

Chapitre 7

Fractals

L'introduction ci-dessous est inspirée du livre «Introducing Fractal Geometry» de Nigel Lesmoir-Gordon, Will Rood et Ralph Edney.

7.1 Introduction

La plupart des formes de la nature sont dynamiques, elles se distinguent de la géométrie fixe et statique de l'Homme dans la mesure où elles se développent et évoluent dans le temps. Ces structures en développement sont apparemment dictées par le chaos, comme par exemples les turbulences (prévisions météorologiques, simulation de courants marins, fumée de cigarettes), la forme d'un éclair, la structure d'un arbre, d'une fougère, de nos poumons, de notre système sanguin, le cours d'une action à la bourse, les mouvements browniens, les feux de forêts, la structure des flocons de neige. Des paysages imaginaires peuvent aussi être créés à l'aide de fractals.

Les fractals sont des objets mathématiques très variés tous construits à partir d'un processus itératif. Ils sont utilisés à des fins de simulations pour tenter de comprendre et de faire des prévisions à propos des structures en développement citées ci-dessus.

Dans un avenir proche ces modèles pourraient permettre de réduire les risques de crises cardiaques, de détecter un cancer (comme les cancers du sein) ou la fin de la période d'incubation du virus du SIDA¹. Des modèles basés sur les fractals sont déjà utilisés pour soigner les os fragiles. La géométrie fractale est utilisée efficacement pour trouver des objets créés par l'Homme à partir de photos prises depuis les satellites (comme des sous-marins). Les tremblements de terre possèdent une signature fractale, tout comme les épidémies. Les images peuvent aussi être compressées en utilisant des fractals.

Le chou romanesco est un exemple classique de structure fractale se trouvant dans la nature.



1. Beaucoup de malades du SIDA restent séropositifs une dizaine d'années avant que le virus se réveille.

7.2 Fractalisation dans le plan

Pour créer des fractals tels que l'ensemble de Cantor, la courbe de Von Koch, les fractals de Sierpinski, on a besoin d'effectuer des transformations dans le plan.

Transformations affines du plan		
	Transformations linéaires	Transformations non linéaires
Similitudes	Les rotations Les homothéties Les symétries	Les translations
	Les projections Les étirements	

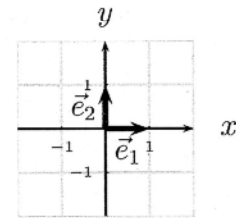
Les transformations linéaires sont effectuées grâce à des matrices².

7.2.1 Les applications affines et les matrices

On dit que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une transformation *linéaire* si :

1. $f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)$ pour tout vecteurs \vec{v}_1, \vec{v}_2 dans \mathbb{R}^2 .
2. $f(\lambda\vec{v}) = \lambda f(\vec{v})$ pour tout vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dans le reste du cours, on utilisera la base canonique $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.



Ces vecteurs de base nous permettent de décrire chaque vecteur du plan comme unique combinaison linéaire de \vec{e}_1 et \vec{e}_2 . Par exemple, le vecteur \overrightarrow{OP} reliant l'origine $O(0;0)$ au point $P(x;y)$ est décrit de la manière suivante.

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \stackrel{\text{notation}}{=} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Considérons maintenant le vecteur $\vec{v} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2$, aussi noté $\vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$, et regardons comment une transformation linéaire f agit sur ce vecteur. Par linéarité on a :

$$f(\vec{v}) = \lambda_1 f(\vec{e}_1) + \lambda_2 f(\vec{e}_2)$$

Ainsi, il suffit de connaître $f(\vec{e}_1)$ et $f(\vec{e}_2)$ pour pouvoir connaître l'image de n'importe quel vecteur par la fonction f . Or $f(\vec{e}_1)$ et $f(\vec{e}_2)$ sont des vecteurs qui s'écrivent aussi dans la base canonique $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Disons que

$$f(\vec{e}_1) = a_{1,1}\vec{e}_1 + a_{2,1}\vec{e}_2 \stackrel{\text{notation}}{=} \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(\vec{e}_2) = a_{1,2}\vec{e}_1 + a_{2,2}\vec{e}_2 \stackrel{\text{notation}}{=} \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \end{pmatrix}$$

Regardons comment on peut écrire le vecteur $f(\vec{v})$ dans la base canonique.

$$f(\vec{v}) = \lambda_1 f(\vec{e}_1) + \lambda_2 f(\vec{e}_2) \stackrel{\text{notation}}{=} \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}\lambda_1 + a_{1,2}\lambda_2 \\ a_{2,1}\lambda_1 + a_{2,2}\lambda_2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, un vecteur est décrit par deux nombres et une application linéaire par quatre nombres. Une idée géniale a été d'utiliser une notation matricielle pour décrire les transformations linéaires.

Notation vectorielle	\vec{v}	f	$f(\vec{v})$
Notation matricielle	$\vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$	$A\vec{v} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$

Cela permet de définir la multiplication matrice-vecteur.

$$f(\vec{v}) \stackrel{\text{notation}}{=} A\vec{v} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}\lambda_1 + a_{1,2}\lambda_2 \\ a_{2,1}\lambda_1 + a_{2,2}\lambda_2 \end{pmatrix}$$

On remarque qu'avec cette notation, on a

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) \end{pmatrix}$$

Cela nous permet d'énoncer la *règle pour la construction de la matrice A* associée à la transformation f :

LES COLONNES DE LA MATRICE SONT LES IMAGES DES VECTEURS DE BASE

7.2.2 Addition de transformations linéaires

Soit f et g deux transformations linéaires du plan. Notons A et B les matrices associées respectivement à f et à g .

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}$$

La matrice associée à la transformation $f + g$ est donnée par l'*addition des matrices A* et B :

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} \end{pmatrix}$$

Preuve

En effet, comme les colonnes de la matrice sont les images des vecteurs de base, il suffit de calculer les images de \vec{e}_1 et de \vec{e}_2 par l'application $f + g$. Grâce à la règle pour la construction des matrices A et B , on a :

$$f(\vec{e}_i) \stackrel{\text{notation}}{=} A\vec{e}_i = \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ a_{2,i} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g(\vec{e}_i) \stackrel{\text{notation}}{=} B\vec{e}_i = \begin{pmatrix} b_{1,i} \\ b_{2,i} \end{pmatrix}$$

Par conséquent, l'image du i -ième vecteur de base est :

$$(f + g)(\vec{e}_i) = f(\vec{e}_i) + g(\vec{e}_i) \stackrel{\text{notation}}{=} \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ a_{2,i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,i} \\ b_{2,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,i} + b_{1,i} \\ a_{2,i} + b_{2,i} \end{pmatrix}$$

On reconnaît ainsi les colonnes de $A + B$. \square

7.2.3 Composition de transformations linéaires

Soit f et g deux transformations linéaires du plan. Notons A et B les matrices associées respectivement à f et à g .

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}$$

La matrice associée à la transformation $f \circ g$ est donnée par la *multiplication des matrices* A et B :

$$AB = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} \end{pmatrix}$$

Preuve

En effet, comme les colonnes de la matrice sont les images des vecteurs de base, il suffit de calculer les images de \vec{e}_1 et de \vec{e}_2 par l'application $f \circ g$. Par hypothèse, on a

$$(f \circ g)(\vec{e}_i) = f(g(\vec{e}_i)) \stackrel{\text{notation}}{=} A(B\vec{e}_i)$$

Grâce à la règle de construction des matrices, on constate que $B\vec{e}_i$ est la i -ième colonne de B . Cela permet de continuer le calcul, puisqu'on sait multiplier une matrice et un vecteur.

$$A(B\vec{e}_i) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,i} \\ b_{2,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,i} + a_{1,2}b_{2,i} \\ a_{2,1}b_{1,i} + a_{2,2}b_{2,i} \end{pmatrix}$$

On reconnaît ainsi les colonnes de AB . \square

7.2.4 Exemples de matrices

On utilise la règle pour la construction de la matrice A associée à la transformation f désirée.

LES COLONNES DE LA MATRICE SONT LES IMAGES DES VECTEURS DE BASE

Matrice identité

Voici la matrice associée à la transformation qui ne fait rien.

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice de rotation d'un quart de tour

Voici la matrice R associée à la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice associée à une homothétie de facteur 2

Voici la matrice H associée à une homothétie de facteur 2.

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrices de symétrie

Voici la matrice S_x associée à la symétrie selon l'axe des x .

$$S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Voici la matrice S_y associée à la symétrie selon l'axe des y .

$$S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice d'étirement

On peut considérer un étirement d'un facteur 2 selon l'axe des x et d'un facteur 3 selon l'axe des y . Voici sa matrice associée.

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrices de projection

On peut effectuer une projection orthogonale sur l'axe des x .

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut aussi projeter tout le plan sur l'origine.

$$\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7.3 Création de fractals

Quelques fractals célèbres comme les napperons de Sierpinski, le flocon de von Koch, la fougère de Barnsley sont obtenus en utilisant des machines à copies réduites multiples (MCRM). Ces machines consistent à prendre une image et à la transformer en un collage de plusieurs images obtenues à l'aide de transformations affines contractantes³ de l'image précédente. Pour simplifier une telle étape sera appelée *fractalisation*.

Mathématiquement, si A est une image (un sous-ensemble du plan), sa fractalisation sera notée $W(A)$. Si on utilise n transformations affines contractantes, notée w_1, \dots, w_n , alors on a

$$W(A) = w_1(A) \cup w_2(A) \cup \dots \cup w_n(A)$$

Si A_0 est l'image de départ, $A_1 = W(A_0)$ sera sa première fractalisation, $A_2 = W(A_1)$ sera sa deuxième fractalisation. Ainsi de suite, $A_k = W(A_{k-1})$ sera sa k -ième fractalisation.

Dans A_1 on retrouve n copies de A_0 . Dans A_2 on retrouve n copies de A_1 , donc n^2 copies de A_0 . Ainsi, on voit que A_k contient n^k copies de A_0 .

Théorème du point fixe de Banach-Hausdorff

Si, dans \mathbb{R}^n , on a n transformations affines contractantes³ w_1, \dots, w_n et l'opérateur de Hutchinson

$$W(A) = w_1(A) \cup w_2(A) \cup \dots \cup w_n(A) \quad \text{avec} \quad A \subset \mathbb{R}^n$$

Alors, il existe une seule image (compacte⁴, non vide) qui est solution de l'équation

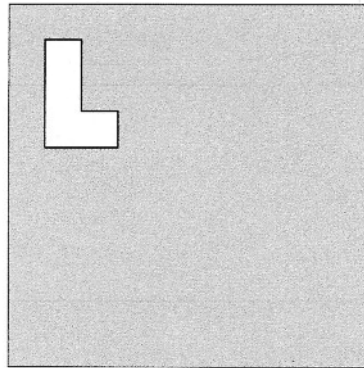
$$W(X) = X$$

De plus cette image est la limite des fractalisations de n'importe quel ensemble borné non vide dans \mathbb{R}^n . Pour cette raison, cette image est notée A_∞ et appelée l'attracteur associé à la machine à copies réduites multiples.

7.3.1 Description d'une MCRM

Pour décrire une MCRM, on utilise des modèles : il s'agit d'une image non symétrique qui montre les transformations affines contractantes utilisée à chaque fractalisation.

Voici le modèle qui sera utilisé dans ce cours.

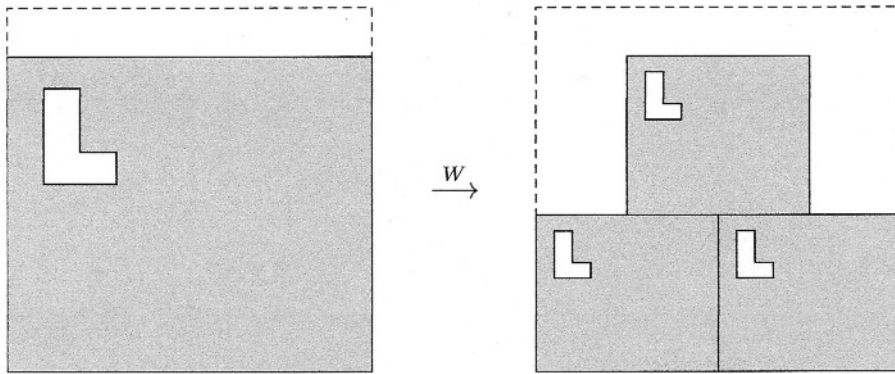


3. Une fonction est dite contractante si la distance entre deux points quelconques diminue lorsque l'on applique la fonction.

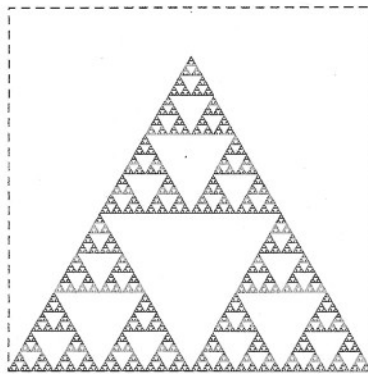
4. Dans \mathbb{R}^n , les parties compactes sont les parties fermées et bornées. Une partie est fermée si toute suite convergente contenue dans la partie converge vers un point de la partie (par exemple, l'intervalle $]0, 1]$ n'est pas fermé car la suite $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ converge vers 0 et que $0 \notin]0, 1]$).

Le napperon de Sierpinski

Voici la MCRM qui permet d'obtenir le napperon de Sierpinski. Afin d'obtenir une image finale inscrite dans un triangle équilatéral, on donne des dimensions légèrement différentes au modèle (bien que seul les applications affines contractantes comptent, elles sont plus facilement discernables avec ce modèle).

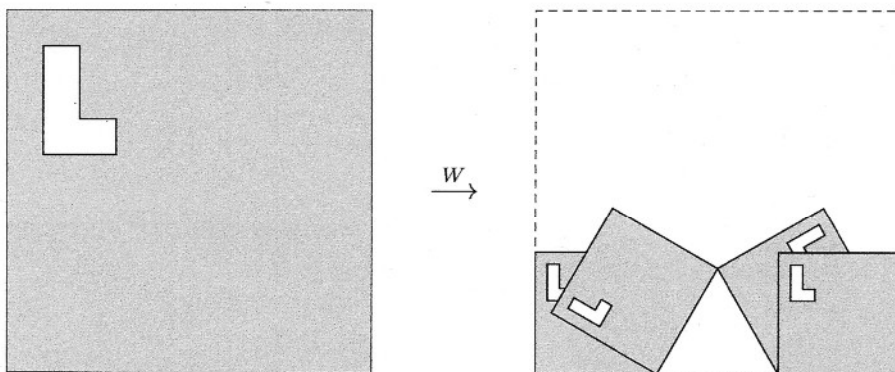


Voici l'attracteur d'une telle MCRM.

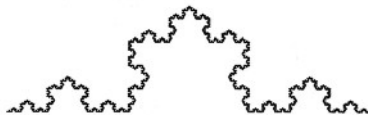


La courbe de von Koch

Voici la MCRM qui permet d'obtenir la courbe de von Koch associée à un angle de 60°.



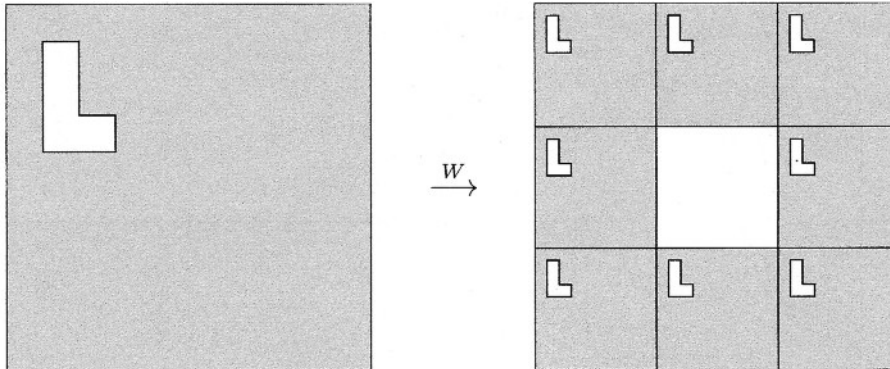
Voici l'attracteur d'une telle MCRM.



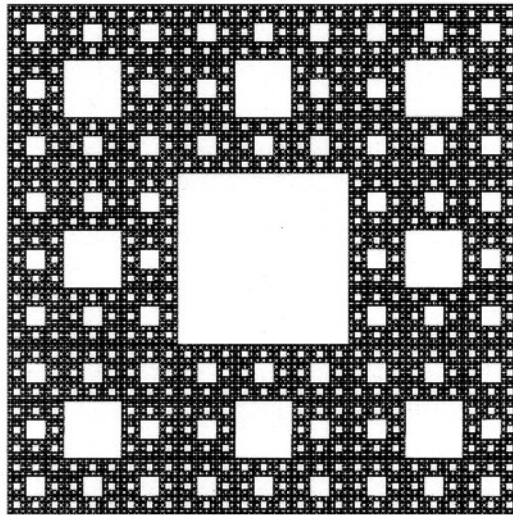
Cet attracteur est une courbe continue (pas une fonction!) qui n'est dérivable en aucun point!!!

Le tapis de Sierpinski

Voici la MCRM qui permet d'obtenir le tapis de Sierpinski.

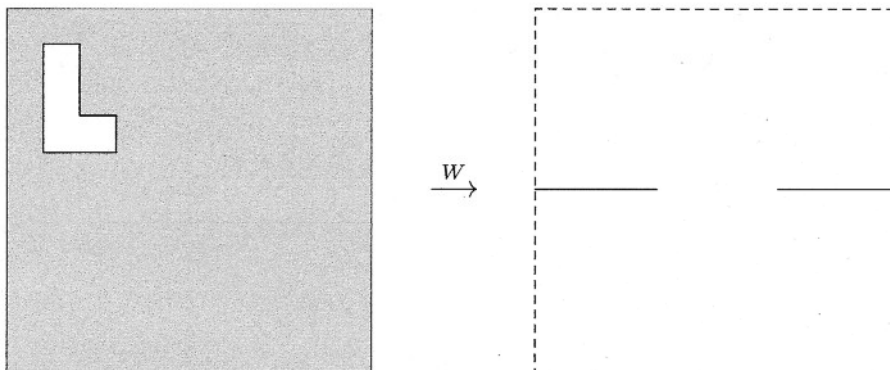


Voici l'attracteur d'une telle MCRM.



L'ensemble de Cantor

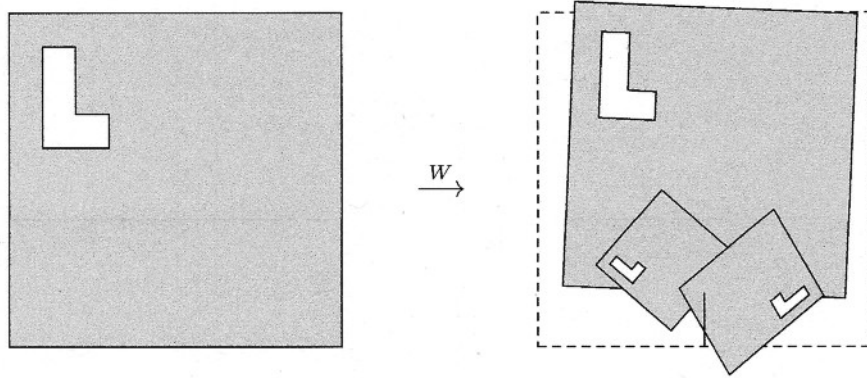
L'ensemble de Cantor s'obtient en enlevant à la ligne $[0, 1]$ son tiers médian, puis à chaque ligne restante on enlève le tiers médian, et ainsi de suite... Voici la MCRM qui permet d'obtenir ce fractal.



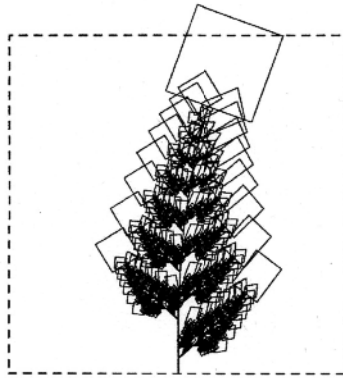
On peut voir l'ensemble de Cantor dans le tapis de Sierpinski (prendre l'intersection du tapis de Sierpinski avec la droite horizontale passant par le milieu du carré (d'équation $y = \frac{1}{2}$). On peut aussi la voir comme la droite verticale passant par le milieu du carré, ou encore comme l'une ou l'autre des diagonales.

La fougère de Barnsley

Voici la MCRM qui permet d'obtenir la fougère de Barnsley.



L'attracteur d'une telle MCRM est informatiquement pénible à obtenir à l'aide de la MCRM. Voici la huitième fractalisation qui, sur un Pentium 4 cadencé à 3.2 GHz, a nécessité plus de 72 secondes. Cette fractalisation a été obtenue en prenant un carré vide comme image de départ.



Cherchons combien de temps cela prendrait-il pour avoir une image de taille de 1000 pixels par 1000 pixels (les photos numériques de haute qualité ont plus de pixels que cela) avec une fougère en haute résolution. Le plus grand côté du grand modèle à la première fractalisation est le 85% du côté correspondant sur le modèle initial. Le nombre N de fractalisations nécessaire satisfait donc l'équation suivante (puisque'il faudrait que la taille du grand modèle soit de 1 pixel carré afin d'avoir une image haute définition).

$$1000 \cdot 0.85^N \cong 1 \iff 0.85^N \cong 0.001 \iff N \cong \log_{0.85}(0.001) \cong 42.50$$

Il faudrait ainsi un minimum de 43 fractalisations. Si on note M le nombre de rectangles qu'il faut dessiner (et dont il faut calculer les coordonnées), on a

$$M = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^N = \frac{4^{N+1} - 1}{3}$$

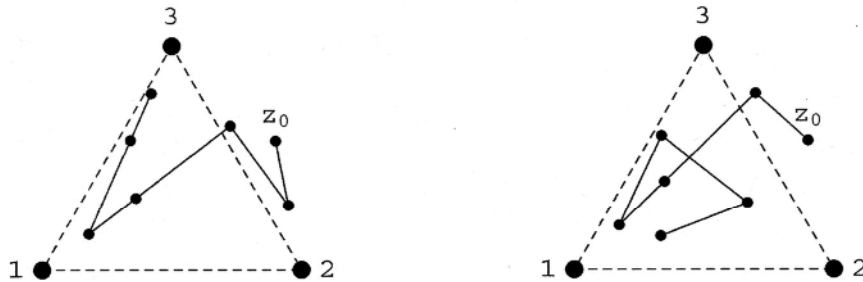
Pour $N = 43$, on a $M \cong 1.03 \cdot 10^{26}$ rectangles. En se basant sur le fait que le pentium ci-dessus a pris 72 secondes pour dessiner 87'381 rectangles ($M = 8$) et en supposant que le temps nécessaire est proportionnel, on aurait besoin plus de $8.50 \cdot 10^{22}$ secondes, ce qui fait plus de $9.8380 \cdot 10^{17}$ jours. En se basant sur le fait qu'une année astronomique prends environ 365,2422 jours, le calcul prendrait plus de $2.69 \cdot 10^{15}$ années. Ce qui est un temps plus grand que l'âge de l'Univers!

7.4 Le jeu du Chaos

7.4.1 Une surprise

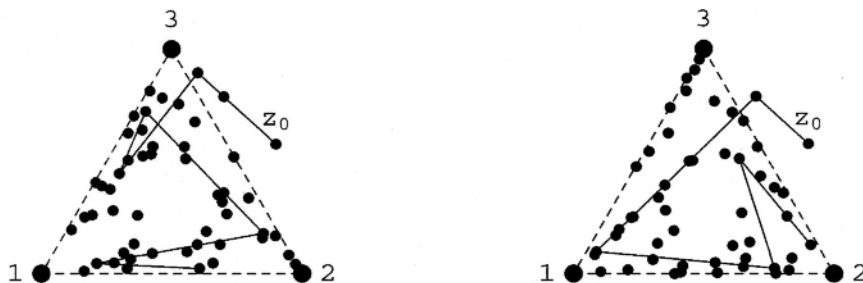
On prend un triangle isocèle et l'on numérote les sommets. Considérons le jeu de hasard suivant. On prend un point du plan et on choisit aléatoirement (en lançant un dé par exemple) un nombre parmi 1, 2 ou 3. Le point suivant sera au milieu du segment dont les sommets sont le point précédent et le sommet du triangle associé au choix aléatoire.

Voici deux exemples où le point de départ z_0 est le même et où on a joué 6 fois.



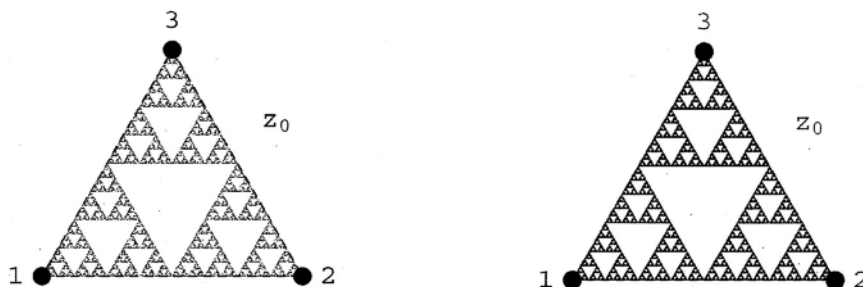
On peut se convaincre aisément qu'une fois qu'un point arrive dans le triangle il n'en sort plus. Mis à part cette remarque, on a l'impression que les points peuvent se déplacer n'importe où et qu'il n'y a pas d'intérêt à étudier ce jeu de manière plus attentive.

Voici deux exemples où le point de départ z_0 est le même et où on a joué 50 fois. Pour un meilleur aspect seul les 10 premiers points ont été reliés.



Maintenant on constate que le milieu du triangle contient relativement moins de points. Ainsi, il se passe peut-être quelque chose d'intéressant.

Voici ce qui se passe si on joue 10'000 fois (à gauche) et 100'000 fois (à droite).



Ohh... On voit apparaître un fractal : le napperon de Sierpinski !

7.4.2 Le jeu du chaos et les attracteurs des MCRM

Rappelons qu'une MCRM est composée de n transformations affines contractantes, notée w_1, \dots, w_n et que l'attracteur est obtenu en itérant l'opérateur de Hutchinson suivant sur une image bornée quelconque.

$$W(A) = w_1(A) \cup w_2(A) \cup \dots \cup w_n(A) \quad \text{avec} \quad A \subset \mathbb{R}^n$$

Le jeu du chaos associé consiste à choisir un point du plan et à lui appliquer itérativement une seule transformation affine contractante choisie au hasard parmi les n possibles. Si le point choisi est un point de l'attracteur, alors tous les points suivants seront aussi dans l'attracteur. Mieux : pour chaque point de l'attracteur, il y a une probabilité non nulle d'avoir un point de cette suite d'itérations qui sera autant proche que l'on veut du point de l'attracteur. En langage mathématique cela se traduit par le théorème suivant.

Théorème

Si, dans \mathbb{R}^n , on a n transformations affines contractantes w_1, \dots, w_n et des nombres réels positifs p_1, \dots, p_n tels que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ (ce sont les probabilités de choisir les transformations correspondantes).

Notons $(s_i)_{i \geq 1}$ la suite de nombres aléatoires choisis entre 1 et n avec les probabilités associées ci-dessus.

Soit z_0 un point de l'attracteur de la MCRM associée aux transformations, notée A_∞ (on peut prendre n'importe quel point fixe d'une des transformations (car ce point est forcément dans l'attracteur)).

On considère la suite aléatoire $z = (z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $z_k = w_{s_k}(z_{k-1})$ pour tout $k \geq 1$.

Alors

1. Tous les points de la suite z sont dans l'attracteur A_∞ .
2. Cette suite remplit presque sûrement⁵ de manière dense⁶ l'attracteur A_∞ .

Remarque

Si le point z_0 n'est pas dans l'attracteur, on a tout de même une excellente approximation, en effet plus on avance dans la suite plus on se trouve dans une fractalisation proche de l'attracteur.

En effet, on applique le théorème du point fixe de Banach-Hausdorff avec la partie $A_0 = \{z_0\}$. Soulignons le fait que le i -ième élément de la suite z se trouve dans la i -ième fractalisation A_i .

Idée de la preuve

Le point 1 provient de l'invariance de l'attracteur par l'opérateur de Hutchinson, c'est-à-dire

$$W(A_\infty) = A_\infty$$

5. Cela signifie que la probabilité pour que cela ne soit pas le cas est nulle.

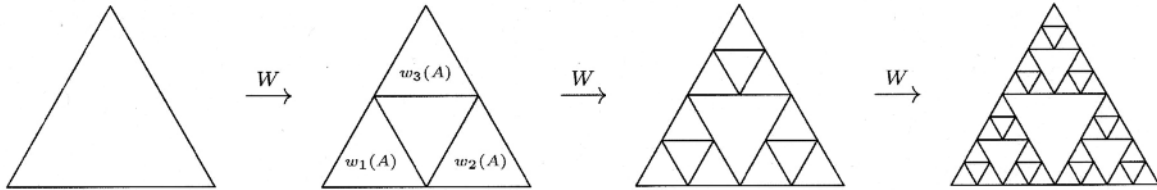
6. Un ensemble est dit dense dans un autre si tout point de l'autre ensemble admet un point arbitrairement proche dans le premier ensemble.

Rappelons que cet opérateur est défini comme suit.

$$W(A) = w_1(A) \cup w_2(A) \cup \dots \cup w_n(A) \quad \text{avec} \quad A \subset \mathbb{R}^n$$

Le point 2 est plus délicat à montrer. On va regarder ce qu'il se passe sur le napperon de Sierpinski et on va remplacer la difficulté de la démonstration due à la densité en pensant à ce qu'il se passe lors du dessin (résolution de l'image).

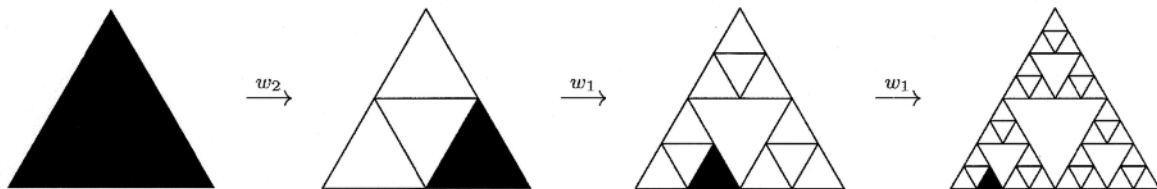
Voici les premières fractalisations du napperon de Sierpinski (en prenant des triangles vides comme image de base).



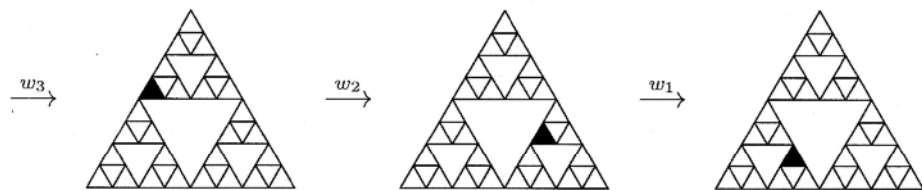
Imaginons que la résolution du dernier dessin soit suffisante (si ce n'est pas le cas, alors il suffit de continuer un peu la fractalisation).

On doit tirer au hasard une suite de nombres entre 1 et 3 (puisque'il y a exactement trois transformations affines contractantes pour le napperon de Sierpinski).

Imaginons que l'on ait $s_1 = 2, s_2 = 1, s_3 = 1, s_4 = 3, s_5 = 2$ et $s_6 = 1$ pour les six premiers termes de la suite aléatoire. Prenons le coin en bas à gauche pour z_0 . Ainsi les quatre premiers termes de la suite z sont $z_0, w_2(z_0), w_1(w_2(z_0)), w_1(w_1(w_2(z_0)))$ et $w_3(w_1(w_1(w_2(z_0))))$. Ci-dessous, on noircit les triangles de la fractalisation dans lequel se trouve les éléments de la suite z (dans le cas où le point se trouve sur un coin, on noircit le triangle dont le coin est en bas à gauche).



Comme on a supposé avoir atteint la résolution minimale, on va imaginer la fractalisation suivante, mais seulement noircir le triangle dans la résolution minimale.



Maintenant qu'on a vu ce qu'il se passe sur la résolution minimale, il faut démontrer que tous les triangles de cette fractalisation seront remplis lorsque l'on avance le long de la suite aléatoire. Or, dans notre exemple il y a 27 triangles (puisque'on s'est arrêté à la troisième fractalisation et qu'il y a 3 transformations). Le premier triangle noirci ci-dessus dans la résolution minimale correspond aux valeurs (2, 1, 1) de la suite, le triangle noirci dans l'image suivante correspond aux valeurs (1, 1, 3), le suivant correspond à (1, 3, 2), le suivant correspond à (3, 2, 1). Ainsi on voit que si dans la suite aléatoire, toutes les combinaisons apparaissent, alors tous les triangles seront noircis (il y a bien 27 triplets de nombres choisis entre 1 et 3). Or en choisissant à chaque étape un nombre au hasard parmi 1, 2 ou 3, on a une probabilité non nulle de trouver tous les 27 triplets cités ci-dessus.

La fougère de Barnsley

Grâce au jeu du chaos, on peut dessiner la fougère de Barnsley dans un temps beaucoup plus réaliste.



7.5 Dimension d'ensembles auto-semblables

Définitions

1. Une *similitude* est une transformation affine qui n'est composée que de rotations, d'homothéties, de symétries et de translation.
2. Une partie est *semblable* à une autre partie s'il existe une similitude qui transforme la partie en l'autre partie.
3. Un ensemble est *auto-semblable* s'il peut être partitionné en morceaux arbitrairement petits qui sont tous semblables à l'ensemble lui-même.

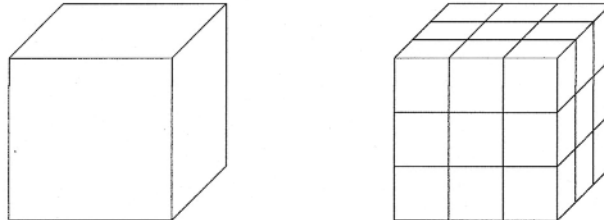
Remarques

1. Il existe des ensembles auto-semblables qui ne sont pas des fractals, tels qu'un segment, un carré et un cube.
2. Le napperon et le tapis de Sierpinski, l'ensemble de Cantor et la courbe de von Koch sont auto-semblables. La fougère de Barnsley n'est pas auto-semblable (il y a des étirements dans les transformations affines).

Dimension d'un segment, d'un carré et d'un cube

Un segment, un carré et un cube sont des ensembles auto-semblables puisqu'on peut les partitionner en utilisant des réductions.

Voici une partition sur le cube associée à un facteur de réduction de $\frac{1}{3}$.



Le tableau suivant indique combien de morceaux correspondent à une partition associée à un facteur de réduction donné.

Objet	nombre de morceaux	facteur de réduction	dimension de l'objet
segment	3	1/3	1
segment	9	1/9	
segment	n	$1/n$	
carré	9	1/3	2
carré	81	1/9	
carré	n^2	$1/n$	
cube	27	1/3	3
cube	729	1/9	
cube	n^3	$1/n$	

Si on note n pour le nombre de morceaux, r pour le facteur de réduction et D pour la dimension, on remarque la relation suivante.

$$n = \frac{1}{r^D} \iff \ln(n) = D \ln\left(\frac{1}{r}\right) \iff D = \frac{\ln(n)}{\ln(1/r)}$$

7.5.1 Dimension des fractals auto-semblables

Théorème

Pour tout ensemble auto-semblable, le nombre $D = \frac{\ln(n)}{\ln(1/r)}$ est le même quelque soit la partition en n morceaux pour un (unique) facteur de réduction r .

Ce nombre D est appelé la *dimension auto-semblable*.

Dimension de la courbe de von Koch

nombre de morceaux	facteur de réduction
4	1/3
16	1/9
4^k	$1/3^k$

Regardons ce qu'il se passe si on reprend la formule précédente.

$$D = \frac{\ln(n)}{\ln(1/r)} = \frac{\ln(4^k)}{\ln(3^k)} = \frac{k \ln(4)}{k \ln(3)} = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \cong 1.2619$$

Dimension du napperon de Sierpinski

nombre de morceaux	facteur de réduction
3	1/2
9	1/4
3^k	$1/2^k$

Regardons ce qu'il se passe si on reprend la formule précédente.

$$D = \frac{\ln(n)}{\ln(1/r)} = \frac{\ln(3^k)}{\ln(2^k)} = \frac{k \ln(3)}{k \ln(2)} = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \cong 1.5850$$

Dimension de l'ensemble de Cantor

nombre de morceaux	facteur de réduction
2	1/3
4	1/9
2^k	$1/3^k$

Regardons ce qu'il se passe si on reprend la formule précédente.

$$D = \frac{\ln(n)}{\ln(1/r)} = \frac{\ln(2^k)}{\ln(3^k)} = \frac{k \ln(2)}{k \ln(3)} = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \cong 0.6309$$