Chapitre 10

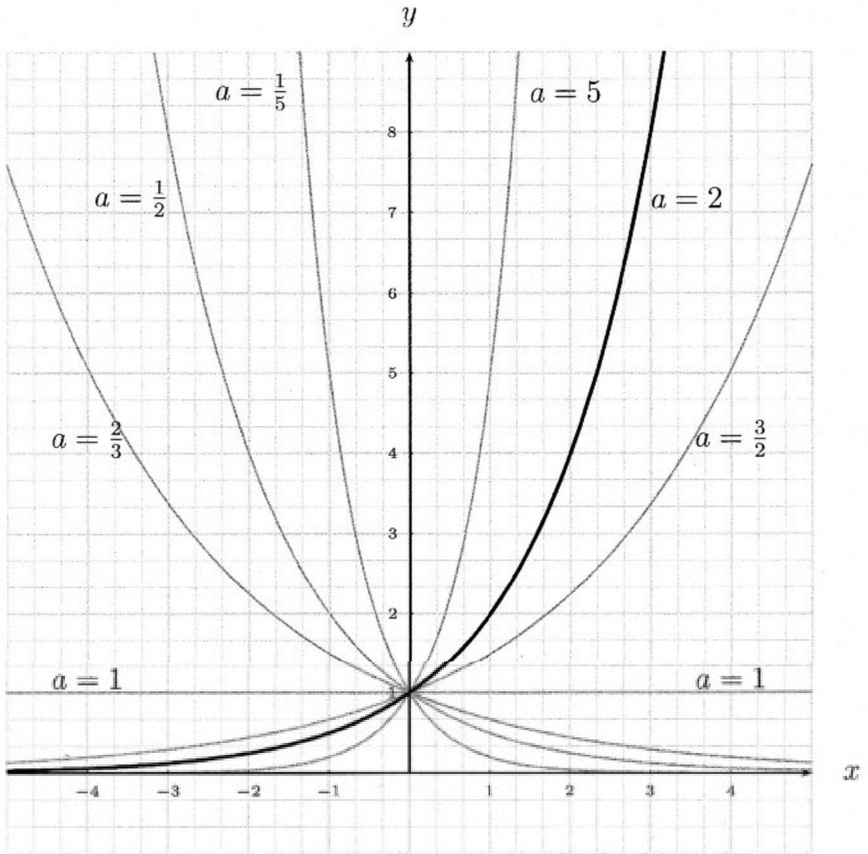
Fonctions usuelles transcendantes

10.1 Les fonctions exponentielles

Soit a est un nombre strictement positif. Les fonctions exponentielles sont définies par :

$$\exp_a : \mathbb{R} \to]0, +\infty[\,;\ x \mapsto a^x$$

Voici les graphes de plusieurs *fonctions exponentielles*, dont $\exp_2$ (en gras).



On voit que pour $a > 0$ et $a \neq 1$, la fonction $\exp_a$ est bijective. Par conséquent, elle admet une fonction réciproque, baptisée le *logarithme en base* a et notée $\log_a$. On obtient ainsi une famille de fonctions pour $a > 0$ et $a \neq 1$:

$$\log_a :]0, +\infty[\to \mathbb{R};\ x \mapsto \log_a(x)$$

10.2 Les logarithmes

D'un autre point de vue, le logarithme est juste une façon d'appeler la solution (lorsqu'elle existe) d'une équation en x de la forme suivante.

$$a^x = b$$

Lorsque $a > 0$ et $a \neq 1$, on voit sur le graphe de a^x que cette équation ne possède qu'une seule solution et ceci seulement si $b > 0$ (puisque les exponentielles sont strictement positives), cette solution s'appelle *le logarithme de b en base a* et est notée $\log_a(b)$.

$$\boxed{a^x = b \iff x = \log_a(b)}$$

D'où le *slogan du logarithme* :

$$\boxed{\log_a(b) \text{ est la puissance à laquelle on élève la base } a \text{ pour obtenir le nombre } b}$$

Le slogan livre les formules suivantes pour tout $x \in]0, +\infty[$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{a^{\log_a(x)} = x} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\log_a(a^y) = y}$$

Formules

Lorsque les expressions sont bien définies, on a les formules duales suivantes.

Pour les exponentielles		Pour les logarithmes
Ecriture a^x	Ecriture $\exp_a(x)$	
$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$	$\exp_a(x+y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y)$	$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$	$\exp_a(x-y) = \frac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)}$	$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$
$a^{x \cdot y} = (a^x)^y$	$\exp_a(x \cdot y) = (\exp_a(x))^y$	$\log_a(x^y) = y \log_a(x)$
$a^0 = 1$	$\exp_a(0) = 1$	$\log_a(1) = 0$

Formules de changement de base

Soit a et b deux nombres positifs différents de 1. On peut changer les bases des exponentielles et des logarithmes. Lorsque les expressions sont bien définies, on a les formules

$$\boxed{\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}} \qquad \boxed{a^x = b^{\log_b(a)\, x}} \quad \text{car } a = b^{\log_b(a)}$$

La formule de changement de base pour le logarithme est essentielle pour pouvoir calculer, par exemple, $\log_3(2)$ à l'aide la calculatrice.

Pour résoudre les équations avec des exponentielles ou des logarithmes

Lorsqu'on a la même base $a > 0$ et $a \neq 1$, on peut utiliser les propriétés suivantes pour résoudre des équations.

$$\boxed{a^x = a^y \iff x = y}$$

$$\text{si } x, y \in \mathbb{R} \quad \boxed{x = y \iff \log_a(x) = \log_a(y)}$$

$$\text{si } x, y > 0 \quad \boxed{x = y \iff \log_a(x) = \log_a(y)}$$

Ces propriétés proviennent du fait que les fonctions $\exp_a$ et $\log_a$ sont bijectives sur leur domaine de définition et du fait que le domaine de définition de $\log_a$ est $]0, +\infty[$.

Preuve des formules

Pour démontrer les formules pour les logarithmes, on va utiliser les formules $a^{\log_a(x)} = x$, $\log_a(a^y) = y$ et les formules pour les exponentielles.

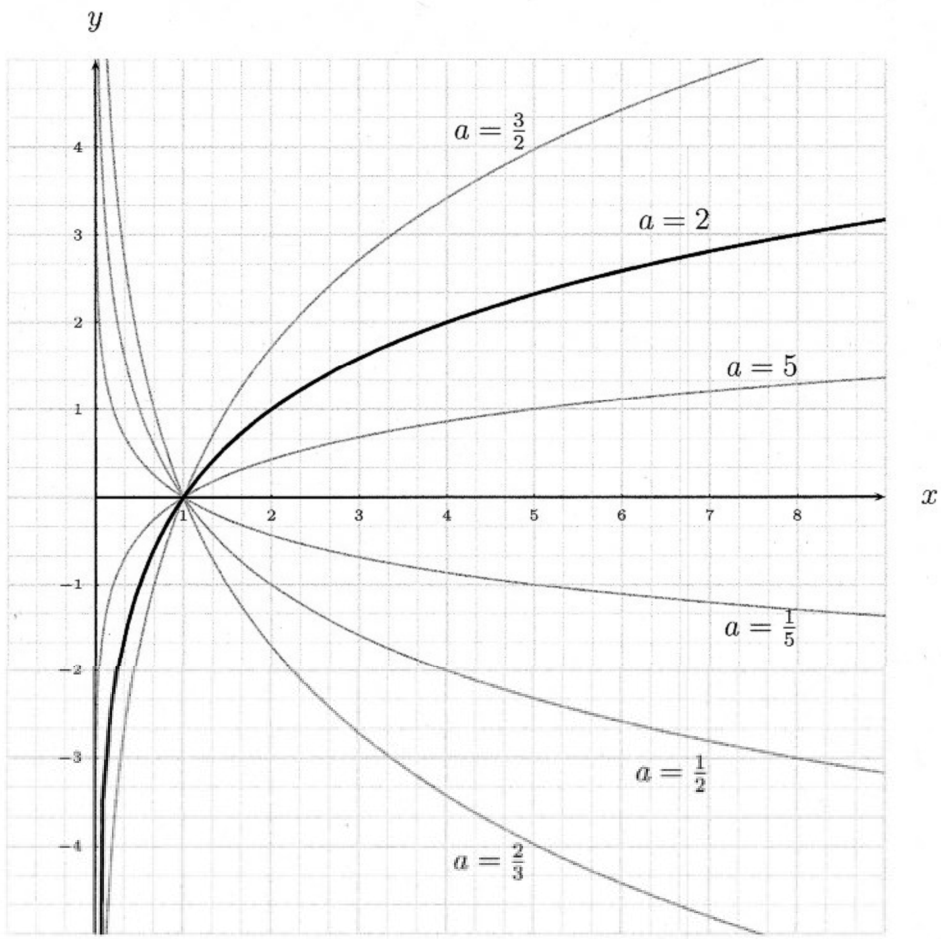
1. $\log_a(x \cdot y) = \log_a(a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)}) = \log_a(a^{\log_a(x)+\log_a(y)}) = \log_a(x) + \log_a(y)$
2. $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a\left(\frac{a^{\log_a(x)}}{a^{\log_a(y)}}\right) = \log_a(a^{\log_a(x)-\log_a(y)}) = \log_a(x) - \log_a(y)$
3. $\log_a(x^y) = \log_a\left((a^{\log_a(x)})^y\right) = \log_a\left(a^{\log_a(x)\cdot y}\right) = \log_a\left(a^{y\log_a(x)}\right) = y\log_a(x)$
4. $\log_b(x) = \log_b(a^{\log_a(x)}) \stackrel{3.}{=} \log_a(x)\log_b(a)$
   On a donc les formules équivalentes suivantes.
   $$\log_b(a)\log_a(x) = \log_b(x) \quad \text{et} \quad \log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

10.3 Les fonctions logarithmes

Soit a un nombre strictement positif, $a \neq 1$. Les fonctions logarithmes sont définies par :

$$\log_a :]0, +\infty[\to \mathbb{R};\ x \mapsto \log_a(x)$$

Voici les graphes de plusieurs *fonctions logarithmes*, dont $\log_2$ (en gras).



La fonction $\log_a$ est la fonction réciproque de $\exp_a$. C'est pour cette raison que les graphes sont obtenus à partir de ceux des fonctions exponentielles par une symétrie d'axe $x = y$ (il s'agit de la droite passant par l'origine avec un angle de 45°).