Chapitre 5

Fonctions

Les fonctions se cachent partout. La plupart des phénomènes de la vie de tous les jours peuvent être examinés du point de vue des fonctions : la température en fonction de l'heure, le prix du billet de train en fonction de la distance, le prix de l'entrecôte de cheval en fonction de la quantité achetée, etc.

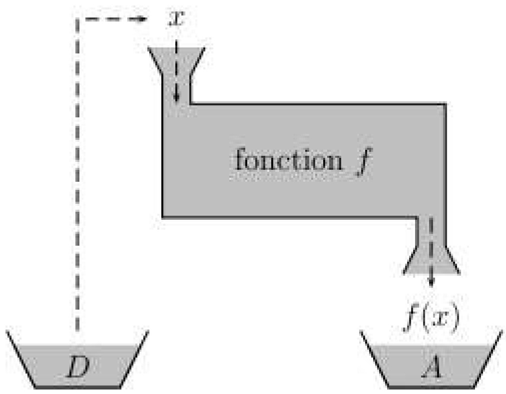
5.1. Les fonctions et leur représentations

Définition

Soit D et A deux ensembles.

Une *fonction* est une correspondance, souvent appelée f, qui assigne à CHAQUE $x \in D$ un UNIQUE élément de A, noté $f(x)$. On dit que $f(x)$ est *l'image de x par la fonction f*. D est appelé le *domaine de définition de f* et A est appelé le *domaine d'arrivée de f*.

Lorsque les ensembles D et A sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$, on parle de *fonctions réelles*.



Notation mathématique $\quad f : D \to A;\ x \mapsto f(x)$

Le lecteur remarquera que la flèche qui associe à un élément de départ son image a un petit trait vertical au début !

Précision au sujet des mots 'CHAQUE' et 'UNIQUE'

Le mot 'CHAQUE' signifie que $f(x)$ existe quel que soit $x \in D$.

Le mot 'UNIQUE' signifie qu'un élément x ne peut pas avoir deux images différentes. En termes d'implications :

$$x_1 = x_2 \implies f(x_1) = f(x_2)$$

«si les éléments de départs sont identiques, alors leurs images sont les mêmes»

ou (sa contraposée)

$$f(x_1) \neq f(x_2) \implies x_1 \neq x_2$$

«si les images de deux éléments sont différentes, alors ces éléments ne sont pas les mêmes»

Les trois principales façons de se représenter une fonction réelle f

1. *Le tableau de valeurs.*

   Voici un tableau de valeurs représentant la fonction f.

x	-2.5	-1	0	1	1.5	2	2.5	3	4	5.5
$f(x)$	14.25	3	-2	-5	-5.75	-6	-5.75	-5	-2	6.25

   Malheureusement, il ne permet pas de savoir quelles sont les valeurs de f en dehors de celles qui y sont inscrites. C'est donc la manière la moins pratique pour présenter une fonction.

2. *La représentation graphique.*

   On dessine la représentation graphique d'une fonction en deux étapes :

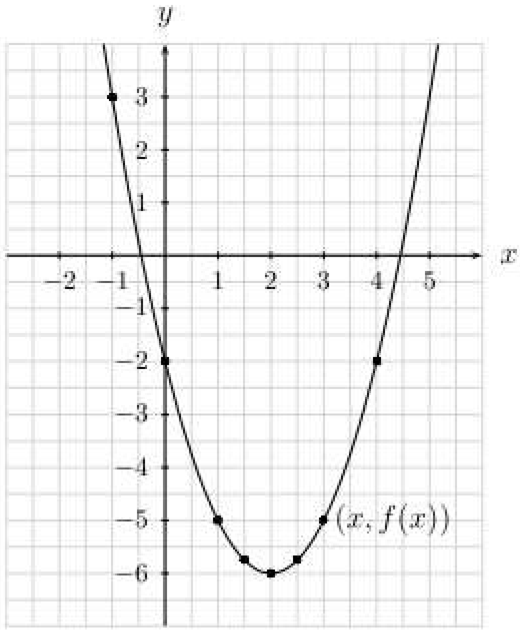
   a) *On dessine un certain nombre de points.*

   Pour dessiner un point, on choisit une valeur pour x (prise dans le domaine de définition D) et on calcule son image $f(x)$.

   x sera la première coordonnée du point et $f(x)$ sera sa deuxième. Autrement dit, le point sur la verticale correspondant à x sera à hauteur $f(x)$.

   b) *On relie ces points intelligemment.*

   Sauf si le graphe est une droite, on relie les points à la main en respectant les principes de base : on n'attribue pas à un seul x plusieurs images ; on n'attribue pas d'image à un élément x qui n'est pas dans le domaine de définition.



   Très pratique et relativement précise, la représentation graphique reste néanmoins restreinte à une région. Ici, par exemple, le graphe ne montre pas comment la fonction se comporte pour $x < -2$ et pour $x > 6$.

   Néanmoins, lorsqu'on dessine des graphes de fonctions, on s'arrange pour montrer tout ce qui est intéressant.

   Le *test de la droite verticale* permet de vérifier si le dessin est bien le graphe d'une fonction. En effet, CHAQUE droite verticale passant par le point $(x; 0)$ (avec $x \in D$) doit couper le graphe une UNIQUE fois !

3. *L'expression mathématique.*

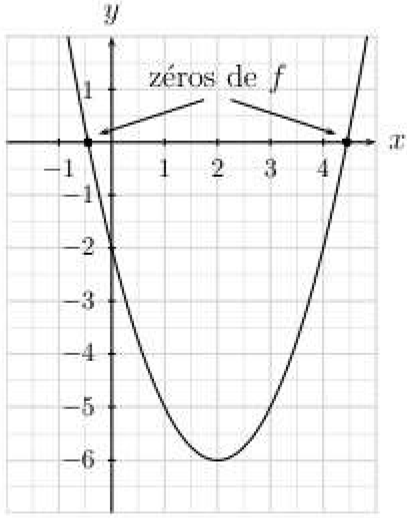
   Voici l'expression mathématique de la fonction f.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto f(x) = x^2 - 4x - 2$$

   L'expression mathématique est la meilleure façon de décrire une fonction, car en la connaissant on peut construire un tableau de valeurs et une représentation graphique. Alors que le contraire n'est pas possible (en tout cas pas de manière unique). L'expression mathématique contient TOUTE L'INFORMATION à propos de la fonction.

5.2. Les zéros d'une fonction

Définition



Soit $f : D \to A$ une fonction réelle ($D, A \subset \mathbb{R}$).

Les *zéros* de f sont les éléments de D qui sont envoyés sur 0 par la fonction f. L'*ensemble des zéros de* f est :

$$Z_f = \{x \in D : \underbrace{f(x) = 0}_{\text{équation à résoudre pour trouver les zéros de } f}\}$$

Exemple

L'ensemble des zéros de la fonction précédente, qui est donnée par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto f(x) = x^2 - 4x - 2$, est :

$$Z_f = \left\{2 - \sqrt{6}, 2 + \sqrt{6}\right\} \qquad \text{(merci à Viète)}$$

5.3. Graphes à savoir dessiner rapidement

5.3.1. Graphes des fonctions affines

Considérons une *fonction affine* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto ax + b$. On peut trouver un moyen d'identifier les paramètres a et b en évaluant la fonction.

En effet, on a $f(0) = b$. Ainsi b se trouve à l'intersection de la fonction avec l'axe vertical.

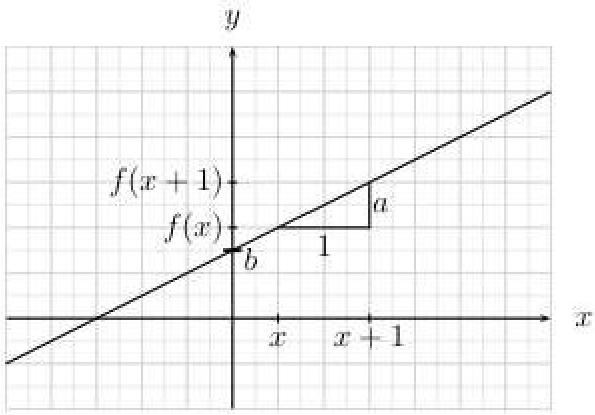
Pour découvrir quel est le rôle de a, on effectue le calcul suivant :

$$f(x+1) \;=\; a(x+1)+b \;=\; ax+a+b \;=\; ax+b+a \;=\; f(x)+a$$

Cela signifie que LORSQU'ON AVANCE HORIZONTALEMENT SUR LE GRAPHE DE 1 VERS LA DROITE, ON SE DÉPLACE VERTICALEMENT DE a.

On dit que a est la *pente* de f et que b est sa *hauteur*.

On peut ainsi voir a et b sur le graphe de la fonction.



Remarque pour les lecteurs avancés

Le calcul ci-dessous montre que si on se déplace horizontalement de λ, alors on se déplace verticalement de $\lambda \cdot a$ et que par conséquent le graphe de f est bien une droite.

$$f(x+\lambda) \;=\; a(x+\lambda)+b \;=\; ax+a\cdot\lambda+b \;=\; ax+b+a\cdot\lambda \;=\; f(x)+\lambda\cdot a$$

5.3.2. Graphes des fonctions exponentielles

Soit $a > 0$. On considère la *fonction exponentielle* $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto a^x$. On peut trouver un moyen d'identifier le paramètre a en évaluant la fonction.

En effet, on a $\exp_a(0) = a^0 = 1$. Ainsi le graphe coupe l'axe verticale à hauteur 1.

On a les relations

$$\exp_a(x+1) = a^{x+1} = a^x \cdot a = a \cdot \exp_a(x) \quad \text{et} \quad \exp_a(x-1) = a^{x-1} = \frac{a^x}{a} = \frac{\exp_a(x)}{a}$$

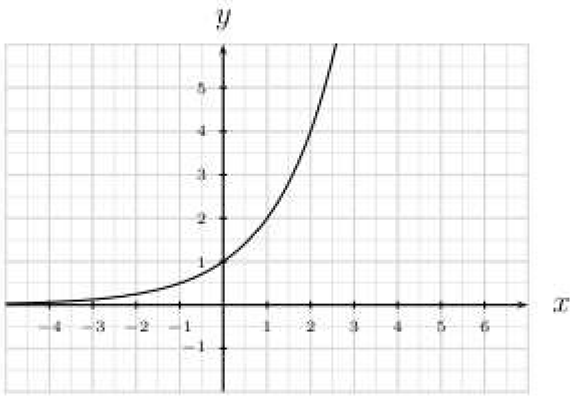
Cela signifie que :

> LORSQU'ON AVANCE HORIZONTALEMENT SUR LE GRAPHE DE 1 VERS LA DROITE, LA HAUTEUR EST MULTIPLIÉE PAR a.

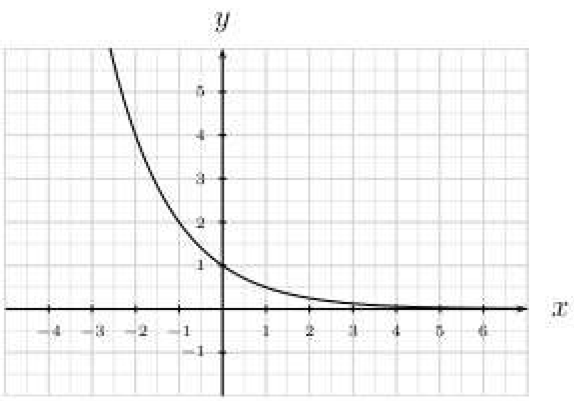
> LORSQU'ON AVANCE HORIZONTALEMENT SUR LE GRAPHE DE 1 VERS LA GAUCHE, LA HAUTEUR EST DIVISÉE PAR a.

Exemples

1. Voici le graphe de $\exp_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \exp_2(x) = 2^x$. Pour cette fonction, on multiplie la hauteur par 2 lorsqu'on avance de 1 vers la droite et on divise la hauteur par 2 lorsqu'on avance de 1 vers la gauche.



2. Voici le graphe de $\exp_{\frac{1}{2}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \exp_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Pour cette fonction, on multiplie la hauteur par $\frac{1}{2}$ (on divise donc la hauteur par 2) lorsqu'on avance de 1 vers la droite et on divise la hauteur par $\frac{1}{2}$ (on multiplie donc la hauteur par 2) lorsqu'on avance de 1 vers la gauche.



Si le graphe de $\exp_{\frac{1}{2}}$ est obtenu par une symétrie d'axe Oy à partir du graphe de $\exp_2$, c'est parce qu'on a la relation :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}$$

Autrement dit :

$$\exp_2(-x) = \exp_{\frac{1}{2}}(x)$$

5.3.3. Graphes des fonctions quadratiques

Considérons une *fonction quadratique* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ x\mapsto ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$. On peut trouver un moyen d'identifier les paramètres a, b et c en examinant la fonction.

En effet, on a $f(0)=c$. Ainsi c se trouve à l'intersection de la fonction avec l'axe verticale.

Or, grâce à une identité remarquable, on a :

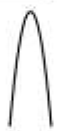
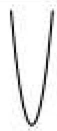
$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(\overbrace{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}}^{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}}+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} \end{aligned}$$

Donc, on a

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\ \text{nombre}$$

Cela nous montre que le graphe de f est une parabole et que :

1. Le sommet de la parabole est le point
$$S\left(-\frac{b}{2a};\ f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$
2. Il y a une symétrie d'axe vertical $x=-\frac{b}{2a}$ (passant par le sommet).
3. le paramètre a règle l'écartement et l'orientation de la parabole.

$a<0$ grand	$a<0$ petit	$a>0$ petit	$a>0$ grand
			

Procédure à suivre pour faire le graphe d'une fonction quadratique

Pour faire le graphe de la fonction quadratique d'expression $f(x)=2x^2-8x+3$, on procède comme suit :

1. On calcule d'abord le sommet. Ici, on a $S(2;-5)$ car $-\frac{b}{2a}=2$ et $f(2)=-5$.
2. Puis on place l'axe de symétrie.
3. Ensuite, on peut calculer un ou deux points et noter les points symétriques correspondant afin de pouvoir faire le graphe. Ici le fait que $f(0)=3$ nous donne le point $(0;3)$ et son symétrique $(4;3)$.
4. Finalement, on relie les quelques points.
5. En guise de vérification, on vérifie que l'orientation et l'écartement sont compatibles avec le coefficient dominant (ici 2). Ici, c'est parfait puisque la parabole est orientée vers le haut et est assez étroite.