. Le a dans cette expression est le même que dans l'expression générale.

Si on connaît les **zéros de la parabole**, autrement les solutions de l'équation où $y = 0$, c'est-à-dire $ax^2 + bx + c = 0$ (on résout ce genre d'équation par la technique décrite dans le chapitre "Equations du deuxième degré à une inconnue"; on va supposer qu'elle a deux solutions x_1 et x_2 (qui veut être confondues)), alors l'**expression fonctionnelle de cette même parabole** peut s'écrire $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, où le a est toujours le même que dans l'équation générale.

On a ainsi trois écritures différentes pour l'expression fonctionnelle d'une parabole:

(1) $y = ax^2 + bx + c$,

(2) $y = a(x - x_s)^2 + y_s$, où $(x_s ; y_s)$ sont les coordonnées du sommet de la parabole,

(3) $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, où x_1 et x_2 sont les zéros de la parabole, autrement dit les solutions de $ax^2 + bx + c = 0$.

Pour passer de (1) à (2), il suffit de trouver les coordonnées du sommet de la parabole (voir § 7).

Pour passer de (1) à (3), il suffit de trouver les solutions (si elles existent) de $ax^2 + bx + c = 0$ (si cette équation n'a pas de solution, alors la parabole ne peut pas se mettre sous la forme (3)).

Pour passer de (2) à (1), il suffit de développement l'expression de (2) et de réduire les termes.

Pour passer de (3) à (1), il suffit de développement l'expression de (3) et de réduire les termes.

Généralement, on ne passe pas directement de (2) à (3) ou de (3) à (2). On fait une étape intermédiaire en (1).

Exemple 1:

Ecrire l'expression fonctionnelle $y = 2x^2 - 2x - 4$ sous la forme $y = a(x - x_s)^2 + y_s$ (forme (2)) et sous la forme $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ (forme (3)).

Dans $y = 2x^2 - 2x - 4$, on a $a = 2$, $b = -2$ et $c = -4$.

Les coordonnées du sommet sont: $x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ et $y_s = ax_s^2 + bx_s + c =$
$= 2(\frac{1}{2})^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} - 4 = 2 \cdot \frac{1}{4} - 1 - 4 = \frac{1}{2} - 5 = -\frac{9}{2}$.

L'expression fonctionnelle peut donc s'écrire: $y = a(x - x_s)^2 + y_s = 2(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{2}$.

Les zéros de la parabole sont les solutions (si elles existent) de $ax^2+bx+c=0$. On doit donc résoudre $2x^2-2x-4=0$ (voir chapitre “Equations du deuxième degré à une inconnue). On a $a=2$, $b=-2$ et $c=-4$. Le discriminant est $\Delta=b^2-4ac=$ $=(-2)^2-4\cdot 2\cdot(-4)=4+32=36$ et on a $\sqrt{\Delta}=\sqrt{36}=6>0$. Les solutions sont donc $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+6}{2\cdot 2}=\frac{8}{4}=2$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-6}{2\cdot 2}=\frac{-4}{4}=-1$.

L’expression fonctionnelle peut donc s’écrire $y=a(x-x_1)(x-x_2)=2(x-2)(x+1)$.

Exemple 2:

Ecrire l’expression fonctionnelle $y=3(x+2)^2+1$ sous la forme $y=ax^2+bx+c$ et sous la forme $y=a(x-x_1)(x-x_2)$.

On remarque tout d’abord que, si on a $y=3(x+2)^2+1$, l’expression fonctionnelle est de la forme $y=a(x-x_s)^2+y_s$. Par identification des termes, on a alors $x_s=-2$ et $y_s=1$. Ainsi, le sommet de la parabole est $(x_s;y_s)=(-2;1)$.

Pour passer de l’expression fonctionnelle $y=3(x+2)^2+1$ à la forme $y=ax^2+bx+c$, on doit développer $y=3(x+2)^2+1$: on a $y=3(x+2)^2+1=3(x^2+4x+4)+1=$ $3x^2+12x+12+1=3x^2+12x+13$, ce qui est bien la première forme recherchée.

Pour passer maintenant de la forme $y=ax^2+bx+c$, on doit chercher les zéros de $y=ax^2+bx+c$, autrement dit résoudre $3x^2+12x+13=0$. Ici, on a $a=3$, $b=12$ et $c=13$. Le discriminant est $\Delta=b^2-4ac=12^2-4\cdot 3\cdot 13=144-156=-12<0$. L’équation n’a donc pas de solution. On en déduit que la parabole ne peut pas être mise sous la forme $y=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Exemple 3:

Ecrire l’expression fonctionnelle $y=-3(x+3)(x-2)$ sous la forme $y=ax^2+bx+c$ et sous la forme $y=a(x-x_s)^2+y_s$.

En développant $y=-3(x+3)(x-2)$, on obtient $y=-3(x+3)(x-2)=$ $=-3(x^2-2x+3x-6)=-3(x^2+x-6)=-3x^2-3x+18$, ce qui est bien la première forme recherchée.

Pour passer maintenant à la forme $y=a(x-x_s)^2+y_s$, on doit trouver les coordonnées du sommet de la parabole. De $y=-3x^2-3x+18$, on a $a=-3$, $b=-3$ et $c=18$.

On a alors $x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2\cdot(-3)} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$ et $y_s = ax_s^2 + bx_s + c = -3x_s^2 - 3x_s + 18 =$ $= -3(-\frac{1}{2})^2 - 3(-\frac{1}{2}) + 18 = -3\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 18 = -\frac{3}{4} + \frac{39}{2} = \frac{75}{4}$. Les coordonnées du sommet sont donc $(x_s; y_s) = (-\frac{1}{2}; \frac{75}{4})$ et la parabole peut s'écrire $y = a(x - x_s)^2 + y_s =$ $= -3(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{75}{4}$, ce qui est bien la deuxième forme cherchée.

§ 9. Déplacements horizontaux d'une parabole

Que devient l'expression fonctionnelle d'une parabole si on la déplace horizontalement? Considérons un exemple. Soit la parabole $y = 3x^2$. Que devient cette expression lors d'un déplacement horizontal de 4 unités vers la droite?

La parabole $y = 3x^2$ peut s'écrire $y = 3(x-0)^2 + 0$. On en déduit que sommet est l'origine des axes $(0;0)$. Par un déplacement horizontal de 4 unités vers la droite, ce sommet devient le point $(4;0)$, point qui sera le sommet de la parabole déplacée. Comme rien d'autre ne change, le coefficient a restera le même.

L'expression de la nouvelle parabole sera donc $y = 3(x-4)^2 + 0 = 3(x-4)^2$, que l'on peut développer si nécessaire.

Similairement l'expression d'une parabole d'équation $y = 3x^2$ par un déplacement de 2 unités vers la gauche sera $y = 3(x+2)^2$ (le nouveau sommet est $(-2;0)$).

On en déduit que l'expression d'une parabole d'équation $y = a(x - x_s)^2 + y_s$ par un déplacement horizontal de m unités (m pouvant être un nombre réel quelconque) sera $y = a(x - x_s - m)^2 + y_s$.

§ 10. Déplacements verticaux d'une parabole

Que devient l'expression fonctionnelle d'une parabole si on la déplace verticalement? Considérons un exemple. Soit la parabole $y = 3x^2$. Que devient cette expression lors d'un déplacement horizontal de 4 unités vers le haut?

La parabole $y = 3x^2$ peut s'écrire $y = 3(x-0)^2 + 0$. On en déduit que sommet est l'origine des axes $(0;0)$. Par un déplacement horizontal de 4 unités vers le haut, ce sommet devient le point $(0;4)$, point qui sera le sommet de la parabole déplacée. Comme rien d'autre ne change, le coefficient a restera le même.

L'expression de la nouvelle parabole sera donc $y=3(x-0)^2+4=3x^2+4$.

Similairement l'expression d'une parabole d'équation $y=3x^2$ par un déplacement de 2 unités vers le bas sera $y=3x^2-2$ (le nouveau sommet est $(0;-2)$.

On en déduit que l'expression d'une parabole d'équation $y=a(x-x_s)^2+y_s$ par un déplacement vertical de m unités (m pouvant être un nombre réel quelconque) sera $y=a(x-x_s)^2+y_s+m$.

§ 11. Retrouver l'expression d'une parabole

Pour pouvoir retrouver l'expression d'une parabole, il faut connaître:

soit: son sommet et un autre point;

soit: ses zéros (intersections avec l'axe x) et un autre point;

soit: trois points distincts de la parabole.

On va illustrer ces trois situations par des exemples:

Exemple 1:

Retrouver l'expression fonctionnelle de la parabole dont le sommet est $(3;2)$ et dont un des points est $(-2;-5)$.

En utilisant la forme $y=a(x-x_s)^2+y_s$, où $(x_s;y_s)$ est le sommet de la parabole, on a $x_s=3$ et $y_s=2$. La parabole peut donc s'écrire $y=a(x-3)^2+2$. Il faut encore trouver la valeur de a. Pour cela, on utilise l'autre point: $(-2;-5)$. En posant $x=-2$ et $y=-5$ dans $y=a(x-3)^2+2$, on a: $-5=a(-2-3)^2+2$ ==> $-5=(-5)^2a+2$ ==> $-5=25a+2$ ==> $25a=-7$ ==> $a=\frac{-7}{25}=-\frac{7}{25}$.

Ainsi, l'expression de la parabole est $y=-\frac{7}{25}(x-3)^2+2$, que l'on peut développer si nécessaire.

Exemple 2:

Retrouver l'expression fonctionnelle de la parabole passant par le point $(1;1)$ dont les zéros sont $x_1 = 3$ et $x_2 = -1$.

En utilisant la forme $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, où x_1 et x_2 sont les zéros de la parabole, on a $x_1 = 3$ et $x_2 = -1$. La parabole peut donc s'écrire $y = a(x-3)(x+1)$. Il faut encore trouver la valeur de a. Pour cela, on utilise le point: $(1;1)$. En posant $x = 1$ et $y = 1$ dans $y = a(x-3)(x+1)$, on a: $1 = a(1-3)(1+1)$ ==> $1 = a\cdot(-2)\cdot 2$ ==> $-4a = 1$ ==> $a = -\frac{1}{4}$.

Ainsi, l'expression de la parabole est $y = -\frac{1}{4}(x-3)(x+1)$, que l'on peut développer si nécessaire.

Exemple 3:

Retrouver l'expression fonctionnelle de la parabole passant par les points $A(-3;5)$, $B(1;-5)$ et $C(6;3)$.

L'expression générale d'une parabole est $y = ax^2 + bx + c$.

Avec le point $A(-3;5)$, en substituant x par -3 et y par 5, on trouve l'équation $5 = a(-3)^2 + b(-3) + c$ ==> $9a - 3b + c = 5$.

Avec le point $B(1;-5)$, en substituant x par 1 et y par -5, on trouve l'équation $-5 = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c$ ==> $a + b + c = -5$.

Avec le point $C(6;3)$, en substituant x par 6 et y par 3, on trouve l'équation $3 = a\cdot 6^2 + b\cdot 6 + c$ ==> $36a + 6b + c = 3$.

On doit résoudre un système de trois équations du premier degré à trois inconnues:

$$9a - 3b + c = 5 \qquad (1),$$
$$a + b + c = -5 \qquad (2),$$
$$36a + 6b + c = 3 \qquad (3).$$

En effectuant (1) - (2), on obtient $8a - 4b = 10$ (4).

En effectuant (3) - (1), on obtient $27a + 9b = -2$ (5).

En effectuant 4 fois (5) + 9 fois (4), on obtient $180a = 82$, d'où $a = \frac{82}{180} = \frac{41}{90}$.

Par substitution dans (4), on obtient $8\cdot\frac{41}{90} - 4b = 10$ ==> $\frac{165}{45} - 4b = 10$ ==>

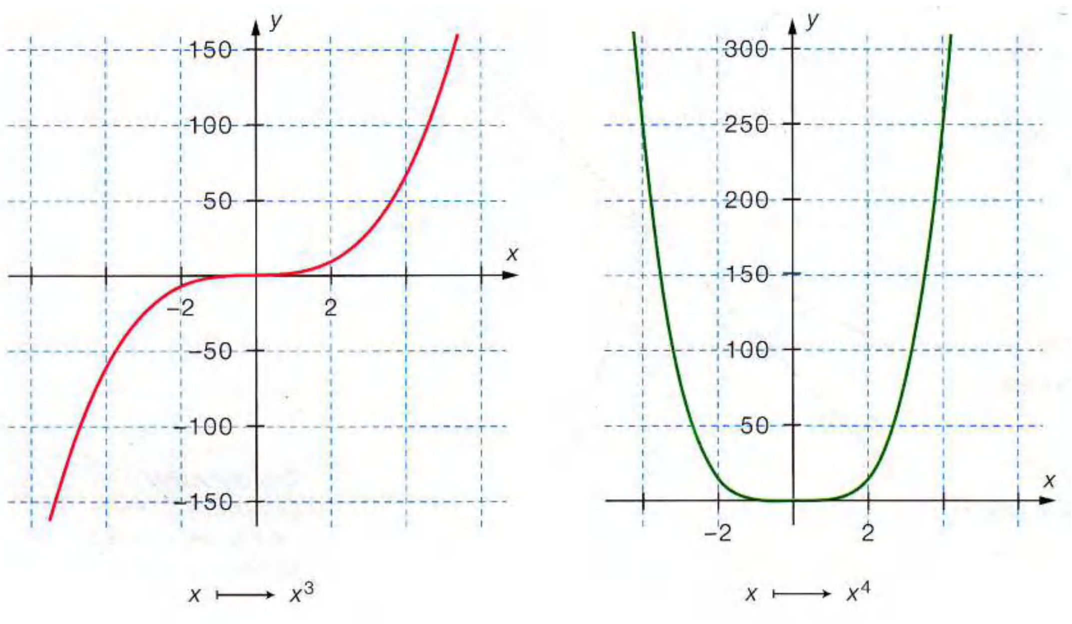
$$4b = \frac{165}{45} - 10 = -\frac{286}{45} \quad ==> \quad b = -\frac{143}{90}.$$

Par substitution dans (2), on obtient $\frac{41}{90} - \frac{143}{90} + c = 3$, d'où $c = 3 - \frac{41}{90} + \frac{143}{90} = \frac{62}{15}$.

Ainsi, l'expression de la parabole est $y = \frac{41}{90}x^2 - \frac{143}{90}x + \frac{62}{15}$.

§ 12. Fonctions puissances

Une **fonction puissance n-ième** est une fonction de la forme $x \;--->\; x^n$, où n est un nombre naturel différent de zéro. En voici deux exemples:

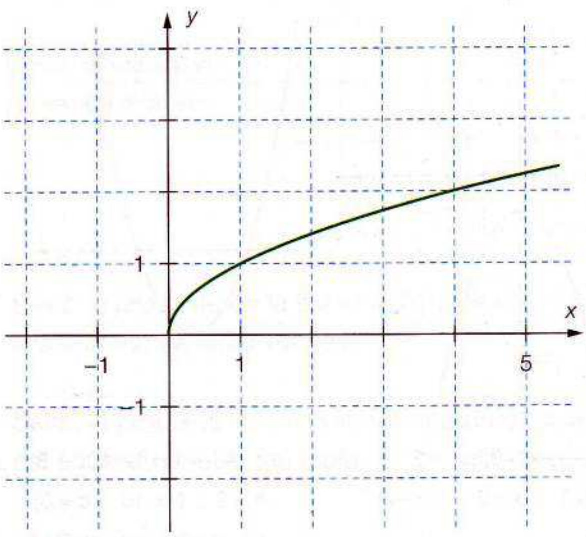


Lorsque n = 1, la fonction $x \;--->\; x$ est une fonction linéaire.

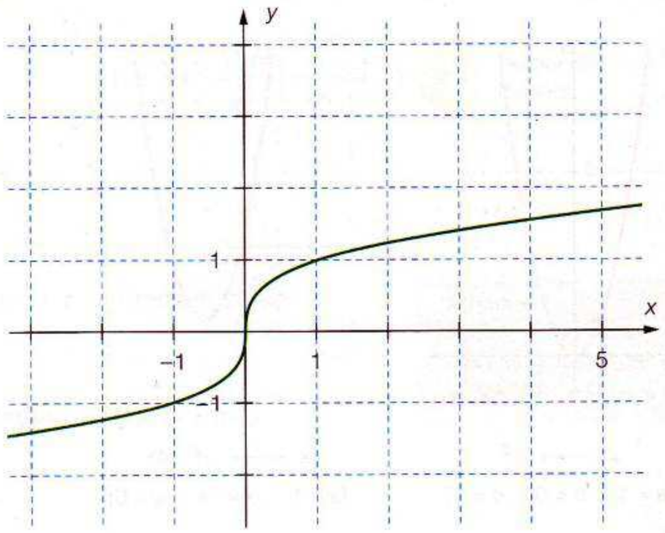
Lorsque n = 2, la fonction $x \;--->\; x^2$ est une fonction quadratique.

§ 13. Fonctions racines

Une **fonction racine n-ième** est une fonction de la forme $x \;--->\; \sqrt[n]{x}$, où n est un nombre naturel différent de zéro. En voici deux exemples:



$x \longmapsto \sqrt{x} \quad (x \geq 0)$



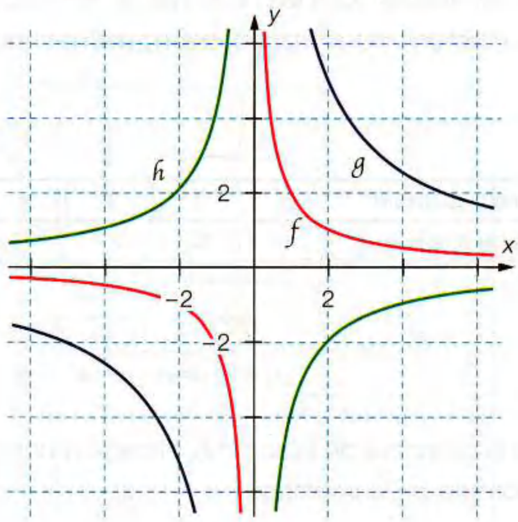
$x \longmapsto \sqrt[3]{x}$

§ 14. Fonctions inverses

Une **fonction inverse** est, par exemple, une fonction de la forme x ---> $\frac{a}{x}$ (où a est nombre différent de zéro).

La représentation graphique d'une fonction inverse est une **hyperbole**. Une hyperbole comporte deux branches.

Voici des exemples de telles fonctions:

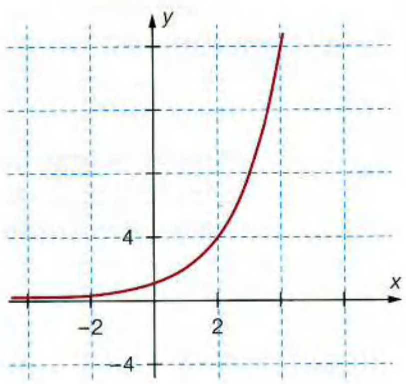


$f : x \longmapsto \frac{2}{x} \quad (x \neq 0)$ $\quad g : x \longmapsto \frac{10}{x} \quad (x \neq 0)$ $\quad h : x \longmapsto \frac{-4}{x} \quad (x \neq 0)$

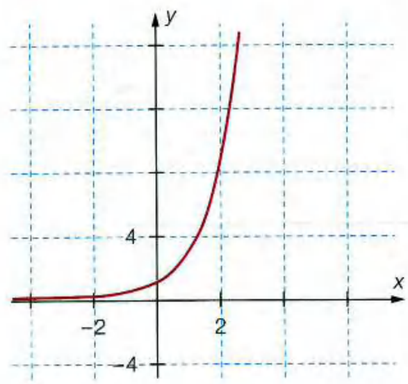
§ 15. Fonctions exponentielles

Une **fonction exponentielle** est une fonction de la forme de la forme $x \text{---}> a^x$, où a est un nombre positif non nul et différent de 1.

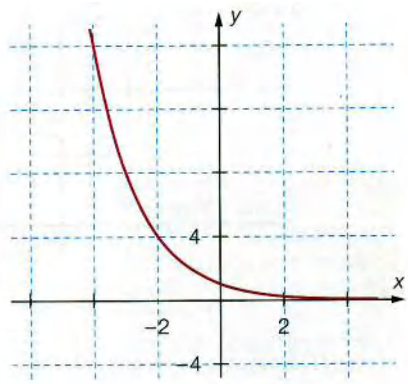
En voici des exemples:



$x \longmapsto 2^x$



$x \longmapsto 3^x$



$x \longmapsto 0{,}5^x$

§ 16. Intersections de fonctions

Lorsque l'on cherche **la ou les intersections de deux fonctions**, il faut résoudre le système d'équations données par leurs expressions fonctionnelles.

Exemple 1:

Chercher la ou les intersections des deux paraboles suivantes: $y = 2x^2 - 3x - 12$ et $y = -3x^2 + 5x + 7$.

Pour cela, on doit résoudre le système d'équations suivant:
$$y = 2x^2 - 3x - 12$$
$$y = -3x^2 + 5x + 7.$$

Comme on a y dans les deux membres de gauche, cela revient à égaliser les membres de droite et à résoudre l'équation $2x^2 - 3x - 12 = -3x^2 + 5x + 7$ que l'on transforme en $5x^2 - 8x - 19 = 0$. C'est une équation du deuxième degré dans laquelle $a = 5$, $b = -8$ et $c = -19$. Son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-19) = 64 + 380 = 444$.

Ses solutions sont: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8+\sqrt{444}}{10} \simeq 2,907$ et

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8-\sqrt{444}}{10} \simeq -1,307.$$

En utilisant l'équation $y = 2x^2 - 3x - 12$, on obtient:

Pour $x_1 \simeq 2,907$, $y_1 \simeq 2 \cdot 2,907^2 - 3 \cdot 2,907 - 12 \simeq -3,819$;

Pour $x_2 \simeq -1,307$, $y_1 \simeq 2 \cdot (-1,307)^2 - 3 \cdot (-1,307) - 12 \simeq -4,661$.

Les intersections des deux paraboles sont donc $(2,907; -3,819)$ et $(-1,307; -4,661)$.

Exemple 2:

Chercher la ou les intersections de la droite $y = 3x - 5$ et de la fonction inverse $y = \frac{2}{x}$.

Pour cela, on doit résoudre le système d'équations suivant:
$$\begin{aligned} y &= 3x - 5 \\ y &= \tfrac{2}{x}. \end{aligned}$$

Comme on a y dans les deux membres de gauche, cela revient à égaliser les membres de droite et à résoudre l'équation $3x - 5 = \frac{2}{x}$ que l'on transforme en $3x^2 - 5x - 2 = 0$. C'est une équation du deuxième degré dans laquelle $a = 3$, $b = -5$ et $c = -2$. Son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 25 + 24 = 49$. On a $\sqrt{\Delta} = 7$.

Ses solutions sont:
$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+7}{6} = 2 \text{ et}$$
$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-7}{6} = -\frac{1}{3}.$$

En utilisant l'équation $y = 3x - 5$, on obtient:

Pour $x_1 = 2$, $y_1 = 3 \cdot 2 - 5 = 1$;

Pour $x_2 = -\frac{1}{3}$, $y_1 = 3 \cdot (-\frac{1}{3}) - 5 = -1 - 5 = -6$.

Les intersections des deux paraboles sont donc $(2; 1)$ et $(-\frac{1}{3}; -6)$.