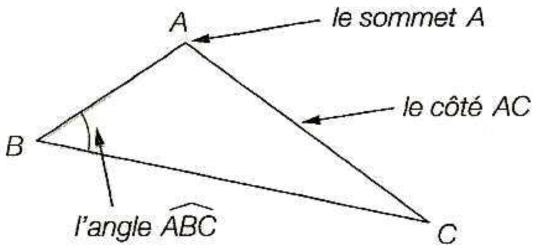
Géométrie

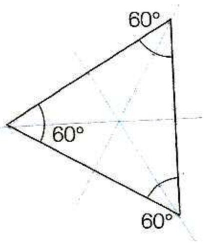
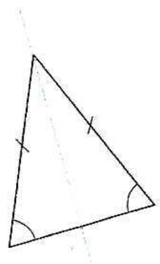
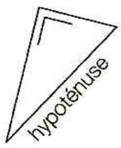
Triangles, constructions et mesures

§ 1. Triangles et caractéristiques

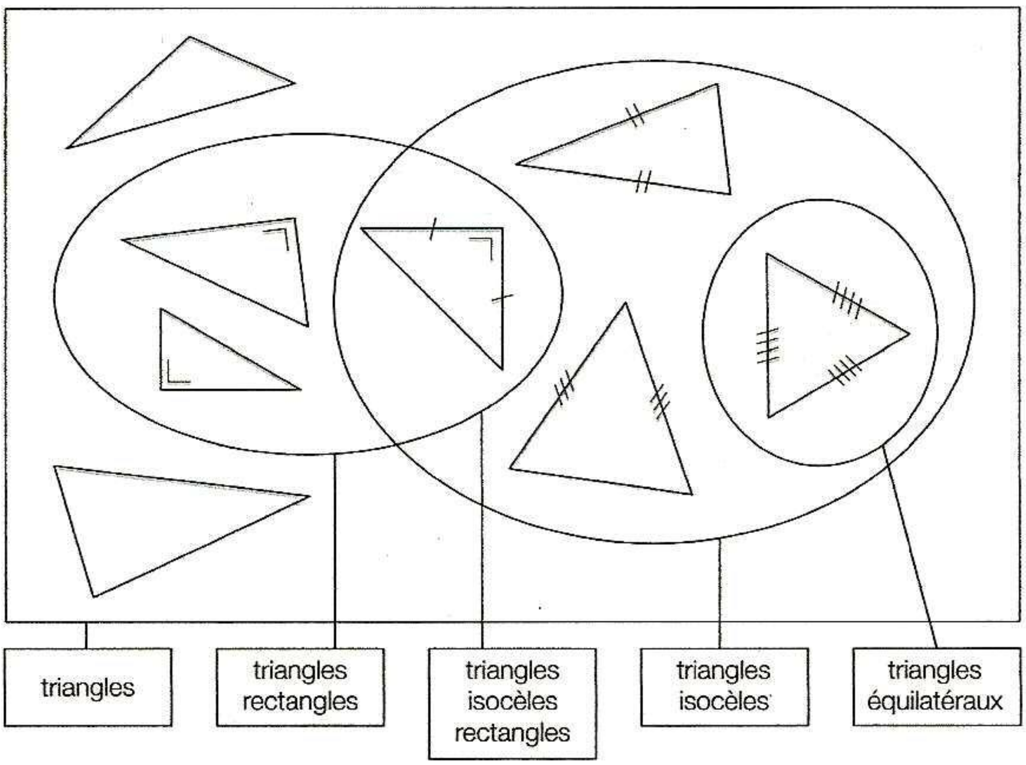
Un **triangle** est une figure qui a trois côtés, trois angles et trois sommets:



Il existe trois sortes de triangles qui ont des caractéristiques particulières: les **triangles équilatéraux**, les **triangles isocèles** et les **triangles rectangles**. Leurs caractéristiques sont les suivantes:

Nom	Figure	Côtés	Angles	Symétries
Triangle équilatéral		Trois côtés isométriques	Trois angles isométriques	Trois axes de symétrie
Triangle isocèle		Au moins deux côtés isométriques	Au moins deux angles isométriques	Au moins un axe de symétrie
Triangle rectangle		Deux côtés perpendiculaires. Le côté opposé à l'angle droit est l'hypoténuse.	Un angle droit	

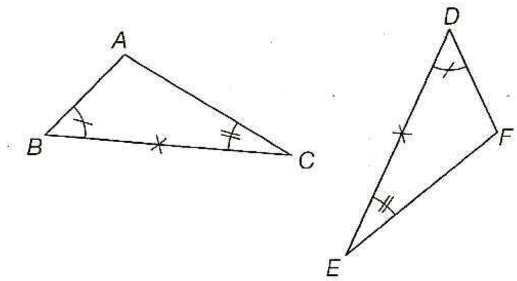
On peut alors classer les différentes sortes de triangles dans un schéma tel que celui-ci:



On est parfois intéressé à déterminer si deux triangles sont isométriques, c'est-à-dire si les mesures des côtés de l'un sont les mêmes que celles des côtés de l'autre:

Deux triangles sont isométriques, s'ils ont :

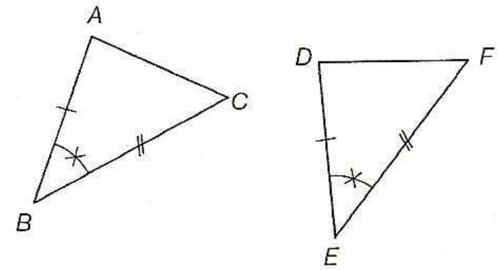
- un côté isométrique compris entre deux angles respectivement isométriques :



Les triangles ABC et DEF sont isométriques, car $BC = DE$, $\widehat{ABC} = \widehat{FDE}$ et $\widehat{BCA} = \widehat{DEF}$.

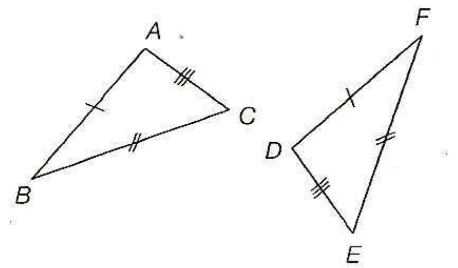
- deux côtés respectivement isométriques adjacents à un angle isométrique :

Les triangles ABC et DEF sont isométriques, car $AB = DE$, $BC = EF$ et $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$.



- leurs trois côtés respectivement isométriques :

Les triangles ABC et DEF sont isométriques, car $AB = DF$, $BC = EF$ et $AC = ED$.



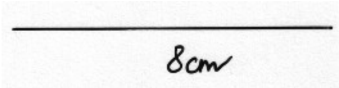
§ 2. Constructions de triangles

En fonction des informations que l'on a au départ, on peut **construire des triangles**. Il y a parfois plusieurs possibilités.

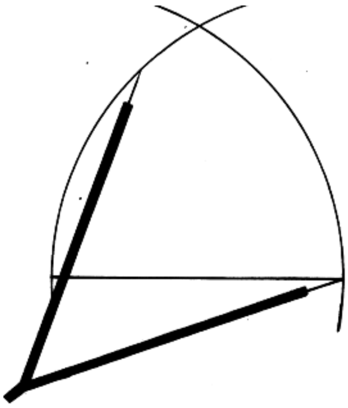
Voici quelques exemples de constructions:

1ère exemple: Construire un triangle équilatéral de 8 cm de côté.

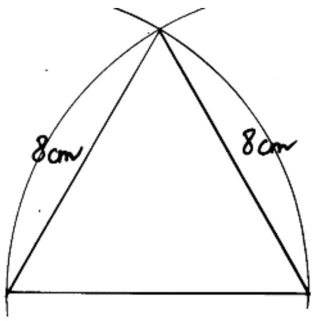
1ère étape: On commence par tracer un segment de 8 cm de côté:



2ème étape: Avec le compas, on trace deux arcs de cercle de 8 cm de rayon (écartement du compas de 8 cm), en piquant le compas à chacune des extrémités du segment de 8 cm et de telle manière que ces arcs de cercle se coupent en un point:

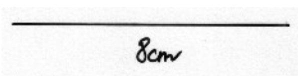


3ème étape: En reliant ce point avec les deux extrémités du segment de départ de 8 cm, on obtient un triangle équilatéral de 8 cm de côté:

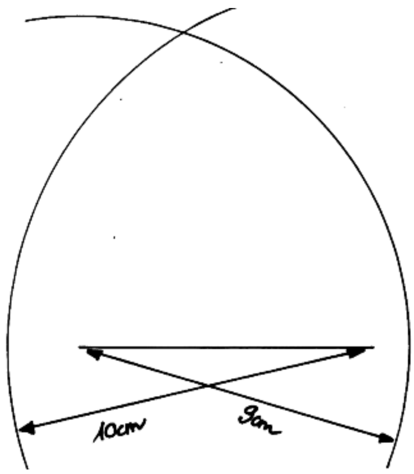


2ème exemple: Construire un triangle dont les côtés valent 8 cm, 9 cm et 10 cm.

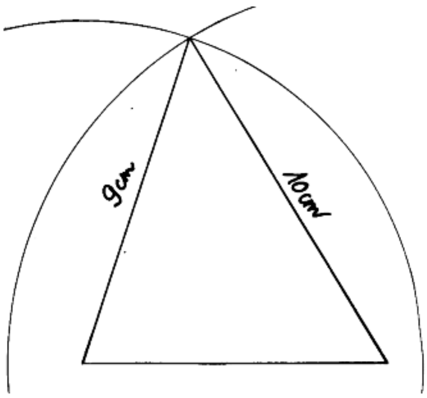
1ère étape: On commence par tracer un segment de 8 cm (on pourrait aussi tracer un segment de 9 cm ou un segment de 10 cm; la méthode qui suit serait alors similaire):



2ème étape: On trace alors deux arcs de cercle, le premier avec un écartement de 9 cm en piquant le compas à une des extrémités du segment de 8 cm, et le deuxième avec un écartement de 10 cm en piquant le compas à l'autre des extrémités du segment de 8 cm, de telle manière que ces deux arcs de cercle se coupent en un point:

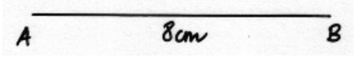


3ème étape: En reliant ce point avec les deux extrémités du segment de 8 cm, on obtient alors le triangle dont les côtés valent 8 cm, 9 cm et 10 cm:

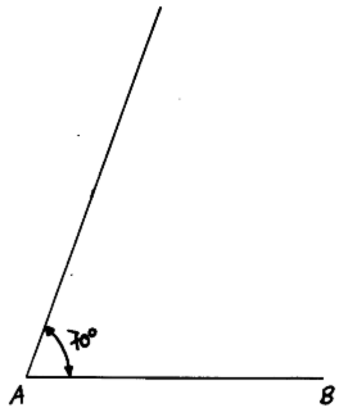


3ème exemple: Construire un triangle ABC dont AB vaut 8 cm, AC vaut 10 cm et $\widehat{BAC}$ vaut 70°.

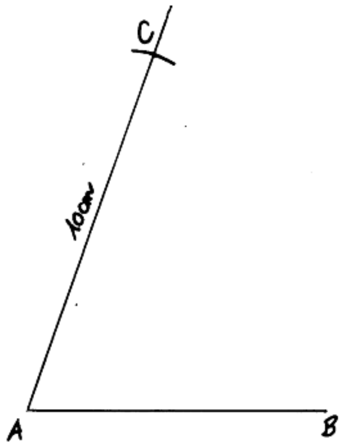
1ère étape: On commence par tracer le segment AB de 8 cm (on pourrait aussi commencer par le segment AC de 10 cm):



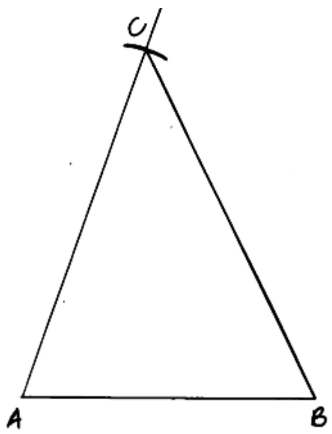
2ème étape: $\widehat{BAC} = 70°$ signifie que l'angle au sommet A doit être de 70°. Avec le rapporteur, on dessine donc un angle de 70° à partir du segment AB:



3ème étape: Le côté AC devant valoir 10 cm, on mesure 10 cm depuis A sur la droite inclinée de 70° par rapport à AB. On obtient ainsi le point C:

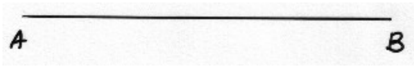


4ème étape: Il ne reste plus qu'à relier C à B pour obtenir le triangle demandé:

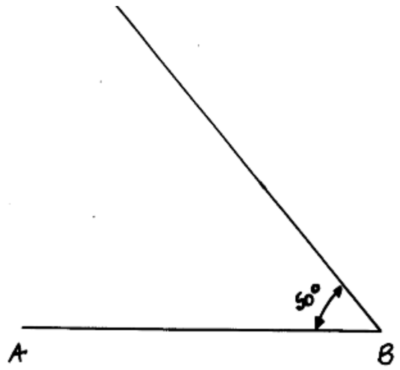


4ème exemple: Construire un triangle ABC dont AB vaut 10 cm, AC vaut 8 cm et $\widehat{ABC}$ vaut 50°.

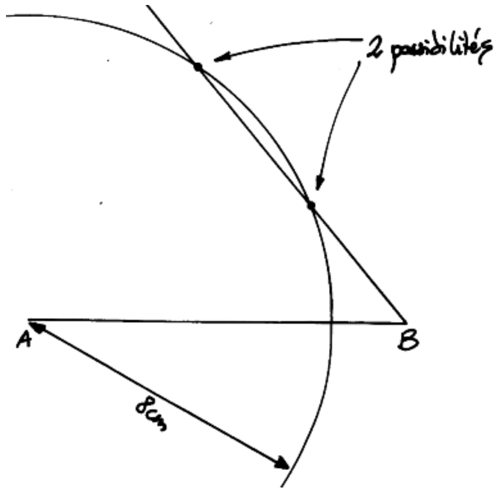
1ère étape: On commence par tracer le segment AB de 10 cm (on pourrait aussi commencer par le segment AC de 8 cm):



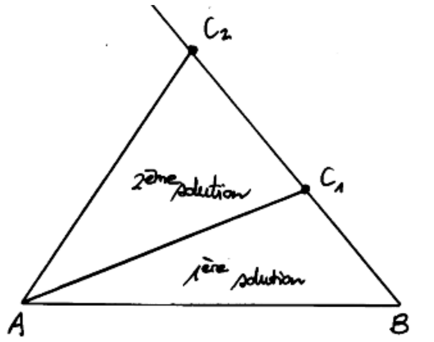
2ème étape: $\widehat{ABC}$ = 50° signifie que l'angle au sommet B doit être de 50°. Avec le rapporteur, on dessine donc un angle de 50° à partir du segment AB:



3ème étape: Pour avoir AC = 8 cm, on pique le compas au point A et on trace un arc de cercle de 8 cm de rayon (écartement du compas = 8 cm). On trouve deux points d'intersection avec la droite partant de B et faisant un angle de 50° avec le côté AB. Cela signifie qu'il y a deux possibilités pour le point C:



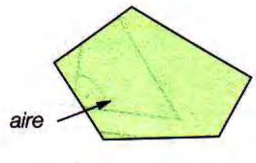
4ème étape: Ainsi, il y a deux solutions possibles pour la construction: le triangle ABC_1 et le triangle ABC_2. Les deux répondent aux exigences (le segment AB vaut 10 cm, le segment AC vaut 8 cm et $\widehat{ABC}$ vaut 50°):



§ 3. Périmètre et aire

Le **périmètre** d'un polygone est la somme des longueurs des côtés du polygone. C'est la mesure de son pourtour.

L'**aire** d'un polygone est sa surface, à savoir la quantité de centimètre carré, de décimètre carré, etc., qu'il y a à l'intérieur du polygone:



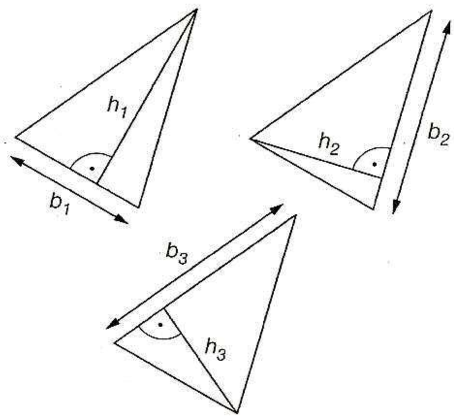
§ 4. Périmètre et aire de triangles

Le **périmètre** et l'**aire d'un triangle** se calculent de la manière suivante:

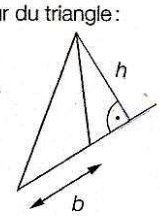
$$p = b_1 + b_2 + b_3$$

$$A = \frac{b_1 \cdot h_1}{2} = \frac{b_2 \cdot h_2}{2} = \frac{b_3 \cdot h_3}{2}$$

b_1 , b_2 , b_3: *mesures des bases*
h_1 , h_2 , h_3: *mesures des hauteurs correspondantes*



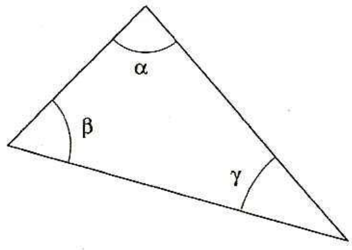
Attention!
La hauteur peut être à l'extérieur du triangle:



§ 5. Somme des angles d'un triangle

La somme des mesures des angles d'un triangle est toujours 180°:

$$\alpha+\beta+\gamma=180°.$$



Ainsi, si l'on connaît la mesure de deux des angles d'un triangle (par exemple 45° et 63°), on peut calculer la mesure du troisième angle (dans l'exemple, il serait de 180 - 45 - 63 = 72°).