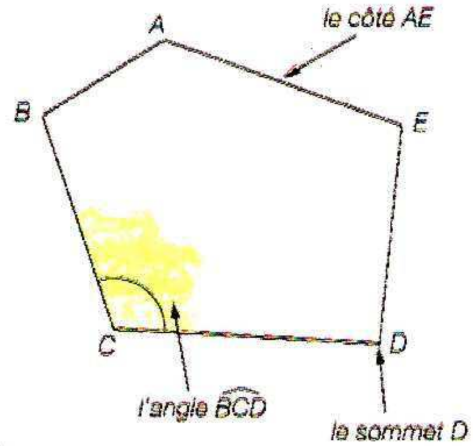
Géométrie

Polygones à plus de 4 côtés, polygones réguliers inscrits dans des cercles, constructions et mesures

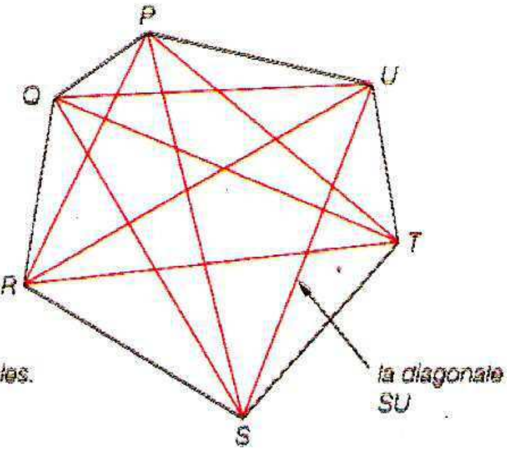
§ 1. Polygones

Un **polygone** est une figure plane limitée uniquement par des segments, une **figure plane** étant une partie du plan limitée par une ligne fermée:



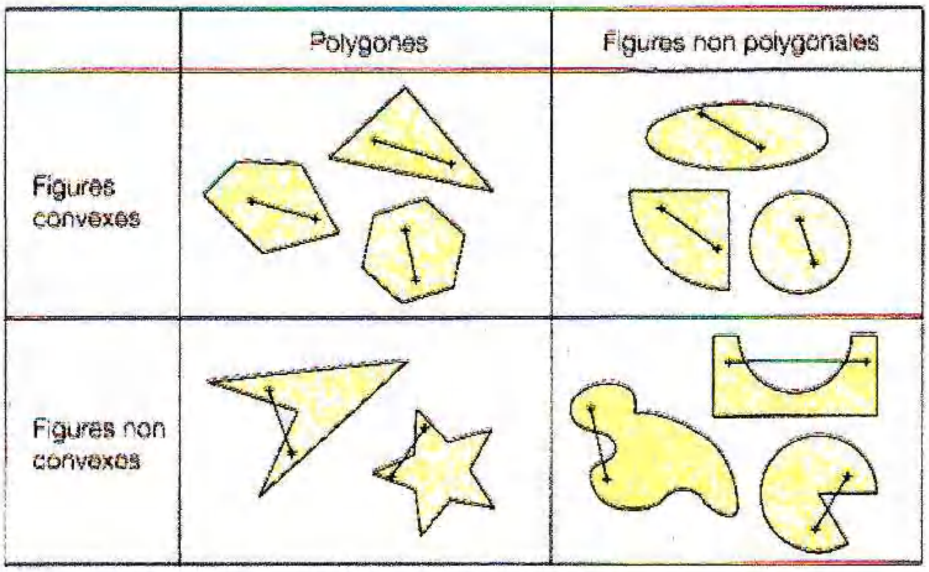
En respectant l'ordre dans lequel les sommets se suivent dans le sens inverse des aiguilles d'une montre sur le pourtour de ce polygone, on pourrait appeler le polygone ci-dessus "le polygone ABCDE", mais aussi "CDEAB", DEABC", ... Mais, par exemple, on ne peut pas l'appeler "le polygone ABCED".

Une **diagonale d'un polygone** est un segment qui joint deux sommets non consécutifs d'un polygone:

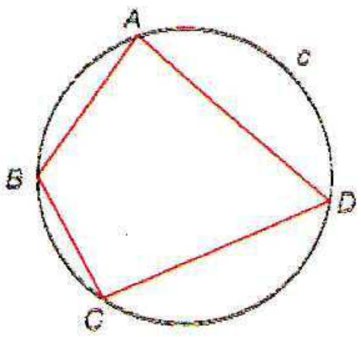


Le polygone PQRSTU possède 9 diagonales.

Une **figure convexe**, famille dans laquelle on distingue les **polygones convexes**, est une figure qui contient chaque segment joignant deux de ses points:



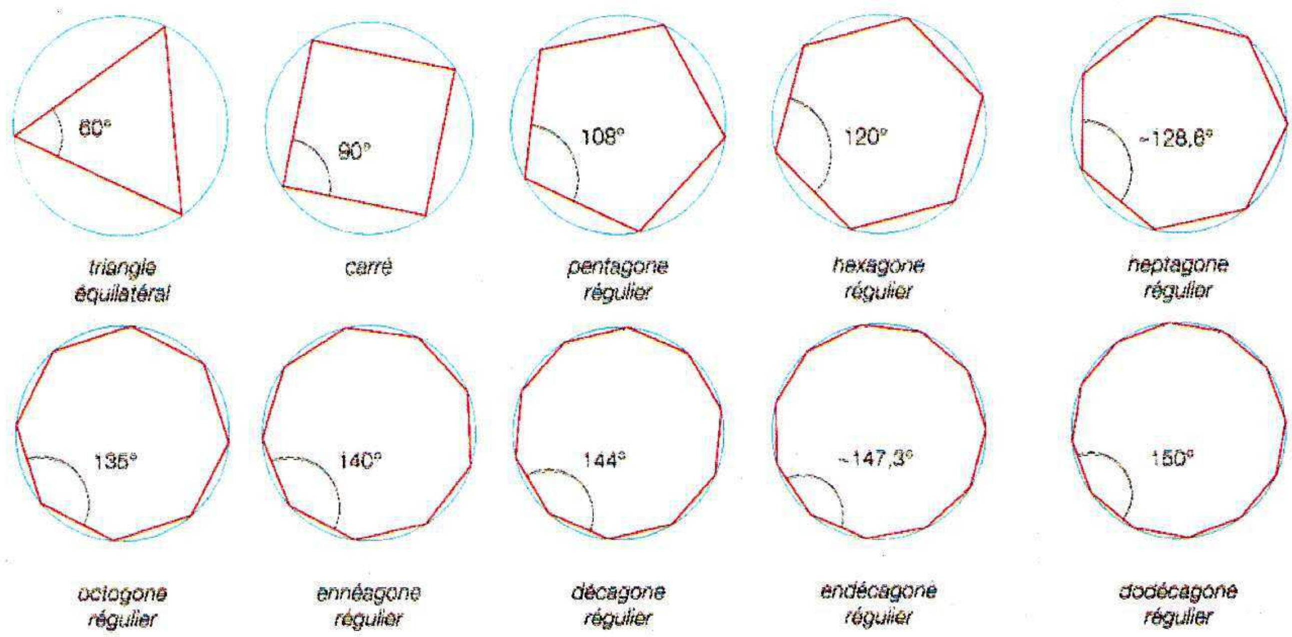
Un **polygone inscrit dans un cercle** est un polygone dont tous les sommets sont des points de ce cercle:



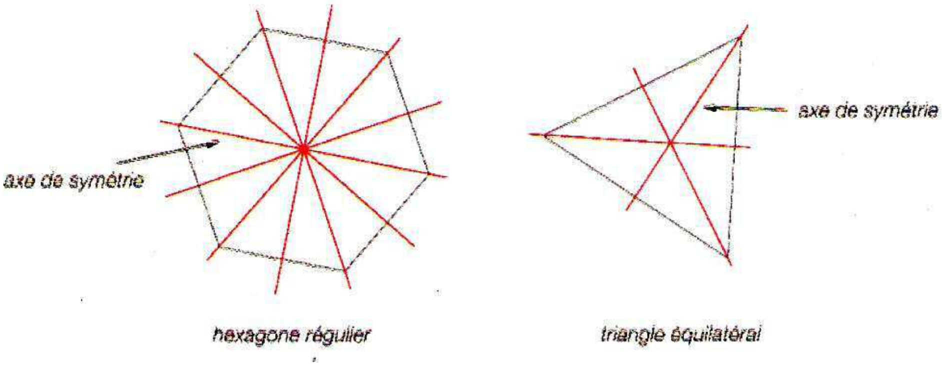
Le quadrilatère ABCD est inscrit dans le cercle c.

Un **polygone régulier** est un polygone dont tous les côtés sont isométriques et dont tous les angles sont isométriques. Un tel polygone est inscriptible dans un cercle, c'est-à-dire qu'il est automatiquement inscrit dans un cercle.

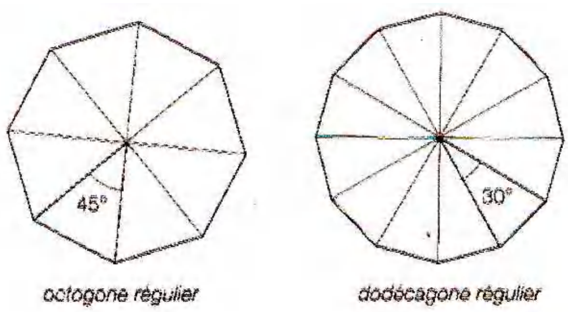
Voici les principaux polygones réguliers:



Un polygone régulier est un polygone qui a autant d'axes de symétrie que de côtés:



La **mesure de l'angle au centre d'un polygone régulier** à n sommets est $\frac{360}{n}$:

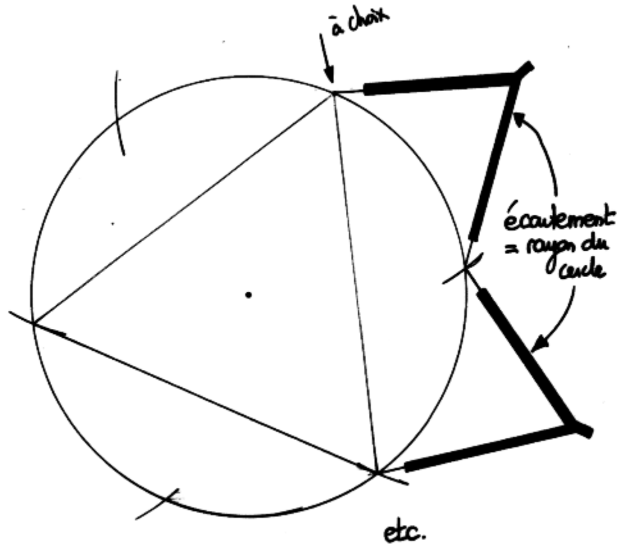


§ 2. Constructions de polygones réguliers inscrits dans des cercles

Construction de triangles équilatéraux inscrits dans des cercles:

Pour construire un triangle équilatéral (3 côtés isométriques) inscrit dans un cercle, on procède comme suit:

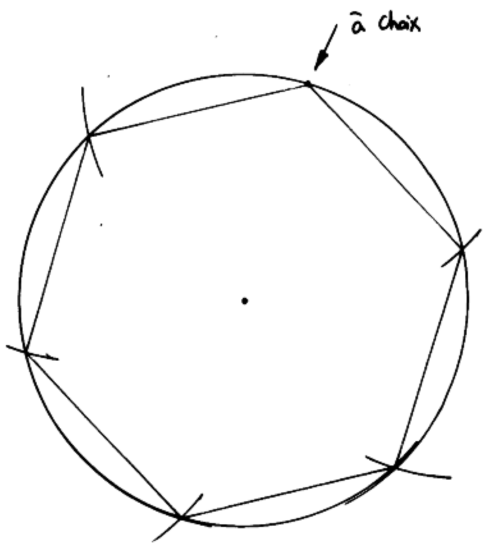
On commence par tracer un cercle et on garde l'écartement du compas égal au rayon du cercle. On pique le compas sur le cercle (où l'on veut) et on reporte la longueur du rayon du cercle (l'écartement du compas) tout autour du cercle. Cela nous donne six points exactement. En en choisissant trois non côte à côte, on peut alors tracer un triangle équilatéral inscrit dans le cercle.



Construction d'hexagones réguliers inscrits dans des cercles:

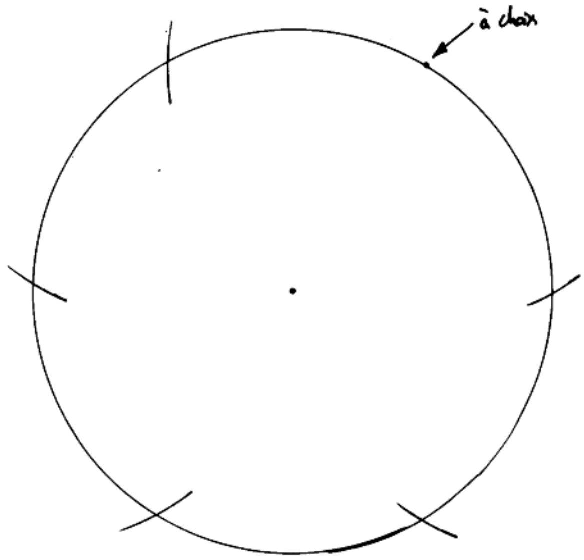
Pour construire un hexagone régulier (6 côtés isométriques) inscrit dans un cercle, on procède comme suit:

On commence par tracer un cercle et on garde l'écartement du compas égal au rayon du cercle. On pique le compas sur le cercle (où l'on veut) et on reporte la longueur du rayon du cercle (l'écartement du compas) tout autour du cercle. Cela nous donne six points exactement. En les reliant, on peut alors tracer un hexagone régulier inscrit dans le cercle.

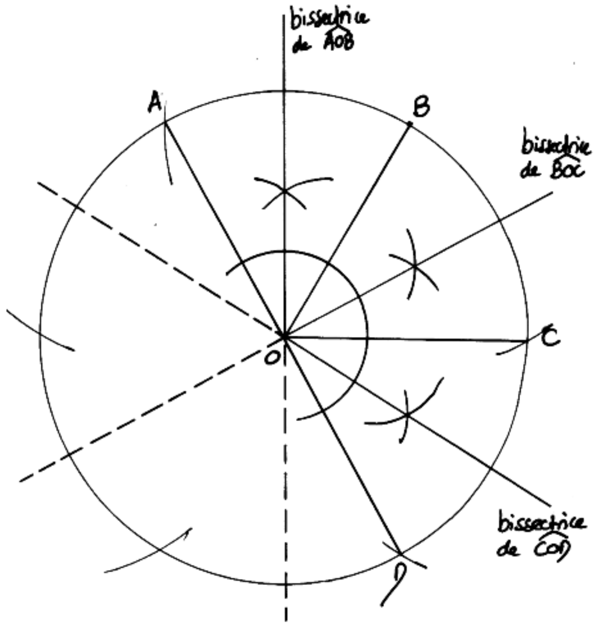


Construction de dodécagones réguliers inscrits dans des cercles:

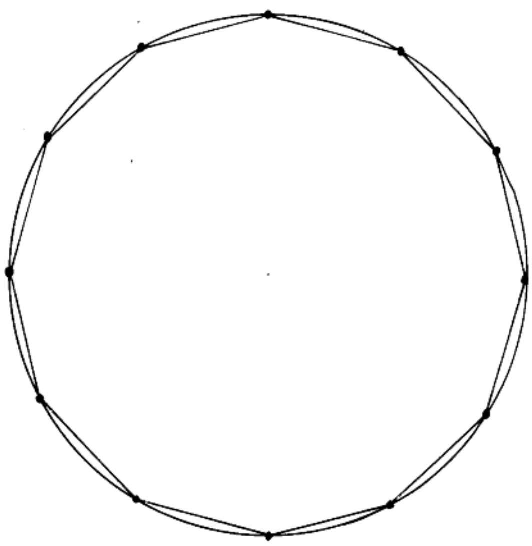
Pour construire un dodécagone régulier (12 côtés isométriques) inscrit dans un cercle, on procède comme suit:



1ère étape: On commence par tracer un cercle et on garde l'écartement du compas égal au rayon du cercle.
On pique le compas sur le cercle (où l'on veut) et on reporte la longueur du rayon du cercle (l'écartement du compas) tout autour du cercle. Cela nous donne six points exactement.



2ème étape: On donne des noms aux points obtenus à la 1ère étape (ici: A, B, C et D) et on appelle O le centre du cercle. On trace les diamètres passant par chacun de ces points. Cela nous donne six secteurs de cercles isométriques. On construit les bissectrices des angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ et $\widehat{COD}$, bissectrices que l'on prolonge au travers de tout le cercle. Cela nous donne alors douze points (les six points de la 1ère étape et six autres points étant les intersections de ces bissectrices avec le cercle).

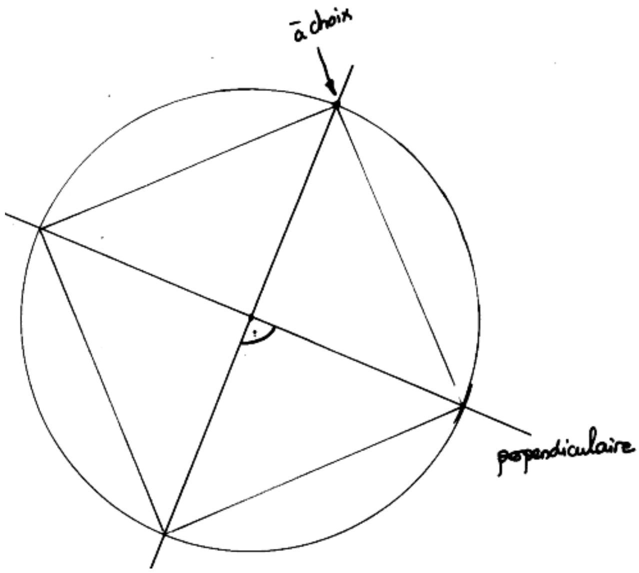


3ème étape: Il suffit alors de relier ces douze points pour tracer un dodécagone régulier inscrit dans le cercle:

Construction de carrés inscrits dans des cercles:

Pour construire un carré (4 côtés isométriques) inscrit dans un cercle, on procède comme suit:

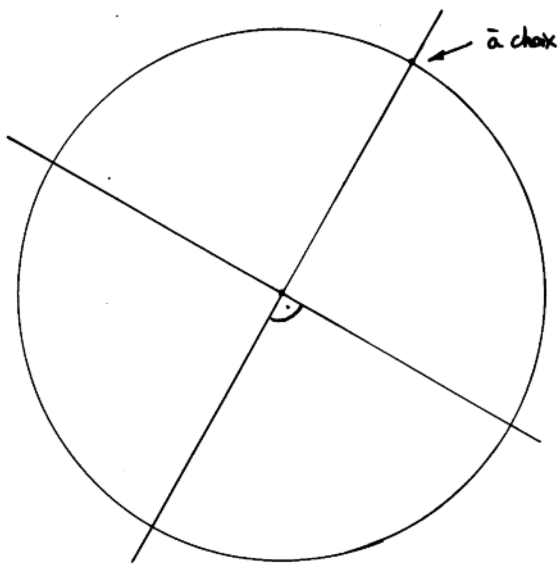
On commence par tracer un cercle et un diamètre du cercle (à choix). On construit alors la perpendiculaire à ce diamètre passant par le centre du cercle. Les intersections du diamètre et de la perpendiculaire avec le cercle donne quatre points. En les reliant, on obtient un carré inscrit dans le cercle:



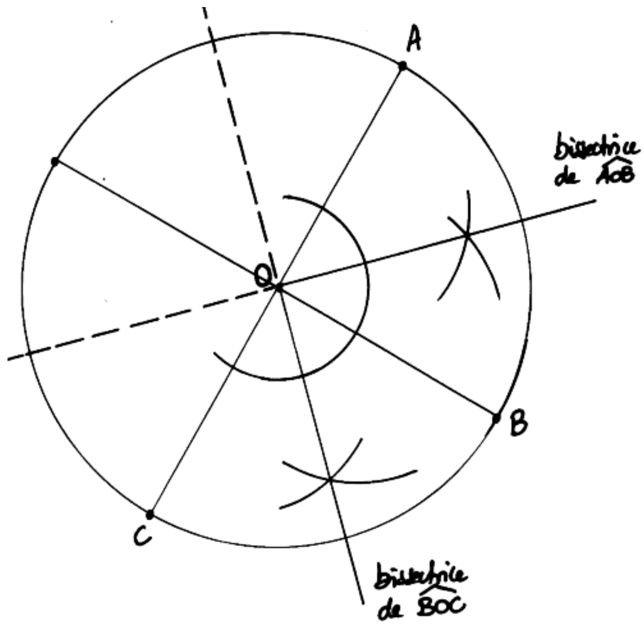
Construction d'octogones réguliers inscrits dans des cercles:

Pour construire un octogone régulier (8 côtés isométriques) inscrit dans un cercle, on procède comme suit:

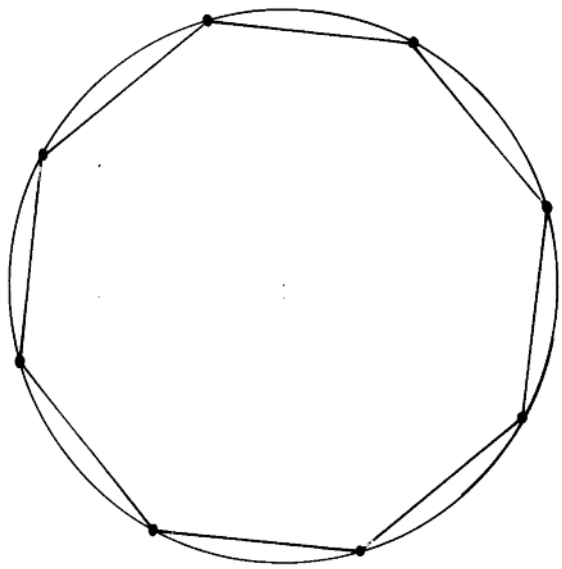
1ère étape: On commence par tracer un cercle et un diamètre du cercle (à choix). On construit alors la perpendiculaire à ce diamètre passant par le centre du cercle. Les intersections du diamètre et de la perpendiculaire avec le cercle donne quatre points et quatre secteurs de cercle isométriques:



2ème étape: On construit les bissectrices des angles au centre du cercle des quatre secteurs de cercle. On obtient ainsi quatre points supplémentaires, les intersections de ces bissectrices avec le cercle. On a ainsi huit points sur le cercle:



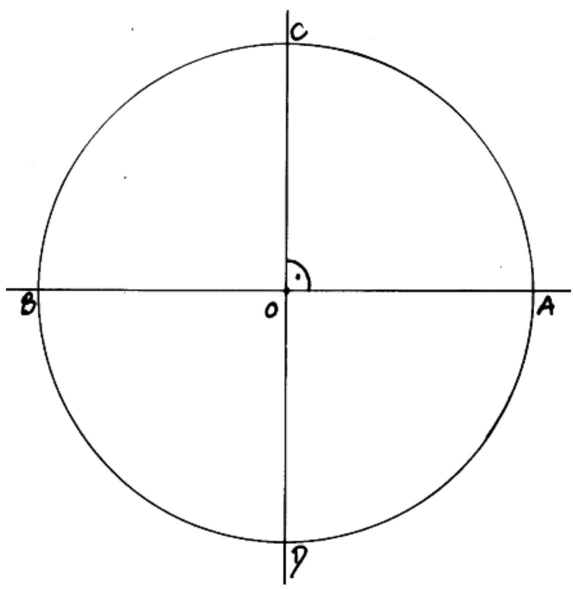
3ème étape: En reliant ces huit points, on obtient alors un octogone régulier inscrit dans le cercle:



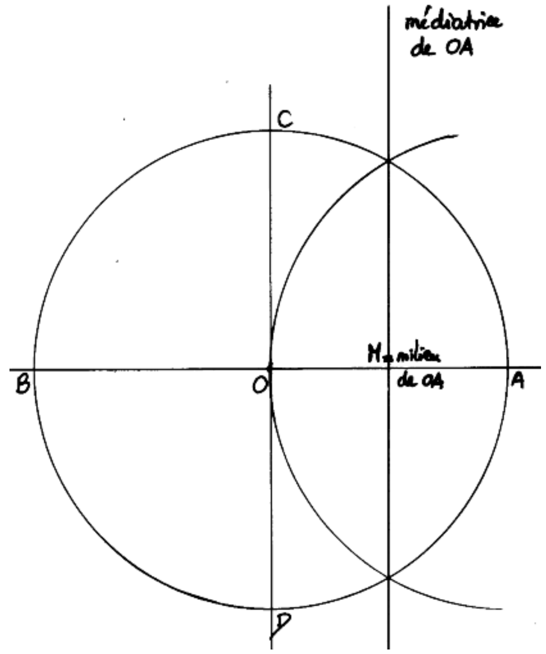
Construction de pentagones réguliers inscrits dans des cercles:

Pour construire un pentagone régulier (5 côtés isométriques), on procède comme suit:

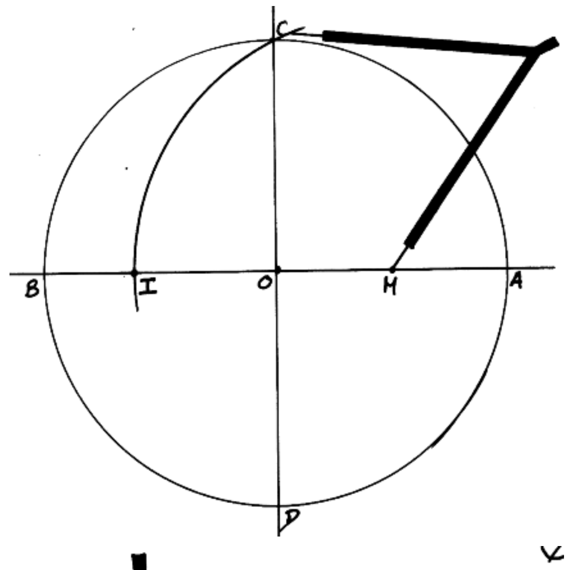
1ère étape: On trace un cercle de centre O et deux diamètres perpendiculaires. Les intersections de ces diamètres avec le cercle sont appelés A, B, C et D:



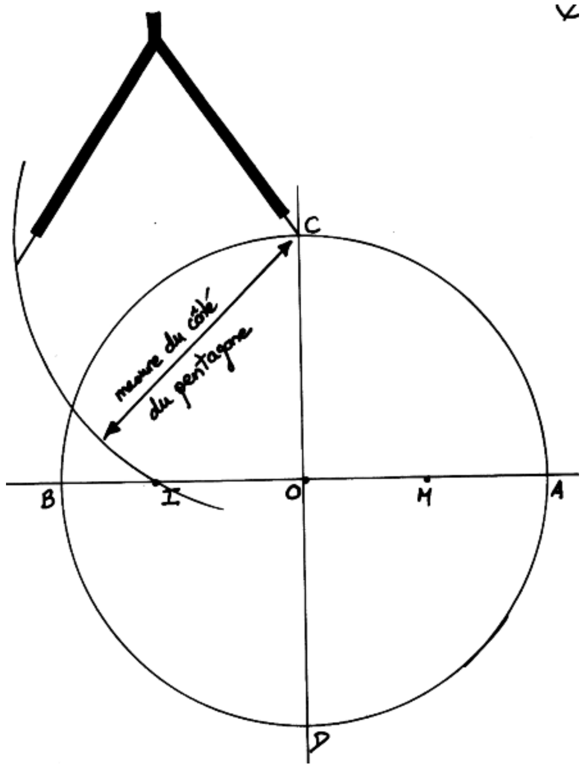
2ème étape: On construit la médiatrice du segment OA et on appelle M l'intersection de cette médiatrice avec le segment OA (M est donc le milieu du segment OA):



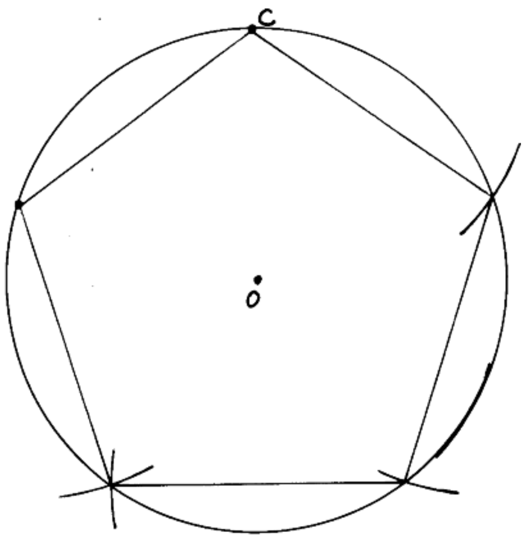
3ème étape: On trace un arc de cercle centré en M et de rayon MC, arc de cercle qui coupe le segment OB en I:



4ème étape: On trace un arc de cercle centré en C et de rayon CI. Le rayon de cet arc de cercle (l'écartement du compas) correspond à la longueur du côté du pentagone que l'on cherche à dessiner:



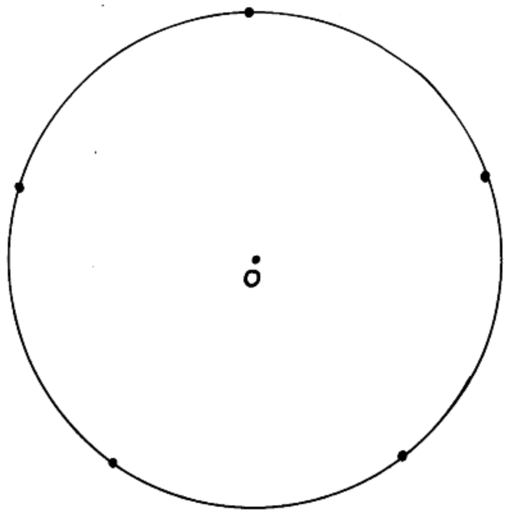
5ème étape: On reporte alors cette longueur avec le compas tout autour du cercle et on obtient ainsi cinq points sur le cercle. En les reliant, on a alors construit un pentagone régulier inscrit dans le cercle:



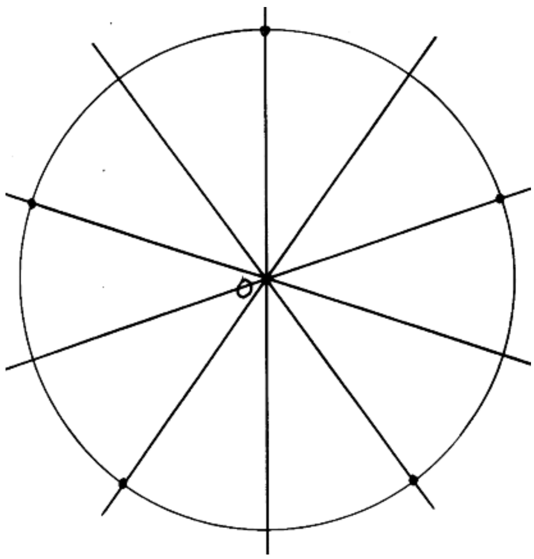
Construction de décagones réguliers inscrits dans des cercles:

Pour construire un décagone régulier (10 côtés isométriques) inscrit dans un cercle, on procède comme suit:

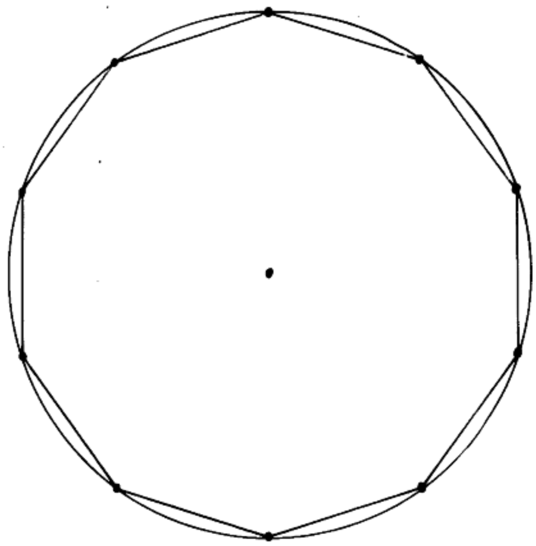
1ère étape: On commence par construire les cinq sommets d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle (voir ci-dessus):



2ème étape: On trace alors les cinq diamètres passant par ces cinq points. Cela nous donne dix points sur le cercle:



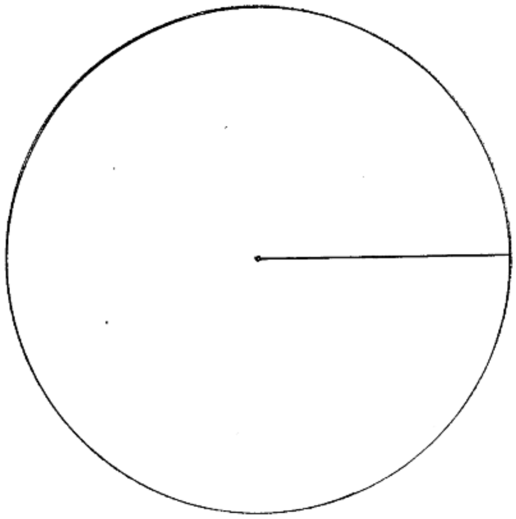
3ème étape: En reliant ces dix points, on obtient un décagone régulier inscrit dans le cercle:



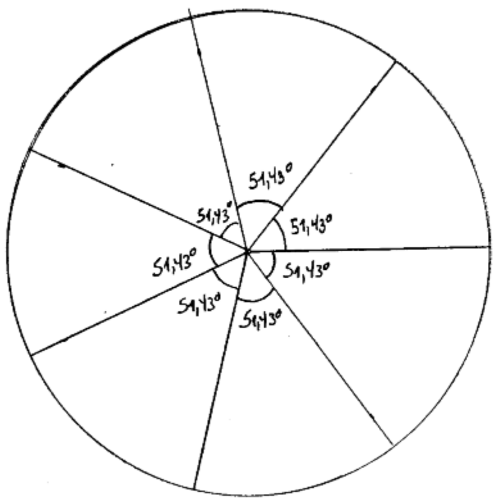
Construction d'autres polygones réguliers inscrits dans des cercles:

Pour construire d'autres polygones réguliers inscrits dans des cercles (ici un heptagone, polygone à sept côtés isométriques, mais la procédure est similaire pour les autres), on procède comme suit:

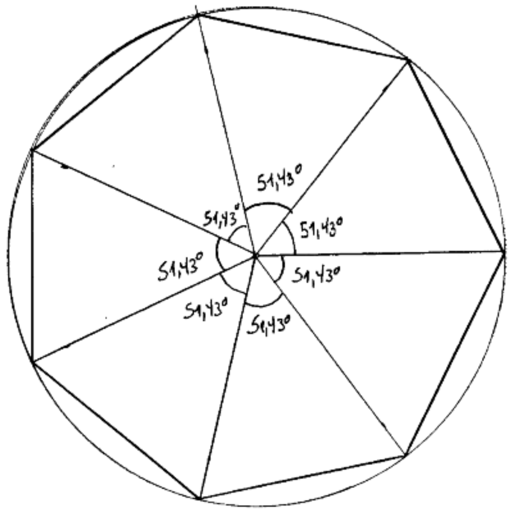
1ère étape: On commence par tracer un cercle et un rayon quelconque:



2ème étape: On divise 360° par le nombre de côtés que l'on veut obtenir: 360° : 7 = 51,43°. On reporte ces 51,43° autour du cercle à partir du premier rayon dessinée. Cela nous donne sept secteurs de cercle isométriques et sept points sur le cercle:



3ème étape: On relie alors ces sept points et on a dessiné un heptagone régulier inscrit dans le cercle:



On remarque qu'il est plus difficile d'être précis dans ce genre de construction. C'est donc mieux d'utiliser les constructions avec le compas lorsque c'est possible.

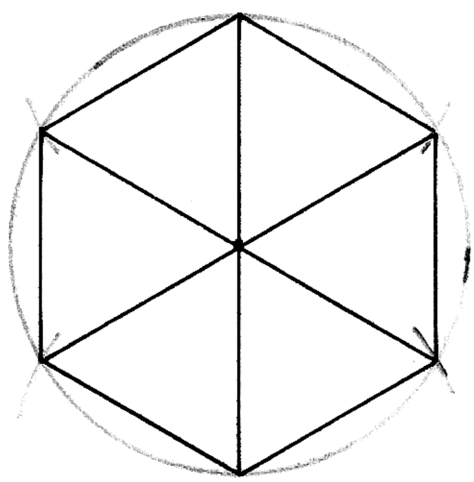
§ 3. Périmètres et aires de polygones

Pour calculer le **périmètre d'un polygone quelconque**, on trouve ou on mesure la longueur de chacun de ses côtés et on les additionne.

Pour calculer l'**aire d'un polygone quelconque**, on divise par exemple celui-ci en autant de triangles qu'il faut, on calcule l'aire de chacun des triangles obtenus et on les additionne,

Exemple: Calculer le périmètre et l'aire d'un hexagone régulier inscrit dans un cercle de 6 cm de diamètre.

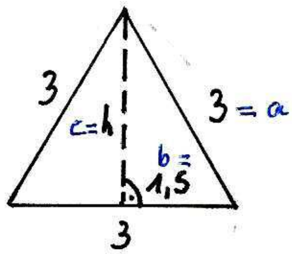
On construit l'hexagone régulier inscrit dans un cercle de 6 cm de diamètre (donc de 3 cm de rayon) et on le subdivise en 6 triangles:



On remarque que le côté de l'hexagone est égal au rayon du cercle (en effet, pour construire les côtés de l'hexagone, on a gardé le même écartement pour le compas que le rayon du cercle). Ainsi le côté de l'hexagone vaut ici 3 cm et, donc, le périmètre de l'hexagone est $6 \cdot 3 =$ **18 cm**.

L'hexagone est formé de 6 triangles équilatéraux isométriques dont le côtés valent 3 cm. Pour calculer l'aire de l'hexagone, on va calculer l'aire d'un de ces triangles équilatéraux, puis multiplier par 6.

Pour obtenir l'aire d'un triangle équilatéral de côté 3 cm, on le subdivise en deux et obtient deux triangles rectangles isométriques dont l'hypoténuse vaut 3 cm et un côté de l'angle droit vaut 1,5 cm:



On va utiliser le théorème de Pythagore pour calculer la hauteur du triangle équilatéral. Dans un des triangles rectangles moitié du triangle équilatéral, on a a = 3 cm, b = 1,5 cm et c = h = hauteur à déterminer, Par le théorème de Pythagore, on a $a^2 = b^2 + c^2$. Ainsi, on a $3^2 = 1,5^2 + h^2$, d'où $9 = 2,25 + h^2$, ce qui donne $h^2 = 9 - 2,25 = 6.75$, et, donc, h = $\sqrt{6,75} = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} = 1,5\sqrt{3} \simeq 2,6$ cm.

L'aire d'un des triangles équilatéral est donc $\frac{3 \cdot 1,5\sqrt{3}}{2} = \frac{4,5\sqrt{3}}{2} = 2,25\sqrt{3} \simeq 3,9$ cm^2.

Par conséquent, l'aire de l'hexagone est $6 \cdot 2,25\sqrt{3} = 13,5\sqrt{3} \simeq$ **23,38 cm^2**.

§ 4. Somme des angles d'un polygone

La **somme des mesures des angles d'un polygone** à *n* côtés est $180 \cdot (n-2)$.

Ainsi, par exemple:

- la somme des angles d'un triangle (3 côtés) est $180 \cdot (3-2) = 180°$;
- la somme des angles d'un quadrilatère (4 côtés) est $180 \cdot (4-2) = 360°$;
- la somme des angles d'un hexagone (6 côtés) est $180 \cdot (6-2) = 720°$;
- la somme des angles d'un décagone (10 côtés) est $180 \cdot (10-2) = 1440°$.