Géométrie

Mesures de cercles, de parties de cercles et de figures arrondies

§ 1. Le nombre π

Le **nombre** π est le nombre que l'on obtient en divisant le périmètre de n'importe quel cercle avec son diamètre. Il vaut 3,141592654... . C'est un nombre irrationnel (il ne peut pas être mis sous forme de fraction). Sans machine à calculer, on prendra $\pi \simeq 3{,}14$.

Le nombre π est aussi le nombre que l'on obtient en divisant l'aire de n'importe quel cercle par le carré de son rayon.

§ 2. Périmètres de cercles et aires de disques

Le **périmètre d'un cercle** et l'**aire d'un disque** se calcule de la manière suivante:

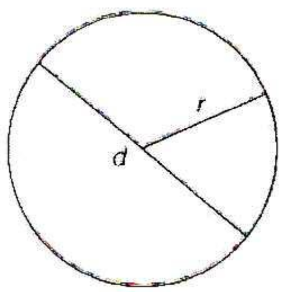
$p = \pi \cdot d = 2 \cdot \pi \cdot r$
$A = \pi \cdot r^2$

d: diamètre du cercle
r: rayon du cercle

$\pi = 3{,}14159\ldots \cong 3{,}14$

Exemple

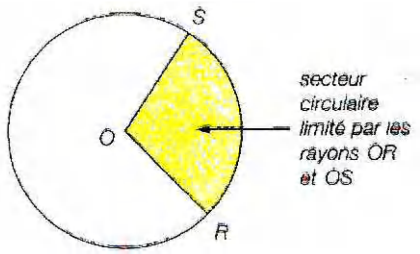
Si $r = 5$
$p = \pi \cdot 10 = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cong 31{,}4$
$A = \pi \cdot 5^2 = \pi \cdot 25 \cong 78{,}5$



§ 3. Longueurs d'arcs de cercles et aires de secteurs circulaires

Un **arc de cercle** est une partie d'un cercle (en un seul morceau).

Un **secteur de disque** ou **secteur circulaire** est une partie d'un disque limitée par deux rayons et un arc de cercle:



Pour calculer la **longueur d'un arc de cercle**, on peut procéder comme suit:

Admettons que l'on doive calculer la longueur d'un arc de cercle de rayon 7 cm et dont l'angle au centre vaut 68°:

- on commence par calculer le périmètre du cercle entier de rayon 7 cm: on a périmètre = $2\pi r = 2 \cdot \pi \cdot 7 = 14\pi \simeq 43,98$ cm;

- le périmètre de tout le cercle correspondant à un angle plein (360°), on peut alors utiliser la règle de trois pour calculer la longueur de l'arc de cercle correspondant à 68°:

angle	**longueur**
360°	14π
68°	$\frac{68 \cdot 14\pi}{360} = \frac{119\pi}{45}$

- ainsi la longueur de l'arc de cercle est $\frac{119\pi}{45} \simeq$ **8,31 cm**.

Pour calculer l'**aire d'un secteur circulaire**, on peut procéder comme suit:

Admettons que l'on doive calculer l'aire d'un secteur de disque de rayon 4,8 cm et dont l'angle au centre vaut 123°:

- on commence par calculer l'aire du disque entier de rayon 4,8 cm: on a aire = $\pi r^2 = \pi \cdot 4.8^2 = 23,04\pi \simeq 72,38$ cm^2;

- l'aire de tout le disque correspondant à un angle plein (360°), on peut alors utiliser la règle de trois pour calculer l'aire du secteur circulaire correspondant à 123°:

angle	aire
360°	$23,04\pi$
123°	$\frac{123 \cdot 23,04\pi}{360} = \frac{984\pi}{125}$

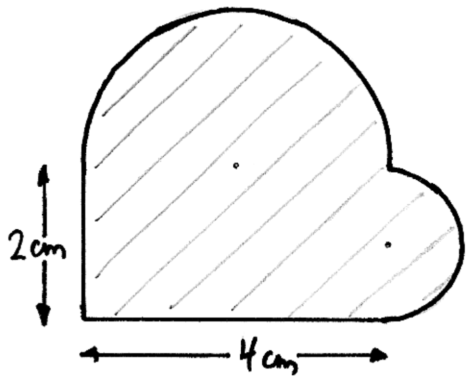
- ainsi l'aire du secteur circulaire est $\frac{984\pi}{125}$ $\simeq$ **24,73 cm²**.

§ 4. Calculs de périmètres et d'aires de figures arrondies

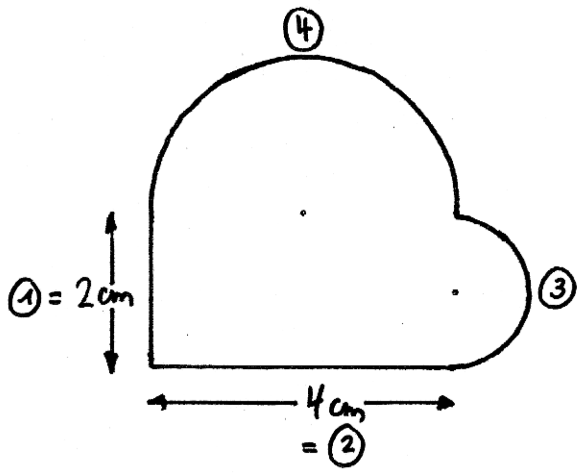
Pour calculer le **périmètre de figures arrondies**, on calcule la longueur de tous ses "côtés" (segments ou parties de cercles) et on additionne le tout.

Pour calculer l'**aire de figures arrondies**, il y a deux manières de faire en fonction de la situation: soit on divise la surface en plusieurs parties dont on sait calculer l'aire, on calcule ces aires et on additionne le tout, soit on calcule l'aire d'une surface plus grande à laquelle on enlève les parties nécessaires dont on sait calculer l'aire.

Exemple 1: Calculer le périmètre et l'aire de la figure ci-dessous:



Pour calculer le périmètre, on divise le pourtour de la figure en différents segments et arcs de cercle dont on sait calculer la longueur:



Le segment (1) vaut 2 cm.

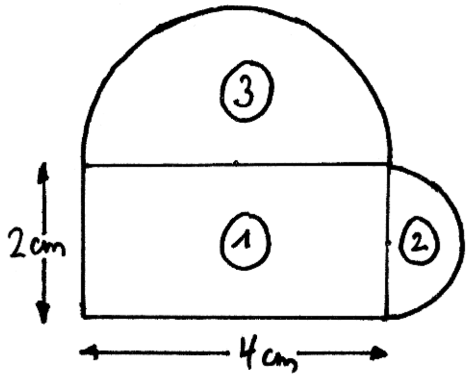
Le segment (2) vaut 4 cm.

L'arc de cercle (3) est un demi-cercle de diamètre 2 cm (donc de rayon 1 cm). Sa longueur est $\frac{2\pi\cdot 1}{2} = \pi \simeq 3,14$ cm.

L'arc de cercle (4) est un demi-cercle de diamètre 4 cm (donc de rayon 2 cm). Sa longueur est $\frac{2\pi\cdot 2}{2} = 2\pi \simeq 6,28$ cm.

Ainsi, le périmètre de la figure est $2+4+\pi+2\pi = 3\pi+6 \simeq 15,42$ cm.

Pour calculer l'aire de la figure, on la divise en plusieurs parties dont on sait calculer l'aire:



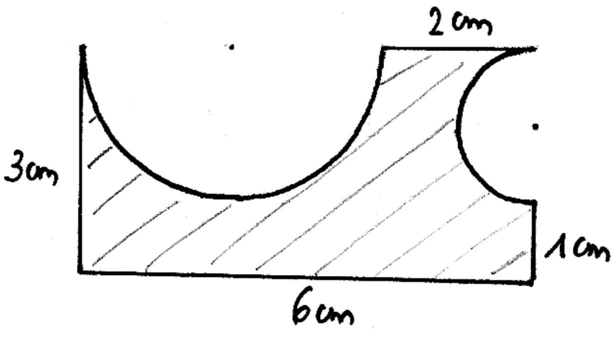
La partie (1) est un rectangle de 2 cm sur 4 cm. Son aire est $2\cdot 4 = 8$ cm^{s}.

La partie (2) est un demi-cercle de 1 cm de rayon. Son aire est $\frac{\pi\cdot 1^2}{2} = \frac{\pi}{2} \simeq 1,57$ cm^{s}.

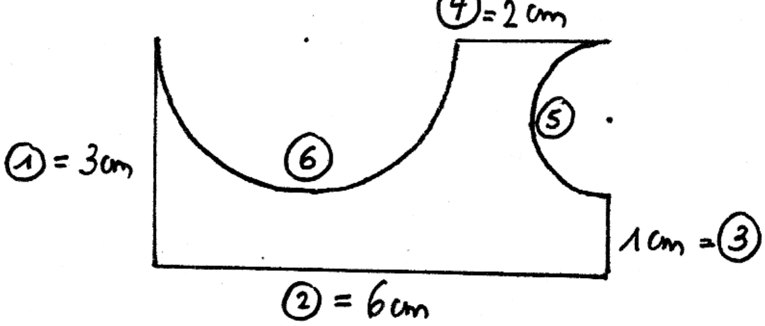
La partie (3) est un demi-cercle de 2 cm de rayon. Son aire est $\frac{\pi\cdot 2^2}{2} = 2\pi \simeq 6,28$ cm^2.

Ainsi, l'aire de la figure est $8+\frac{\pi}{2}+2\pi = 2,5\pi+8 \simeq 15,86$ cm^2.

Exemple 2: Calculer le périmètre et l'aire de la figure ci-dessous:



Pour calculer le périmètre, on divise le pourtour de la figure en différents segments et arcs de cercle dont on sait calculer la longueur:



Le segment (1) vaut 3 cm.

Le segment (2) vaut 6 cm.

Le segment (3) vaut 1 cm.

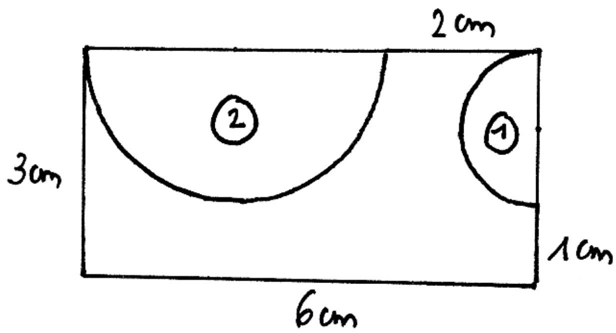
Le segment (4) vaut 2 cm.

L'arc de cercle (5) est un demi-cercle de diamètre 3 - 1 = 2 cm (donc de rayon 1 cm). Sa longueur est $\frac{2\pi\cdot 1}{2} = \pi \simeq 3,14$ cm.

L'arc de cercle (4) est un demi-cercle de diamètre 6 - 2 = 4 cm (donc de rayon 2 cm). Sa longueur est $\frac{2\pi\cdot 2}{2} = 2\pi \simeq 6,28$ cm.

Ainsi, le périmètre de la figure est $3+6+1+2+\pi+2\pi = 3\pi+12 \simeq 21,42$ cm.

Pour calculer l'aire de la figure, on remarque qu'elle correspond à un rectangle auquel on a enlevé deux demi-cercles:



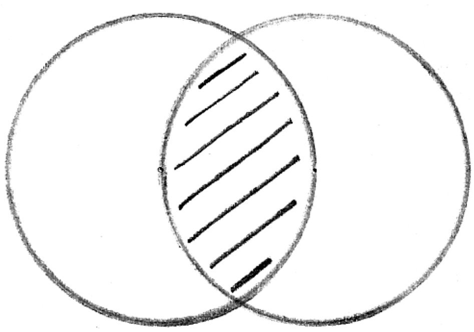
La surface du rectangle est $6\cdot 3 = 18$ cm^2.

La partie (1) est un demi-cercle de 1 cm de rayon. Son aire est $\frac{\pi\cdot 1^2}{2} = \frac{\pi}{2} \simeq 1,57$ cm^2.

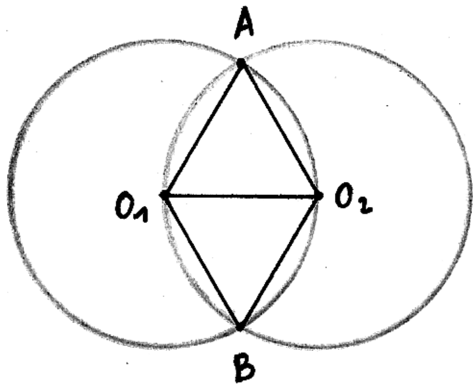
La partie (2) est un demi-cercle de 2 cm de rayon. Son aire est $\frac{\pi\cdot 2^2}{2} = 2\pi \simeq 6,28$ cm^2.

Ainsi, l'aire de la figure est $18-\frac{\pi}{2}-2\pi = 18-2,5\pi \simeq 10,15$ cm^2.

Exemple 3: Calculer le périmètre et l'aire de la figure ci-dessous, correspondant à l'intersection de deux cercle de 2 cm de rayon:



Commençons par le périmètre. Dans la surface hachurée, on peut dessiner deux triangles équilatéraux:



Les triangles sont équilatéraux car $O_1O_2 = O_1A = O_1B = O_2A = O_2B =$ rayon des cercles $= 2$ cm.

On a par conséquent $A\widehat{O_1}O_2 = A\widehat{O_2}O_1 = B\widehat{O_1}O_2 = B\widehat{O_2}O_1 = 60°$.

Ainsi, on a $A\widehat{O_1}B = AO_2B = 2 \cdot 60 = 120°$.

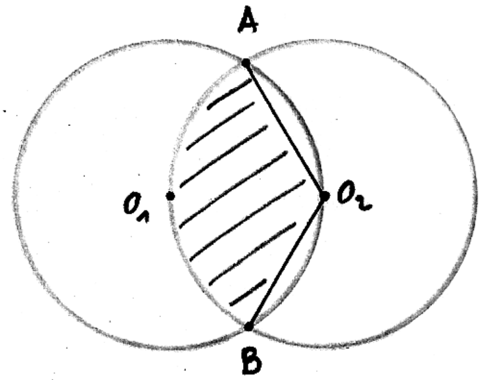
L'arc de cercle AO_1B correspond donc à un angle au centre de $120°$, ce qui est la tiers du périmètre du cercle entier ($360°$).

La longueur de l'arc de cercle AO_1B est donc le tiers du périmètre d'un cercle de rayon 2 cm: longueur de l'arc de cercle $AO_1B = \frac{2\pi \cdot 2}{3} = \frac{4\pi}{3} \simeq 4,19$ cm.

Par symétrie, on a: longueur de l'arc de cercle $AO_2B \simeq 4,19$ cm aussi.

Ainsi le périmètre de la surface hachurée est $\frac{4\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{8\pi}{3} \simeq 8,38$ cm.

Passons maintenant au calcul de l'aire de cette surface.



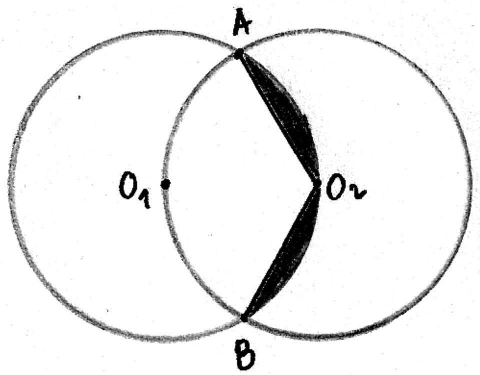
On commence par calculer l'aire du secteur circulaire formé par les rayons O_2A et O_2B:

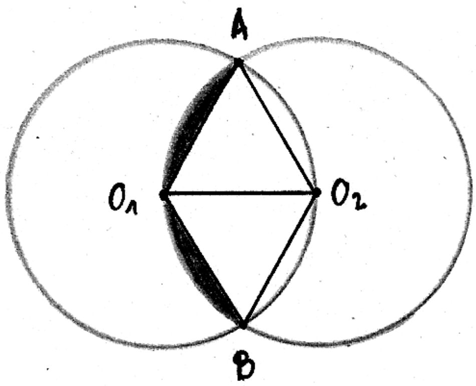
On a vu ci-dessus que $A\widehat{O_2}B = A\widehat{O_1}B = 120°$.

Ainsi, l'aire du secteur circulaire formé par les rayons O_2A et O_2B vaut le tiers de l'aire d'un disque entier de 2 cm de rayon: aire secteur circulaire $= \frac{\pi \cdot 2^2}{3} = \frac{4\pi}{3}$

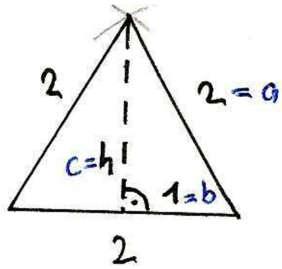
$\simeq 4,19$ cm².

Il nous reste à calculer l'aire des petites parties manquantes (surfaces noircies):





On remarque que ces parties correspondent à la différence entre le secteur circulaire formé par les rayons O_2A et O_2B et les deux triangles équilatéraux à l'intérieur de l'intersection des deux cercles:
Ainsi, l'aire des petites surfaces noircies sera l'aire du secteur circulaire formé par les rayons O_2A et O_2B auquel on aura soustrait l'aire des deux triangles équilatéraux.



Calculons l'aire d'un de ces triangles équilatéraux. Sa base est 2 cm. Il faut calculer sa hauteur. En divisant le triangle équilatéral en 2, on a un triangle rectangle et on peut utiliser le théorème de Pythagore: on a a = 2 cm, b = 1 cm et c = h, hauteur à calculer; avec $a^2 = b^2 + c^2$, on obtient $2^2 = 1^2 + h^2$, d'où $4 = 1 + h^2$ et $h^2 = 3$; ainsi, la hauteur du triangle équilatéral est h = $\sqrt{3} \simeq 1,73$ cm.
L'aire d'un des triangles équilatéraux est ainsi $\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \simeq 1,73$ cm².
L'aire des 2 triangles équilatéraux est alors $2 \cdot \sqrt{3} \simeq 3,46$ cm².
En en déduit que l'aire des petites surfaces noircies est $\frac{4\pi}{3} - 2\sqrt{3} \simeq 0,72$ cm².
Finalement, l'aire de la surface hachurée de départ est la somme de l'aire du secteur circulaire et de l'aire des petites surfaces hachurées:
aire de la surface hachurée = $\frac{4\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} - 2\sqrt{3} = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3} \simeq 4,91$ cm².