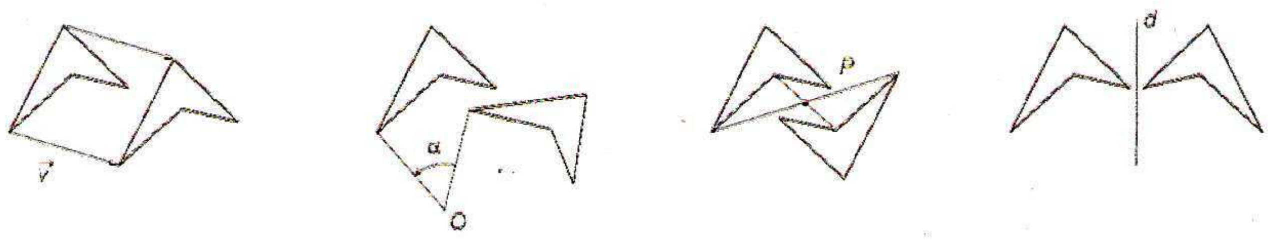
Géométrie

Isométries, constructions, détermination et compositions

§ 1. Isométries

Une **isométrie** est une transformation géométrique telle qu'une figure et son image ont la même forme et les mêmes dimensions: elles sont donc superposables.

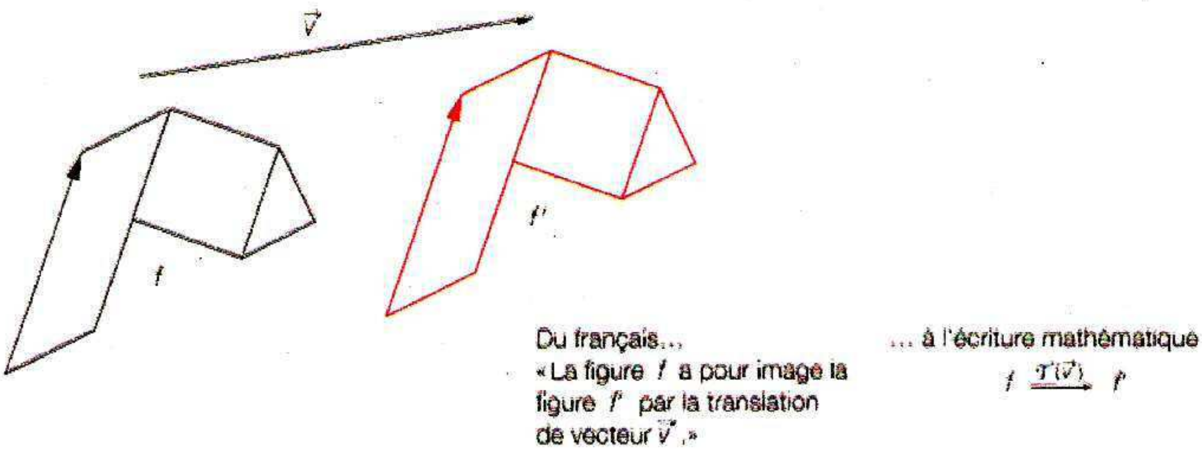
La **translation**, la **rotation**, la **symétrie centrale** et la **symétrie axiale** sont des isométries.



translation de vecteur $\vec{V}$ rotation $\mathcal{R}(O\,;\alpha)$ symétrie centrale $S(P)$ symétrie axiale $S(d)$

Translation:

Le mouvement qui amène *f* en *f'* dans la figure ci-dessous est une **translation**:



Une translation porte sur tous les points du plan et pas seulement sur ceux dont on cherche l'image.

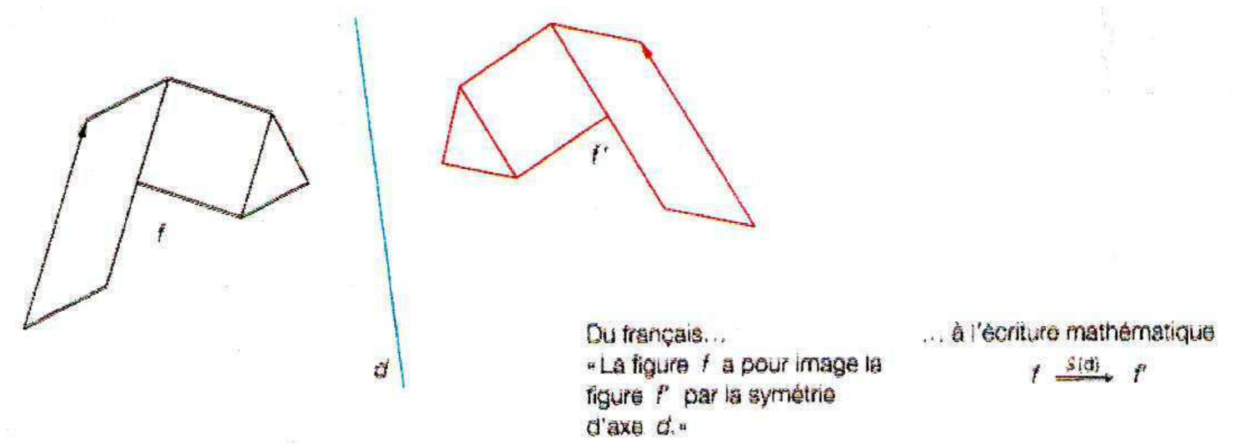
Déplacer une figure par translation, c'est faire glisser cette figure, sans la faire tourner.

Le vecteur $\vec{V}$ est appelé **vecteur de translation**.

Symétrie axiale:

En pliant la feuille suivant la droite *d* de la figure ci-dessous, les figures *f* et *f'* se superposent.

Le mouvement qui amène *f* en *f'* est une **symétrie axiale**:



Dans l'espace, ce mouvement peut être réalisé par une rotation de 180° autour de l'axe *d*.

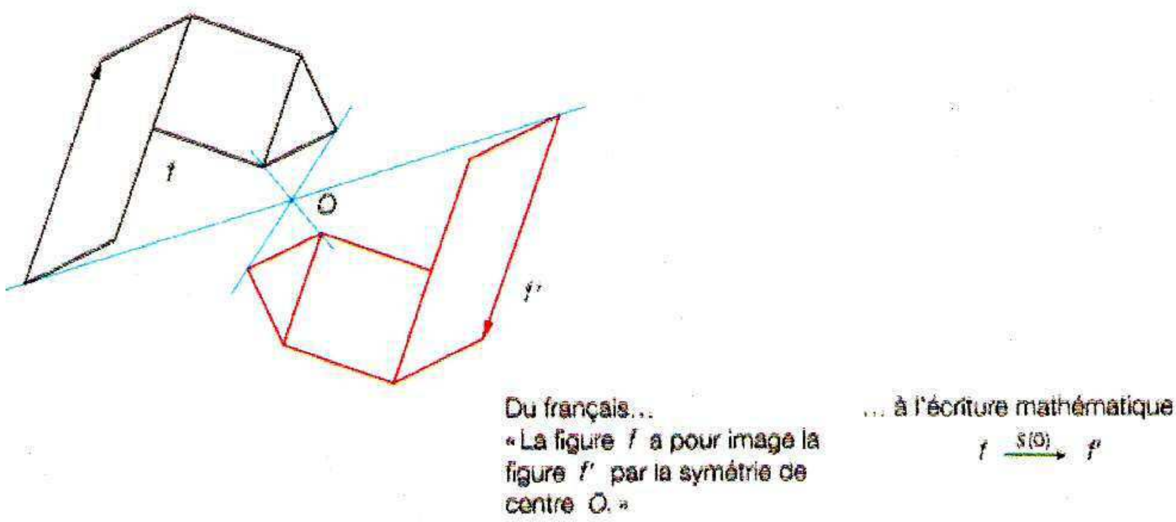
Une symétrie axiale porte sur tous les points du plan et pas seulement sur ceux dont on cherche l'image.

Les **figures** *f* et *f'* sont dites **symétriques** par rapport à la droite *d*.

La droite *d* est appelée **axe de symétrie**.

Symétrie centrale:

Le mouvement qui amène *f* en *f'* dans la figure ci-dessous est une **symétrie centrale**.



Une symétrie centrale est aussi une rotation de 180°.

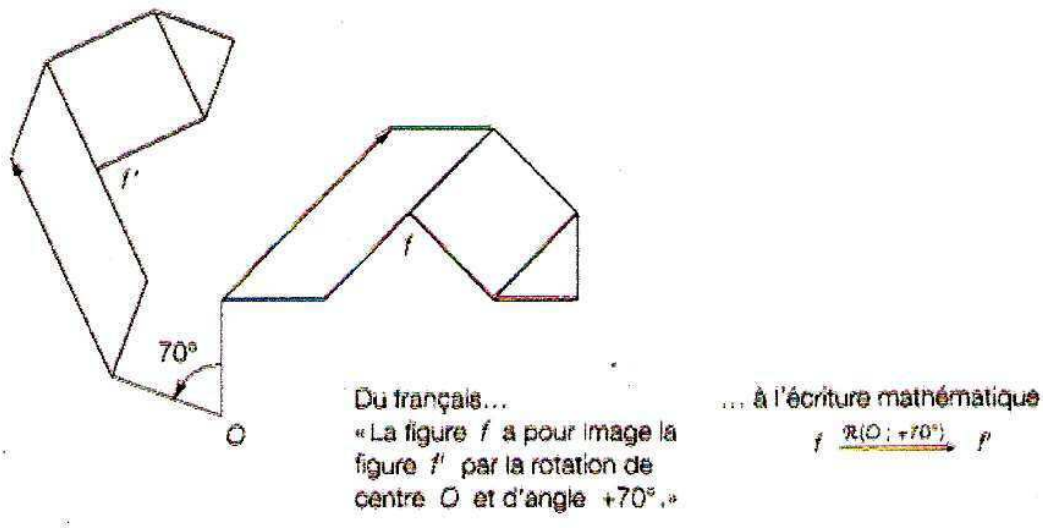
Déplacer une figure par une symétrie de centre *O*, c'est faire tourner cette figure d'un demi-tour autour du point *O*.

Une symétrie centrale porte sur tous les points du plan et pas seulement sur ceux dont on cherche l'image.

Le point *O* est appelé **centre de symétrie**.

Rotation:

Le mouvement qui amène *f* en *f'* dans la figure ci-dessous est une **rotation**.



Une rotation porte sur tous les points du plan et pas seulement sur ceux de la figure dont on cherche l'image.

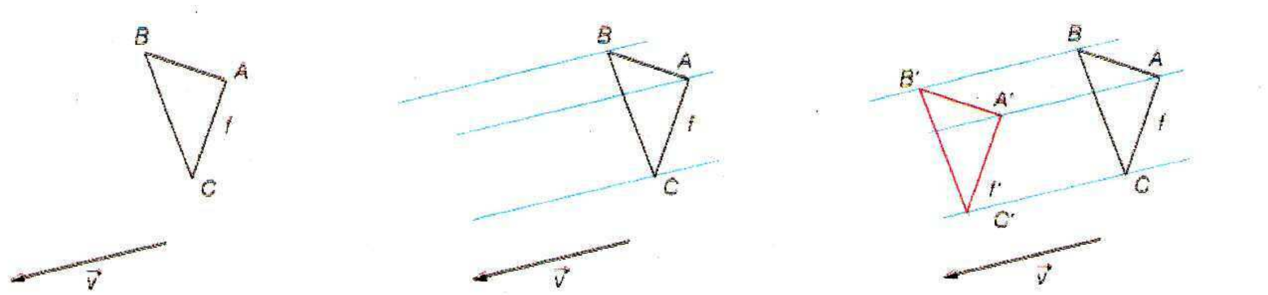
Déplacer une figure par une rotation de centre *O*, c'est faire tourner cette figure autour du point O.

Le point *O* est appelé **centre de rotation** et l'angle donné (ici 70°) est appelé **angle de rotation**.

Le signe placé devant la mesure de l'angle indique le sens de rotation:

§ 2. Constructions d'isométries

Construction de l'image d'une figure par une translation:



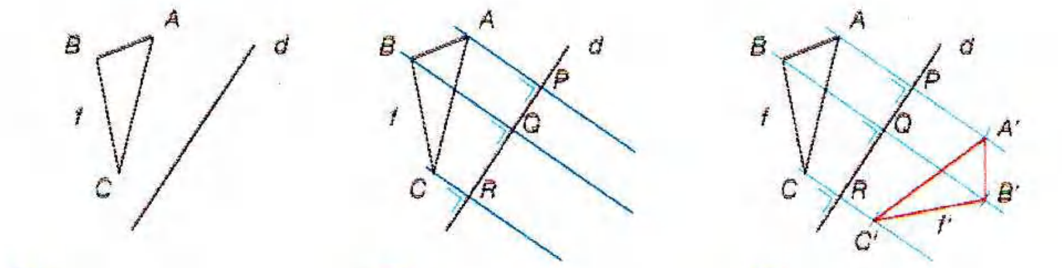
Construction de l'image de la figure *f* par la translation de vecteur $\vec{v}$.

1 Tracer des parallèles au vecteur $\vec{v}$ passant par les sommets de *f*.

2 Construire les points A', B' et C', tels que les segments AA', BB' et CC' soient isométriques au vecteur $\vec{v}$. Relier ensuite les points A', B' et C'.

Toutes les propriétés de la translation peuvent être utilisées pour construire l'image d'une figure. Il existe donc d'autres méthodes.

Construction de l'image d'une figure par une symétrie axiale:



Construction de l'image de la figure f par la symétrie axiale d'axe d.

1 Tracer des perpendiculaires à la droite d passant par les sommets de f.

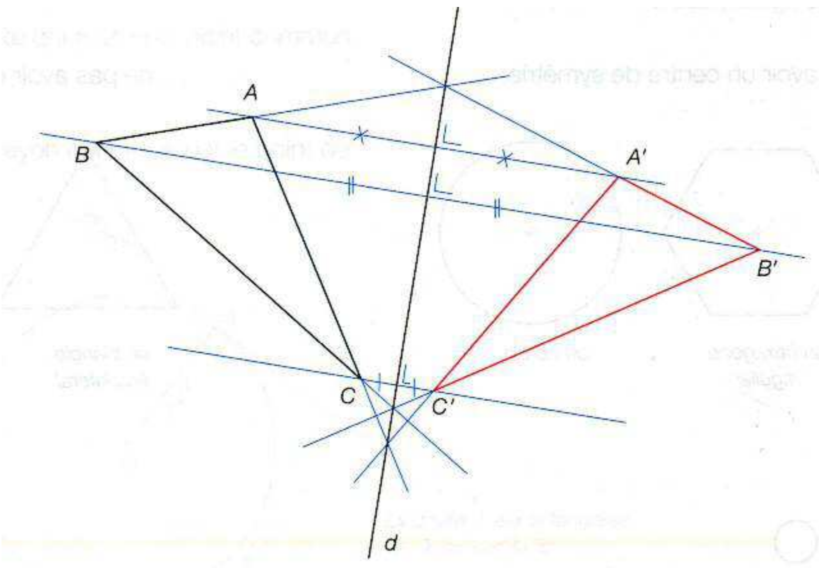
2 Construire les points A', B' et C' tels que :
$PA' = PA$
$QB' = QB$
$RC' = RC$.
Relier ensuite les points A', B' et C'.

Toutes les propriétés de la symétrie axiale peuvent être utilisées pour construire l'image d'une figure, comme par exemple:

Les droites *AA', BB'* et *CC'* (joignant deux points symétriques l'un de l'autre) sont parallèles.

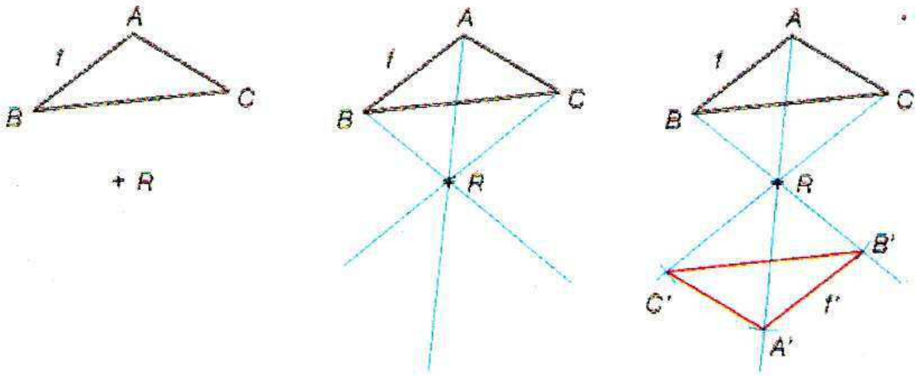
Tous les points de l'axe de symétrie sont images d'eux-mêmes: ce sont des points fixes.

Une droite et son image se coupent sur l'axe de symétrie (sauf les parallèles à cet axe).



Il existe donc d'autres méthodes pour la construction de l'image d'une figure par une symétrie axiale.

Construction de l'image d'une figure par une symétrie centrale:



Construction de l'image de la figure f par la symétrie de centre R.

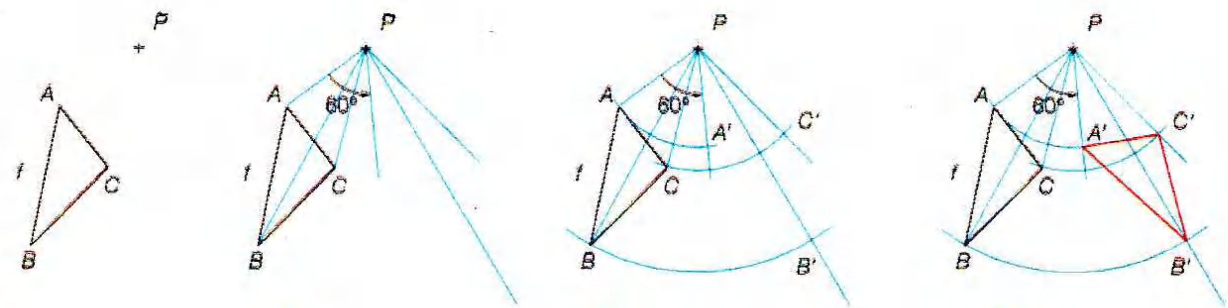
1 Tracer les droites passant par le point R et par chacun des sommets de f.

2 Construire le point A' tel que :
- A, R et A' soient alignés ;
- R soit entre A et A' ;
- $RA' = RA$.

Faire de même pour B' et C'. Relier ensuite les points A', B' et C'.

Toutes les propriétés de la symétrie centrale peuvent être utilisées pour construire l'image d'une figure. Il existe donc d'autres méthodes.

Construction de l'image d'une figure par une rotation:



Construction de l'image de la figure f par la rotation de centre P et d'angle $+60°$.

1 Construire des angles de 60°, de sommet P tels qu'un de leurs côtés passe par un sommet de f (attention au sens de rotation).

2 Construire les points A', B' et C' tels que :

$PA = PA'$ et $\widehat{APA'} = 60°$

$PB = PB'$ et $\widehat{BPB'} = 60°$

$PC = PC'$ et $\widehat{CPC'} = 60°$

3 Relier ensuite les points A', B' et C'.

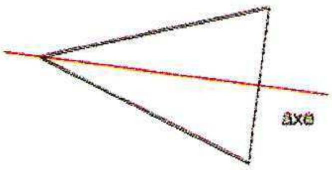
Toutes les propriétés de la rotation peuvent être utilisées pour construire l'image d'une figure. Il existe donc d'autres méthodes.

§ 3. Axes et centres de symétrie

Axes de symétrie:

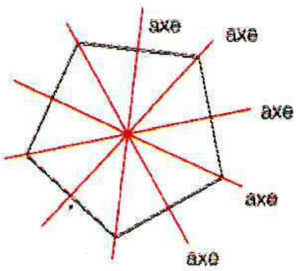
Une figure peut ...

... avoir un axe de symétrie



un triangle isocèle

... avoir plusieurs axes de symétrie



un pentagone régulier

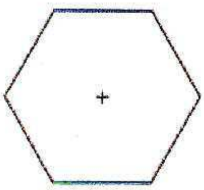
... ne pas avoir d'axe de symétrie

un quadrilatère quelconque

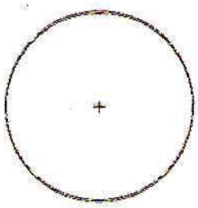
Centres de symétrie:

Une figure peut ...

... avoir un centre de symétrie

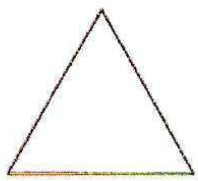


un hexagone régulier

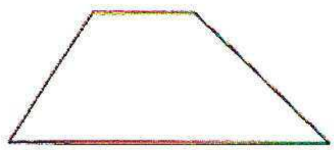


un cercle

... ne pas avoir de centre de symétrie



un triangle équilatéral



un trapèze

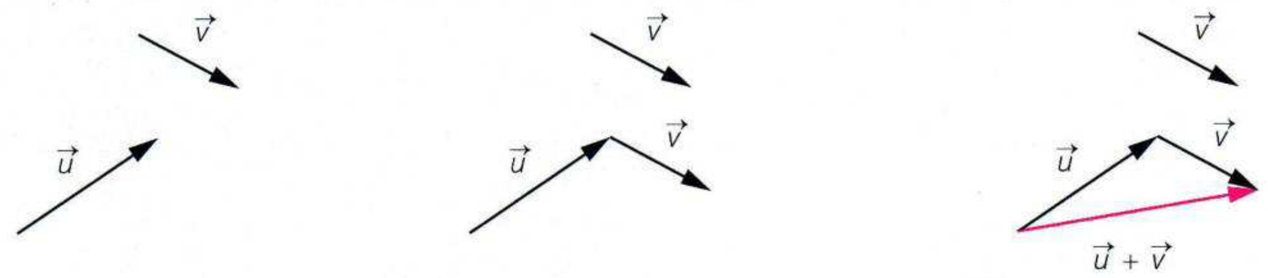
§ 4. Compositions d'isométries

Compositions d'isométries:

Une **composition d'isométries** est une suite d'isométries: on part d'une figure auquel on applique une isométrie; à partir de l'image obtenue, on applique une nouvelle isométrie; à partir de la nouvelle image obtenue, on applique une autre isométrie; etc. On peut faire 2, 3, 4, 5, etc. isométries à la suite.

Addition de vecteurs:

Comme les nombres, les vecteurs peuvent être additionnés. La **somme de vecteurs** est lui-même un vecteur. Voici comment on peut construire le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ à partir des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:



Construction d'une flèche représentant le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

1 Tracer une flèche représentant le vecteur $\vec{v}$ de telle sorte que son origine corresponde à l'extrémité de la flèche représentant le vecteur $\vec{u}$.

2 Tracer ensuite la flèche représentant le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

Il existe d'autres méthodes pour additionner deux vecteurs.

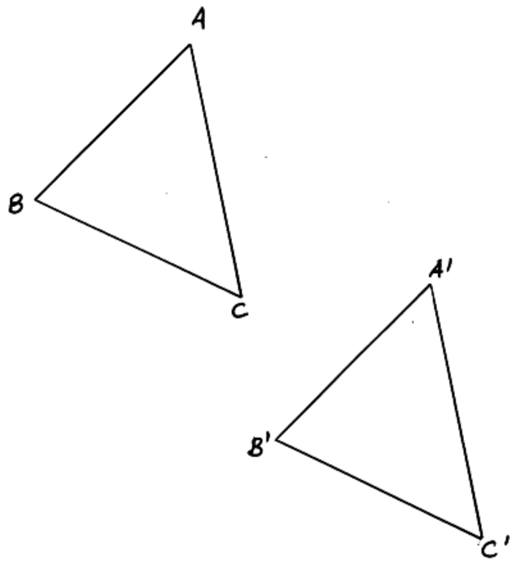
L'addition des vecteurs sera utile lors de la détermination permettant de passer d'une figure de départ à une figure finale dans une composition de translations.

§ 5. Détermination d'isométries

Lorsqu'on a une figure de départ et une figure d'arrivée (ou une partie d'une figure de départ et une partie d'une figure d'arrivée), on peut se demander quelle est l'isométrie (translation, symétrie axiale, symétrie centrale ou rotation) qui permet de passer de la figure de départ à celle d'arrivée, et, si elle existe, on peut alors la déterminer exactement (c'est-à-dire déterminer quel est le vecteur de translation ou déterminer quel est l'axe de symétrie ou déterminer quel est le centre de symétrie ou déterminer quel est le centre et quel est l'angle de rotation) et compléter les figures incomplètes. Cela s'appelle la **détermination d'isométries**.

1ère situation

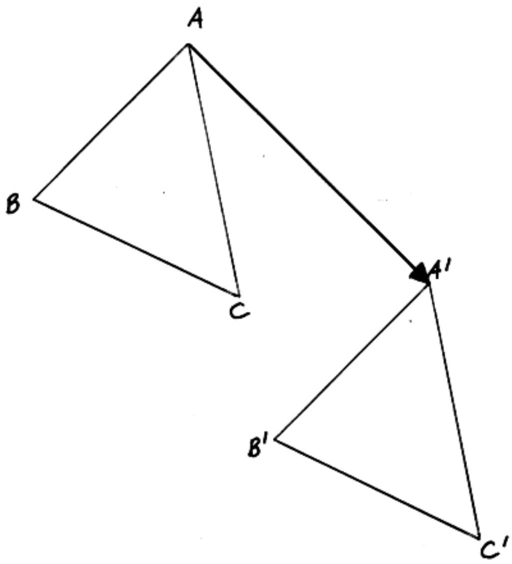
Quelle est l'isométrie permettant de passer de la figure ABC à la figure A'B'C' ?



La figure A'B'C' n'étant ni tournée, ni retournée par rapport à la figure ABC et les côtés de A'B'C' étant parallèles aux côtés correspondants de ABC (AB parallèle à A'B', BC parallèle à B'C' et AC parallèle à A'C'), on en déduit qu'il s'agit d'une **translation**.

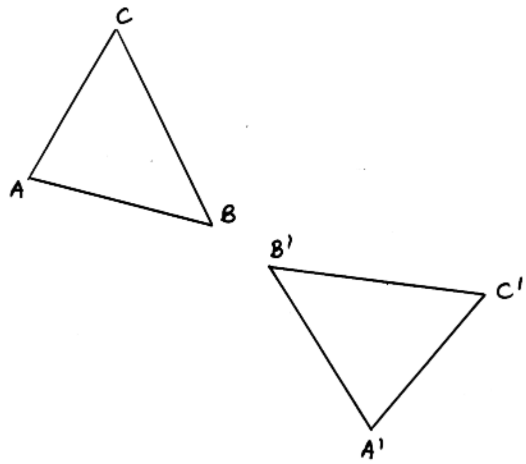
Son **vecteur** est $\overrightarrow{AA'}$ (ou $\overrightarrow{BB'}$ ou $\overrightarrow{CC'}$).

L'isométrie est donc **T($\overrightarrow{AA'}$)**.



2ème situation

Quelle est l'isométrie permettant de passer de la figure ABC à la figure A'B'C' ?

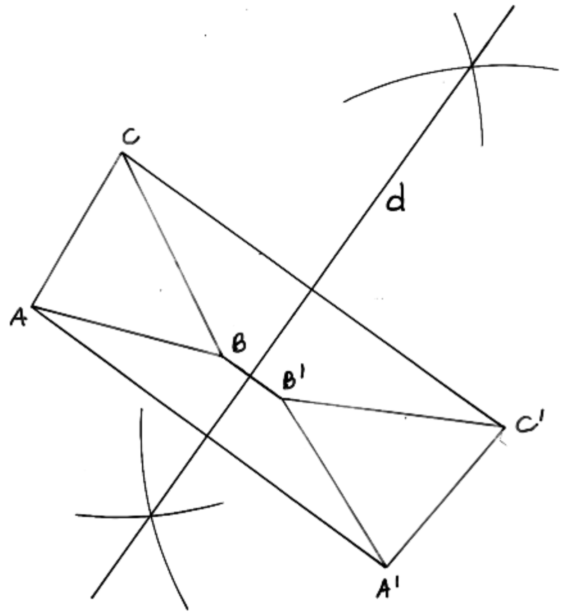


La figure A'B'C' n'est pas tournée, mais retournée par rapport à la figure ABC.

Il s'agit donc d'une **symétrie axiale**.

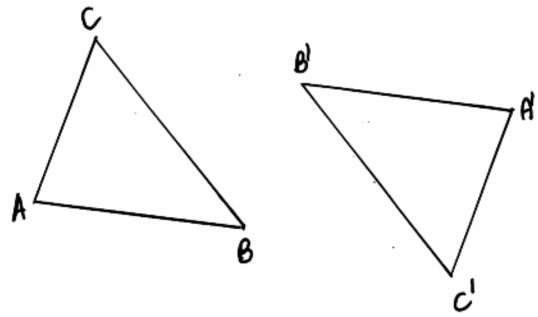
Son **axe** est la médiatrice du segment AA', qui doit aussi être la médiatrice du segment BB' et du segment CC'. Si ce n'est pas le cas, cela signifie que l'isométrie pour passer de la figure ABC à la figure A'B'C' n'est pas unique (il faut peut-être une translation et une symétrie axiale).

Ici, l'isométrie est **S(d)**.

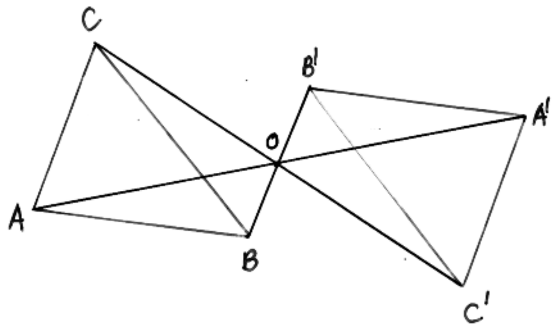


3ème situation

Quelle est l'isométrie permettant de passer de la figure ABC à la figure A'B'C' ?



Les côtés du triangle ABC restent parallèles deux à deux par l'isométrie (AB est parallèle à A'B', BC est parallèle à B'C' et AC est parallèle à A'C'), mais la figure est tournée d'un demi-tour.



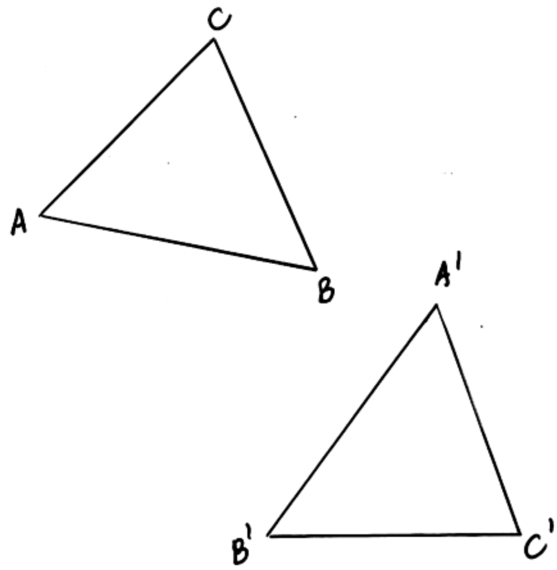
C'est donc une rotation de 180° dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans l'autre sens. Plus simplement, on dira que c'est une **symétrie centrale**.

Pour trouver le **centre**, il suffit de trouver l'intersection de des segments AA', BB' et CC'. Si le point n'est pas unique, c'est que l'isométrie n'est pas seulement une symétrie centrale.

Ici, l'isométrie est **S(O)**.

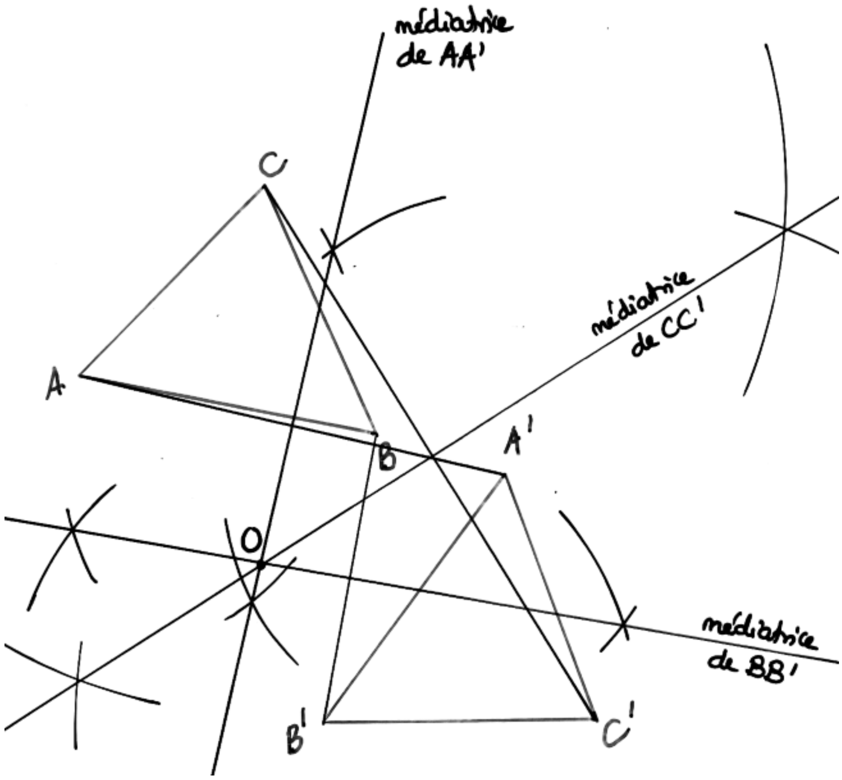
4ème situation

Quelle est l'isométrie permettant de passer de la figure ABC à la figure A'B'C' ?



La figure A'B'C' est tournée, mais pas retournée, par rapport à la figure ABC. Il s'agit donc d'une **rotation**.

Le **centre** est l'intersection des médiatrices des segments AA', BB' et CC'. Si ces médiatrices ne se coupent pas en un seul point, cela signifie que l'isométrie pour passer de la figure ABC à la figure A'B'C' n'est pas unique (il faut peut-être une translation et une rotation).

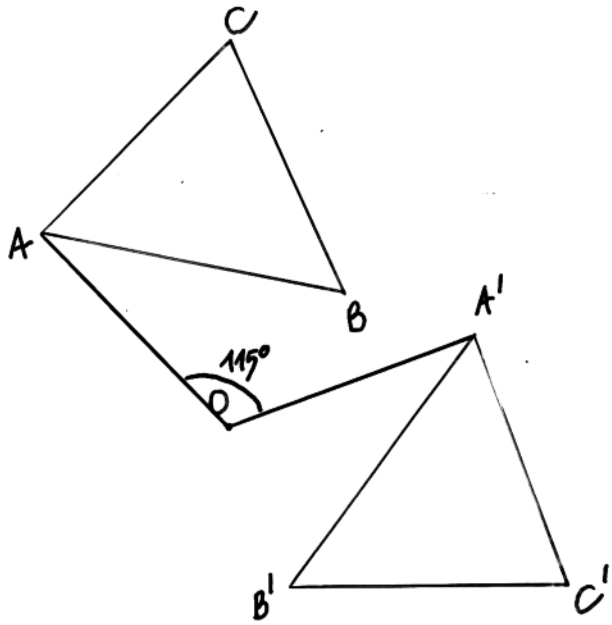


Une fois que l'on a trouvé le centre, il nous reste à déterminer l'**angle de rotation**.

Pour cela, il suffit de relier O à A et O à A' et de mesurer l'angle $\widehat{AOA'}$ (angle entre OA et OA'). On doit trouver la même chose pour les angles $\widehat{BOB'}$ et $\widehat{COC'}$.

On détermine le signe de l'angle de rotation en regardant si la rotation se fait dans le sens des aiguilles d'une montre (signe "-" comme ici) ou dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (signe "+").

Ainsi, ici, l'isométrie est **R(O;-115°)**.

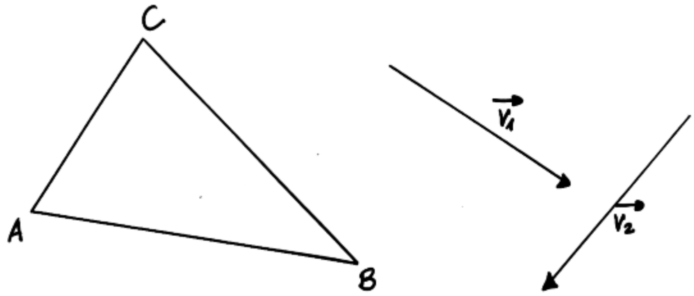


§ 6. Détermination dans les compositions d'isométries

Lorsqu'on effectue une composition d'isométries, on est souvent intéressé de savoir par quelle isométrie on aurait pu passer directement de la figure de départ à la figure finale. On appelle cela la **détermination dans les compositions d'isométries**.

Détermination dans les compositions de translations:

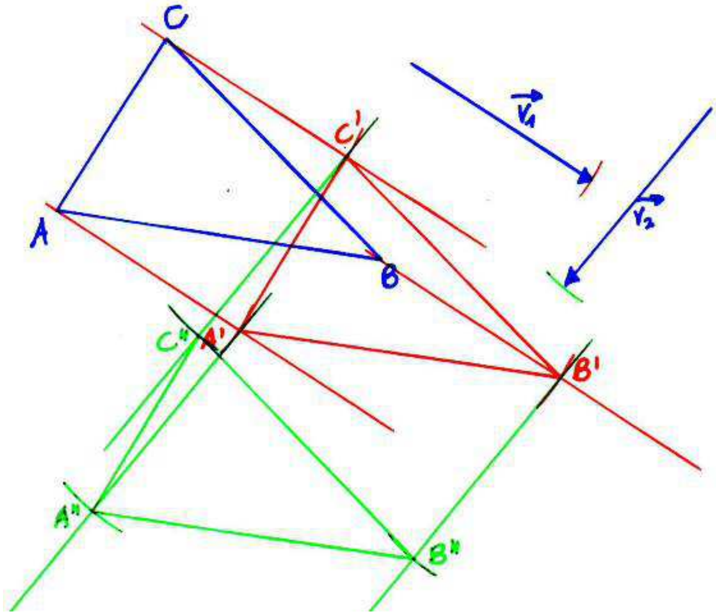
On effectue la composition des deux translations suivantes:



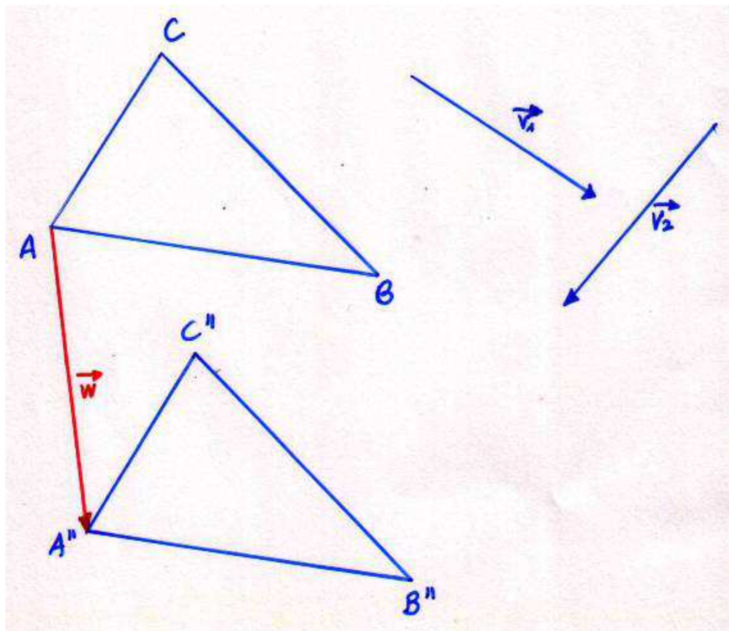
$$ABC \xrightarrow{T(\vec{v_1})} A'B'C' \xrightarrow{T(\vec{v_2})} A''B''C''$$

et on cherche à déterminer l'isométrie permettant de passer directement de *ABC* à *A"B"C"*.

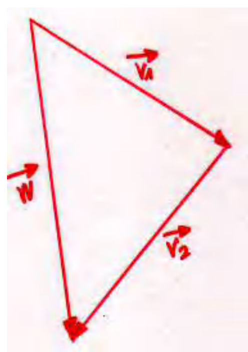
On commence par effectuer successivement les deux translations:



On remarque alors que, pour passer directement de *ABC* à *A"B"C"*, on doit effectuer une translation:



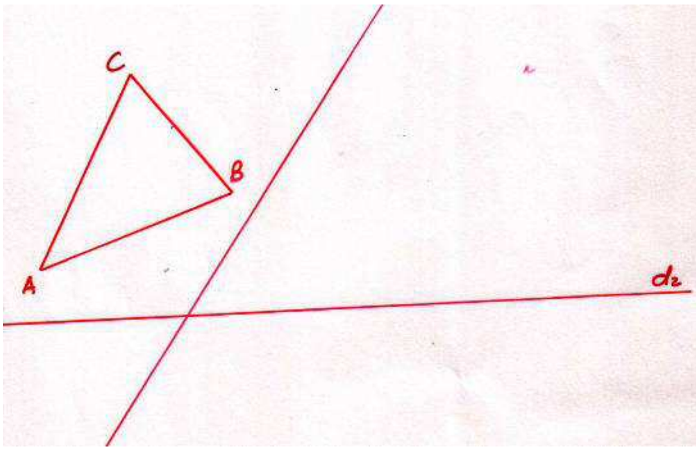
Le vecteur de translation (noté $\overrightarrow{w}$) est la somme des vecteurs de translation $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$:



Ainsi, l'isométrie permettant de passer directement de *ABC* à *A"B"C"* est une translation de vecteur $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$.

Détermination dans les compositions de symétries axiales d'axes non parallèles:

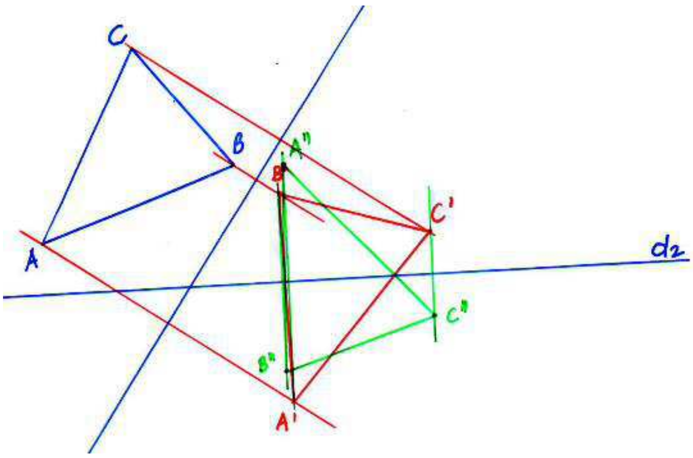
On effectue la composition des deux symétries axiales suivantes:



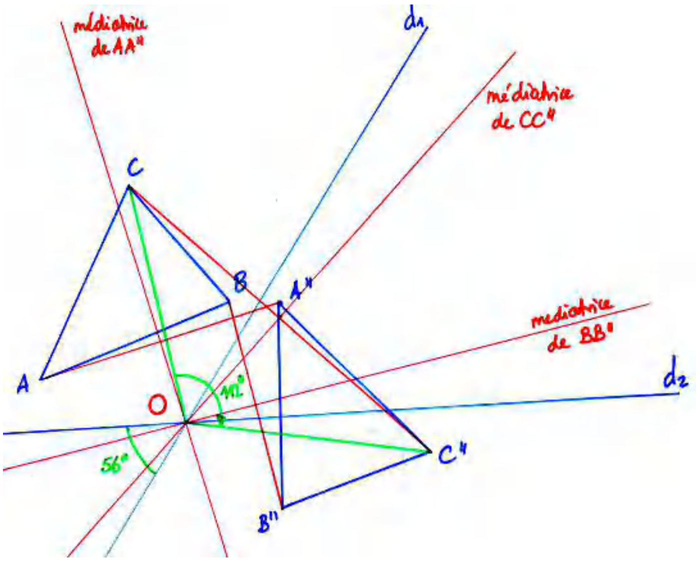
$$ABC \xrightarrow{S(d_1)} A'B'C' \xrightarrow{S(d_2)} A''B''C''$$

et on cherche à déterminer l'isométrie permettant de passer directement de *ABC* à *A''B''C''*.

On commence par effectuer successivement les deux symétries axiales:



On remarque alors que, pour passer directement de *ABC* à *A''B''C''*, on doit effectuer une rotation (on détermine son centre et son angle):

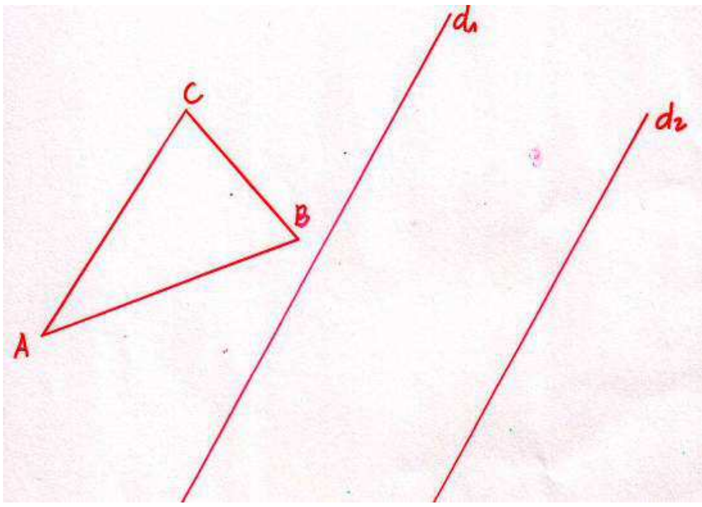


Le centre de rotation est l'intersection des droites d_1 et d_2. L'angle de rotation est le double de l'angle entre les droites d_1 et d_2.

Ainsi, l'isométrie permettant de passer directement de *ABC* à *A"B"C"* est une rotation dont le centre est l'intersection des axes de symétrie et l'angle est le double de l'angle entre les axes de symétrie.

Détermination dans les compositions de symétries axiales d'axes parallèles:

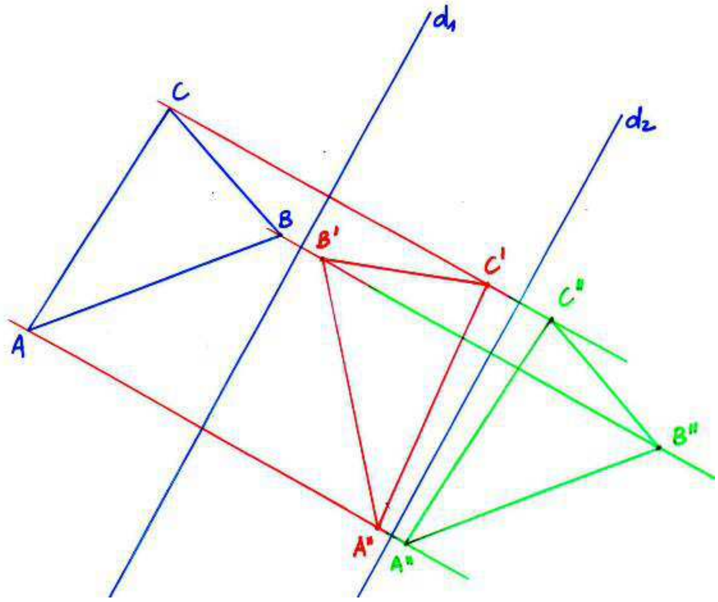
On effectue la composition des deux symétries axiales suivantes:



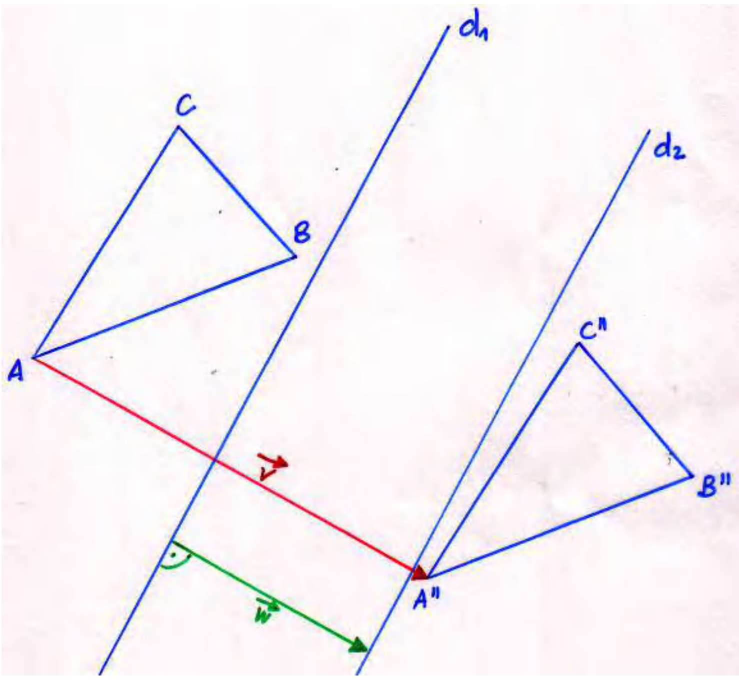
$$ABC \overset{S(d_1)}{----{>}} A'B'C' \overset{S(d_2)}{----{>}} A''B''C''$$

et on cherche à déterminer l'isométrie permettant de passer directement de *ABC* à *A''B''C''*.

On commence par effectuer successivement les deux symétries axiales:



On remarque alors que, pour passer directement de *ABC* à *A''B''C''*, on doit effectuer une translation (on détermine son vecteur):

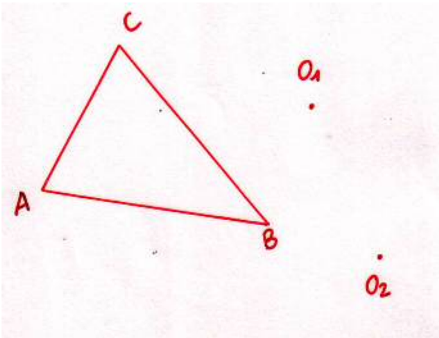


Le vecteur de translation est le double du vecteur reliant perpendiculairement les droites d_1 et d_2.

Ainsi, l'isométrie permettant de passer directement de *ABC* à *A''B''C''* est une translation dont le vecteur est le double du vecteur reliant perpendiculaires les axes de symétrie.

Détermination dans les compositions de symétries centrales:

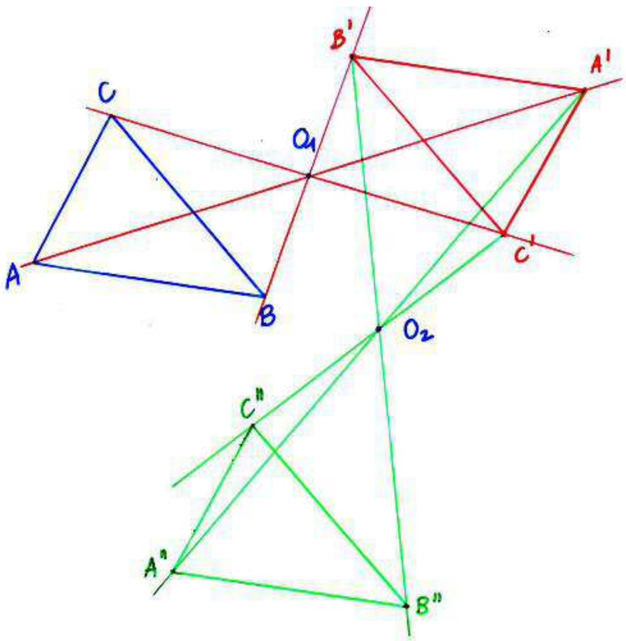
On effectue la composition des deux symétries centrales suivantes:



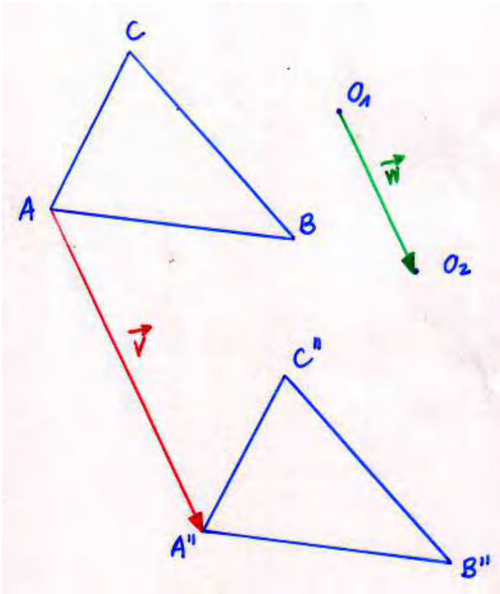
$$ABC \xrightarrow{S(O_1)} A'B'C' \xrightarrow{S(O_2)} A''B''C''$$

et on cherche à déterminer l'isométrie permettant de passer directement de *ABC* à *A''B''C''*.

On commence par effectuer successivement les deux symétries centrales:



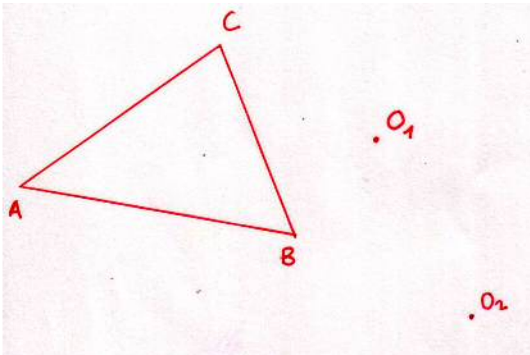
On remarque alors que, pour passer directement de *ABC* à *A"B"C"*, on doit effectuer une translation (on détermine son vecteur):



Le vecteur de translation est le double du vecteur reliant les points O_1 et O_2.
Ainsi, l'isométrie permettant de passer directement de *ABC* à *A"B"C"* est une translation dont le vecteur est le double du vecteur reliant les deux centres de symétrie.

Détermination dans les compositions de rotations:

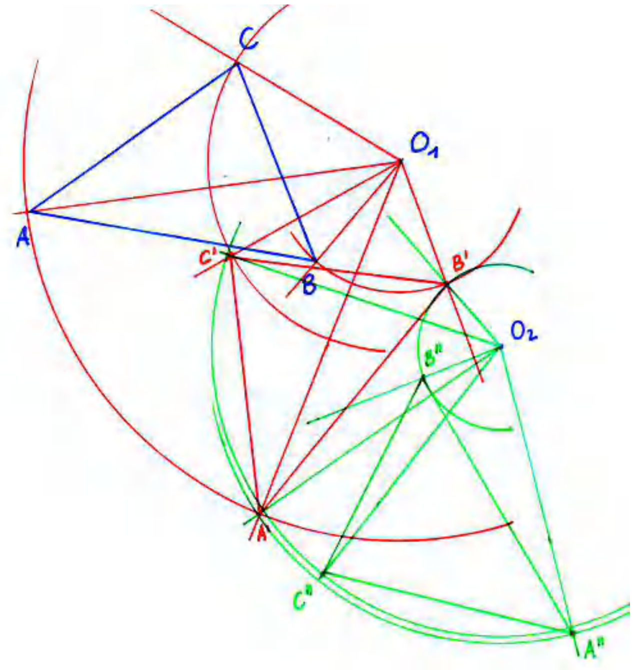
On effectue la composition des deux rotations suivantes:



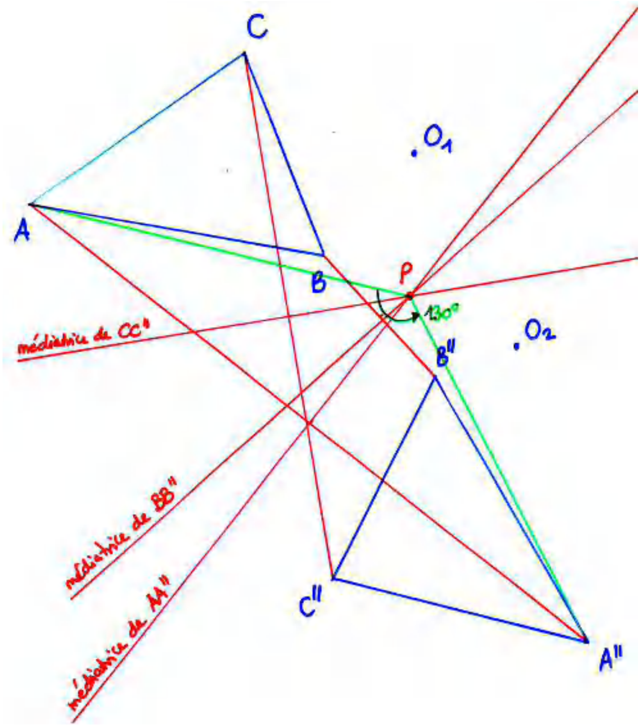
$$ABC \xrightarrow{R(O_1;60^o)} A'B'C' \xrightarrow{R(O_2;70^o)} A''B''C''$$

et on cherche à déterminer l'isométrie permettant de passer directement de *ABC* à *A"B"C"*.

On commence par effectuer successivement les deux rotations:



On remarque alors que, pour passer directement de *ABC* à *A''B''C''*, on doit effectuer une rotation (on détermine son centre et son angle):
Le centre de rotation *P* est l'intersection des médiatrices *AA'', BB''* et *CC''* et l'angle de rotation est l'angle entre *AP* et *A''P* par exemple.



Ainsi, l'isométrie permettant de passer directement de *ABC* à *A''B''C''* est une rotation dont on détermine le centre et l'angle par construction.