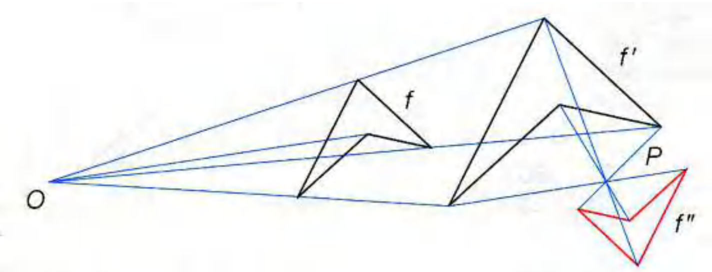
Géométrie

Homothéties, utilisations, détermination et compositions

§ 1. Homothéties

Les agrandissements et les réductions de figures sont des **homothéties**.

Une **homothétie** est une transformation qui conserve les formes et les directions mais, en général, pas les longueurs.



f' est l'image de f par une homothétie de centre O.
f'' est l'image de f' par une homothétie de centre P.

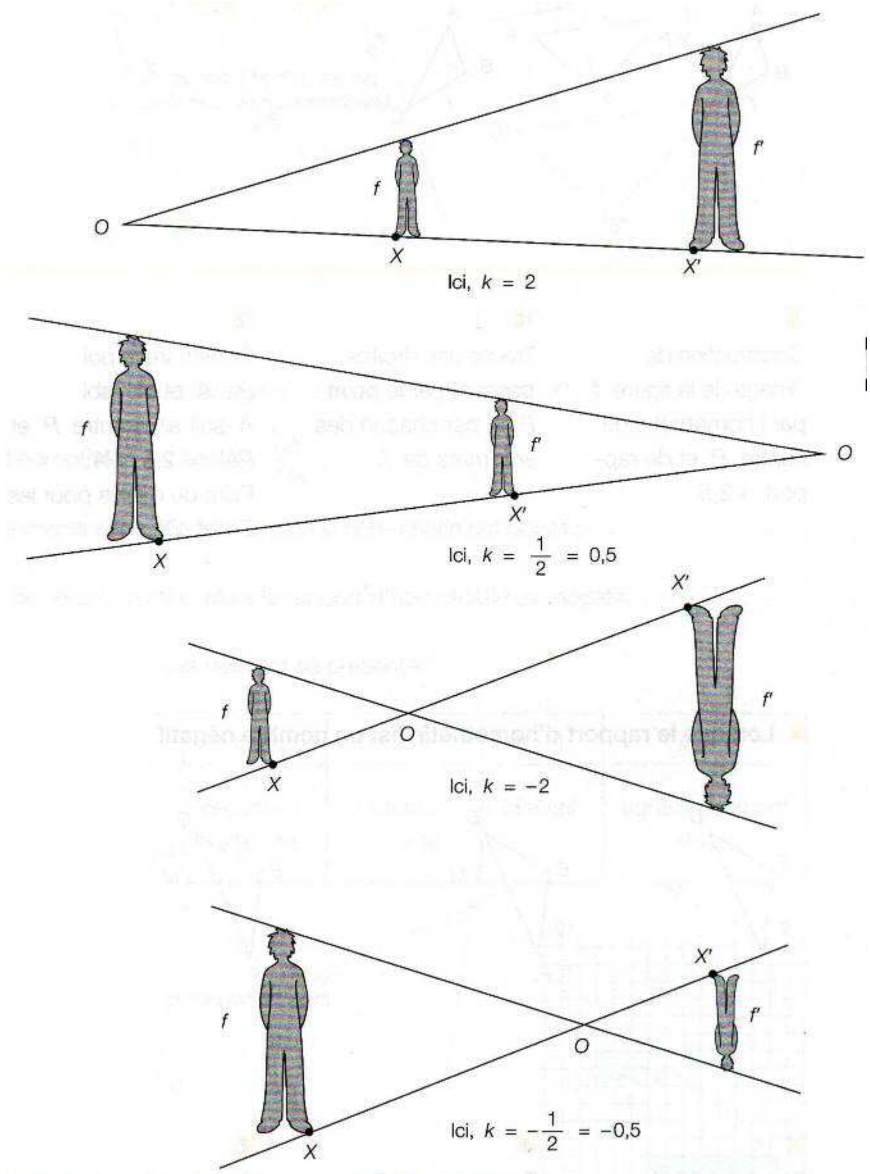
On distingue quatre type d'homothéties (voir les schémas à la page suivante):

A) l'**agrandissement direct**, caractérisé par une figure image plus grande que celle de départ et par la conservation du sens des vecteurs;

B) la **réduction directe**, caractérisée par une figure image plus petite que celle de départ et par la conservation du sens des vecteurs;

C) l'**agrandissement indirect**, caractérisé par une figure image plus grande que celle de départ et par le changement de sens des vecteurs;

D) La **réduction indirecte**, caractérisée par une figure image plus petite que celle de départ et par le changement de sens des vecteurs.



Une **homothétie** est une transformation du plan qui conserve les directions et qui possède un seul point fixe appelé **centre de l'homothétie**. Elle possède en outre en **rapport d'homothétie** (appelé aussi parfois **facteur d'homothétie**) qui détermine de quel facteur la figure de départ est agrandie ou réduite.

L'homothétie de centre O et de rapport k est notée ***H(O;k)***.

Une homothétie porte sur tous les points du plan et pas seulement sur la figure dont on cherche l'image.

Voici quelques caractéristiques du rapport d'homothétie, utiles notamment lorsqu'on doit le calculer:

Dans le cas d'une homothétie de centre O telle que l'image d'un point X est le point X':

- la valeur absolue du rapport k d'homothétie est égale à $\frac{OX'}{OX}$;
- si les vecteurs $\overrightarrow{OX'}$ et $\overrightarrow{OX}$ ont le même sens, alors le rapport d'homothétie est positif;
- si les vecteurs $\overrightarrow{OX'}$ et $\overrightarrow{OX}$ sont de sens contraires, alors le rapport d'homothétie est négatif.

Selon la valeur du rapport d'homothétie, plusieurs cas peuvent se présenter:

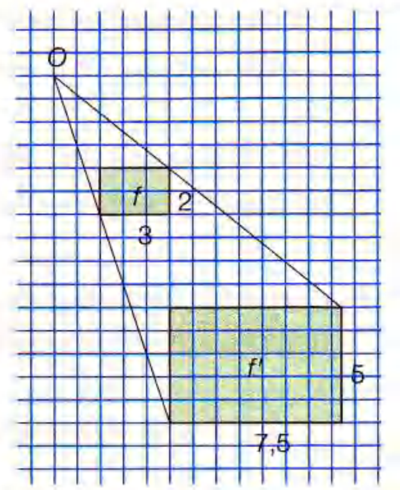
Valeur de k	$k < -1$	$k = -1$	$-1 < k < 0$	$0 < k < 1$	$k = 1$	$k > 1$
Type d'homothétie	agrandissement indirect	symétrie centrale ou rotation de 180°	réduction indirecte	réduction directe	identité	agrandissement direct

Lorsqu'on désire comparer l'aire d'une figure image par une homothétie avec celle de la figure de départ, on procède comme suit:

si une figure f a pour image une figure f' par une homothétie de rapport k, alors: $\frac{\text{aire de } f'}{\text{aire de } f} = k^2$.

Si, par exemple, le rapport k vaut 2,5 (voir figure ci-contre), on a:

$$\frac{\text{aire de } f'}{\text{aire de } f} = \frac{7{,}5 \cdot 5}{3 \cdot 2} = \frac{3 \cdot 2{,}5 \cdot 2 \cdot 2{,}5}{3 \cdot 2} = 2{,}5 \cdot 2{,}5 = 2{,}5^2.$$

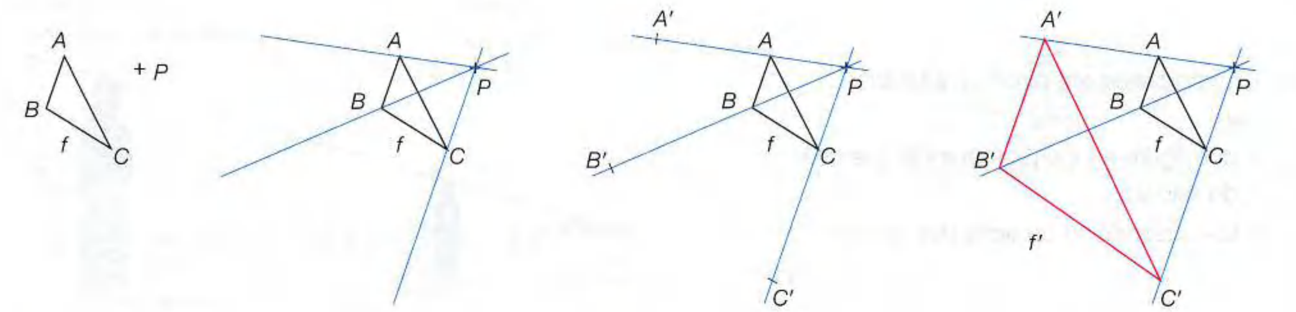


§ 2. Construction de l'image d'une figure par une homothétie

La méthode de **construction de l'image d'une figure par une homothétie** dépend du signe du rapport d'homothétie. Il y a donc deux méthodes distinctes, en fonction du signe de ce rapport.

Toutes les propriétés des homothéties peuvent être utilisées pour construire l'image d'une figure (voir plus loin). Il existe donc d'autres méthodes que celles décrites ci-dessous.

Lorsque le rapport d'homothétie est un nombre positif:



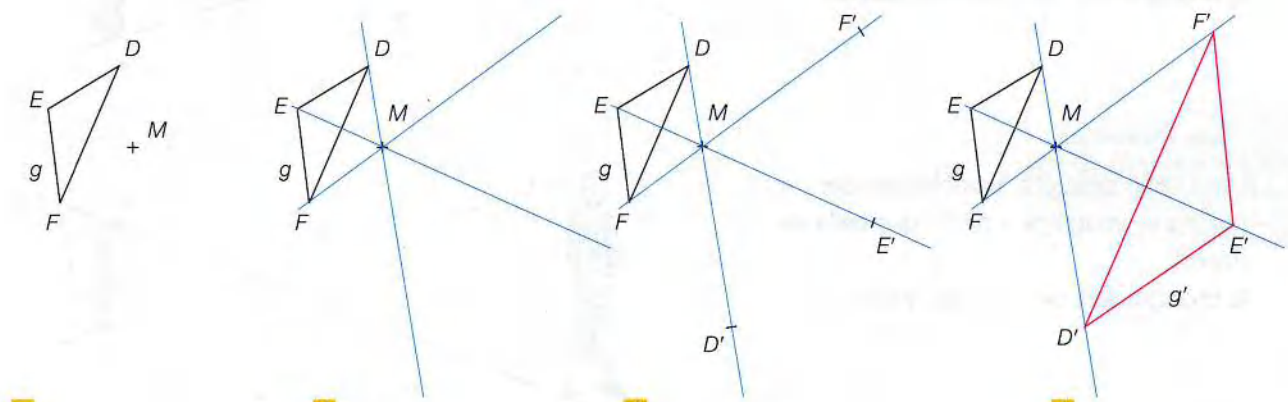
Construction de l'image de la figure f par l'homothétie de centre P et de rapport $+2{,}5$.

1 Tracer des droites passant par le point P et par chacun des sommets de f.

2 Construire le point A' tel que :
P, A et A' soient alignés ;
A soit situé entre P et A' ;
$PA' = 2{,}5 \cdot PA$.
Faire de même pour les points B' et C'.

3 Relier ensuite les points A', B' et C'.

Lorsque le rapport d'homothétie est un nombre négatif:



Construction de l'image de la figure g par l'homothétie de centre M et de rapport -2.

1 Tracer des droites passant par le point M et par chacun des sommets de g.

2 Construire le point D' tel que :
D, M et D' soient alignés ;
M soit situé entre D et D' ;
$MD' = 2 \cdot MD$.
Faire de même pour les points E' et F'.

3 Relier ensuite les points D', E' et F'.

§ 3. Propriétés des homothéties

Les dimensions des triangles ABC et $A'B'C'$ sont proportionnelles :

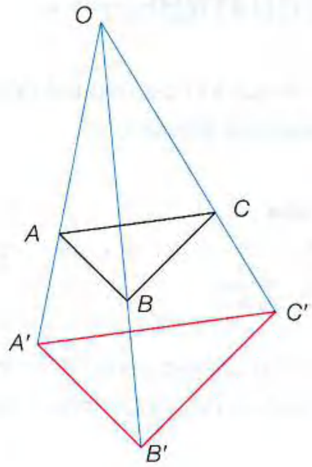
Dimensions de ABC (en cm)	1,2	1,6	2
Dimensions de $A'B'C'$ (en cm)	1,8	2,4	3

$\times 1{,}5$ $\quad \times \frac{2}{3}$

Le rapport d'homothétie est 1,5.

Le rapport d'homothétie est un facteur de proportionnalité

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = 1{,}5$$



§ 4. Propriétés des isométries et des homothéties

Voici un tableau qui résume les propriétés des isométries et des homothéties:

Transformation \ Conservation	Longueurs	Mesure des angles	Parallélisme	Orientation	Directions	Sens des vecteurs
translation	oui	oui	oui	oui	oui	oui
rotation	oui	oui	oui	oui	non[1]	non[2]
symétrie centrale	oui	oui	oui	oui	oui	non
symétrie axiale	oui	oui	oui	non	non[3]	non[4]
homothétie de rapport positif	non[5]	oui	oui	oui	oui	oui
homothétie de rapport négatif	non[6]	oui	oui	oui	oui	non

[1] sauf si l'angle mesure 180° ou 360°
[2] sauf si l'angle mesure 360°
[3] sauf pour les droites perpendiculaires ou parallèles à l'axe de symétrie
[4] sauf pour les vecteurs parallèles à l'axe de symétrie
[5] sauf si le rapport est 1
[6] sauf si le rapport est −1

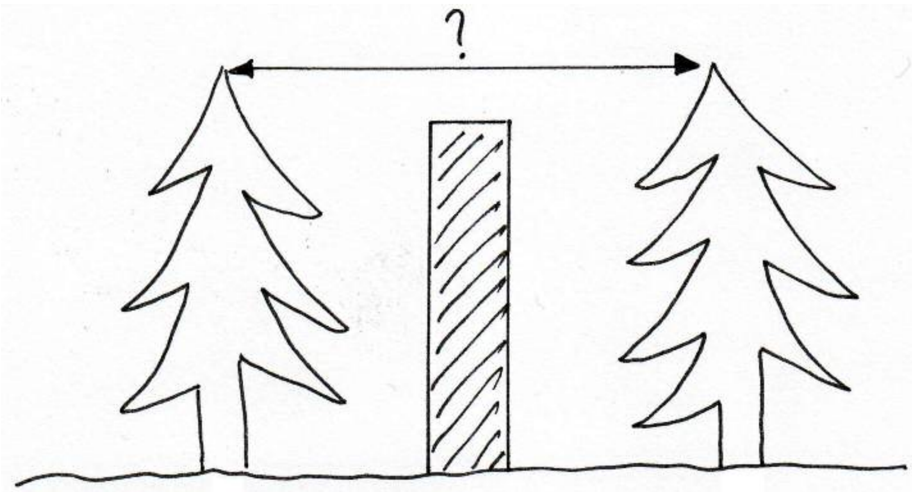
§ 5. Utilisations des homothéties

Grâce aux homothéties, on peut calculer des longueurs qu'on ne peut pas mesurer directement (hauteur d'un arbre, largeur d'une rivière, etc.).

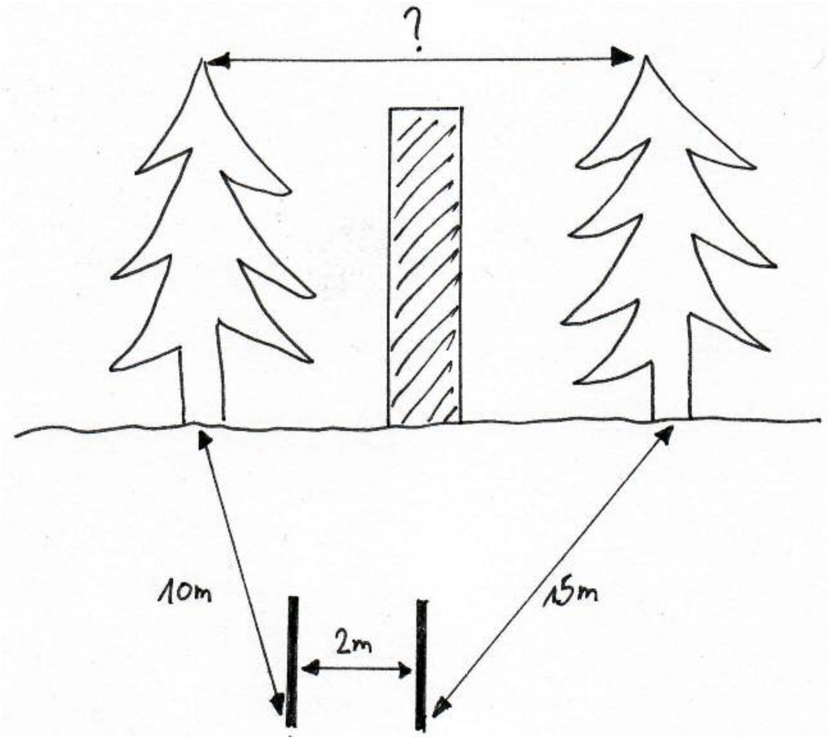
Il suffit d'obtenir par exemple deux triangles homothétiques dont l'un est entièrement connu et dont l'autre contient la longueur que l'on veut calculer et dans lequel on connaît au moins une longueur, puis de trouver l'homothétie qui permet de passer d'un triangle à l'autre, ce qui permettra de calculer la longueur cherchée.

Exemple:

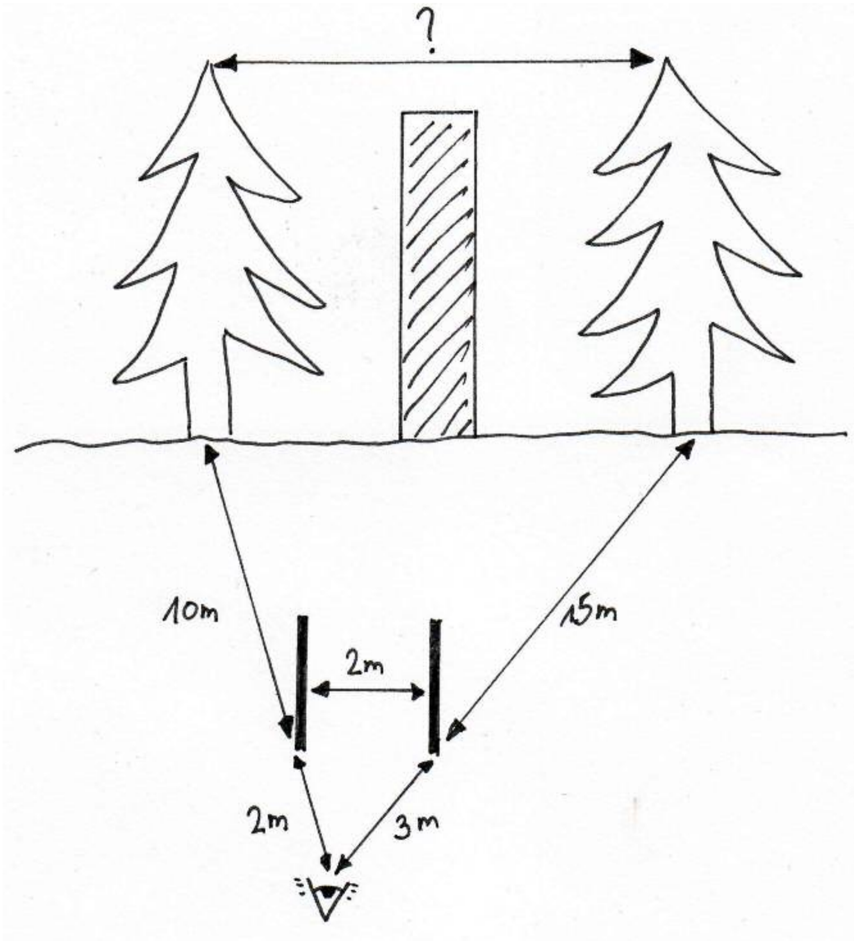
On veut calculer la distance entre deux sapins séparés par un grand mur:



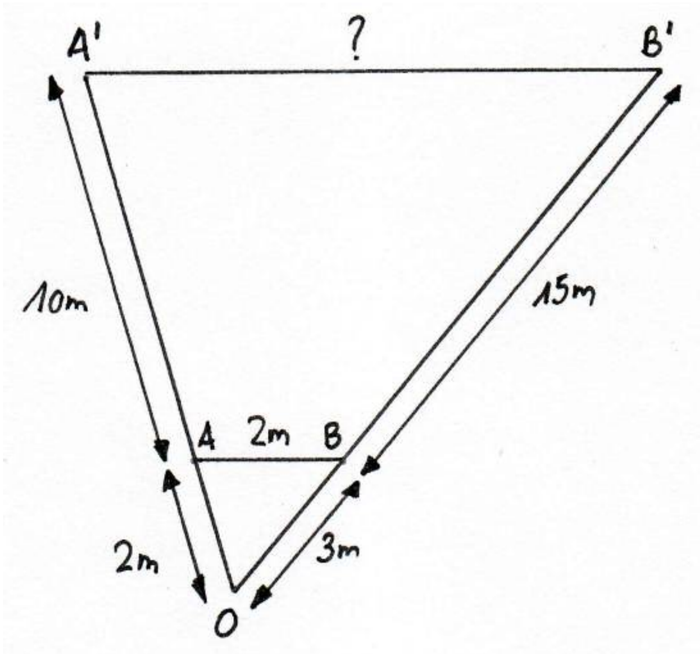
Une manière est de procéder ainsi: parallèlement à la droite reliant les deux arbres, on plante deux bâtons, chacun à une distance que l'on mesure d'un des arbres; on mesure la distance entre les deux bâtons:



On se place de telle manière que, pour chaque paire bâton - arbre, le bâton et l'arbre sont alignés. On mesure alors la distance entre soi-même et chaque bâton:



On obtient alors la situation géométrique suivante:



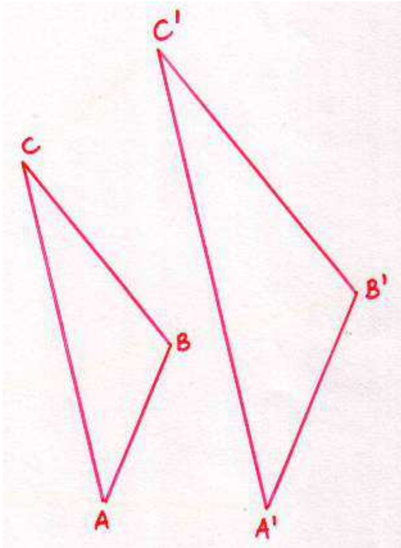
O est l'oeil de l'observateur, A est le pied du piquet de gauche, A' est le pied de l'arbre de gauche, B est le pied du piquet de droite, B' est le pied de l'arbre de droite.
On voit alors clairement qu'il y a une homothétie qui permet de passer au triangle OAB au triangle OA'B'.
Son rapport est $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{10+2}{2} = \frac{12}{3} = \frac{15+3}{3} = \frac{18}{3} = 6$.
On a alors $A'B' = 6 \cdot AB = 6 \cdot 2 = 12$.
La distance entre les deux arbres est donc de **12 mètres**.

§ 6. Détermination d'homothéties

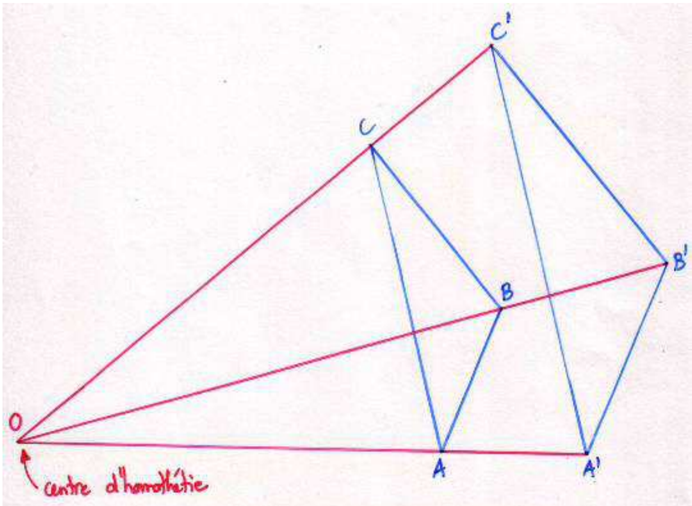
Lorsqu'on a une figure de départ et une figure d'arrivée (ou une partie d'une figure de départ et une partie d'une figure d'arrivée), on peut se demander quelle est l'homothétie (agrandissement ou réduction) qui permet de passer de la figure de départ à celle d'arrivée, et, si elle existe, on peut alors la déterminer exactement (c'est-à-dire déterminer quel est le centre d'homothétie et quel est le rapport d'homothétie) et compléter les figures incomplètes. Cela s'appelle la **détermination d'homothéties**.

1ère situation

Quelle est l'homothétie permettant de passer de la figure ABC à la figure A'B'C' ?

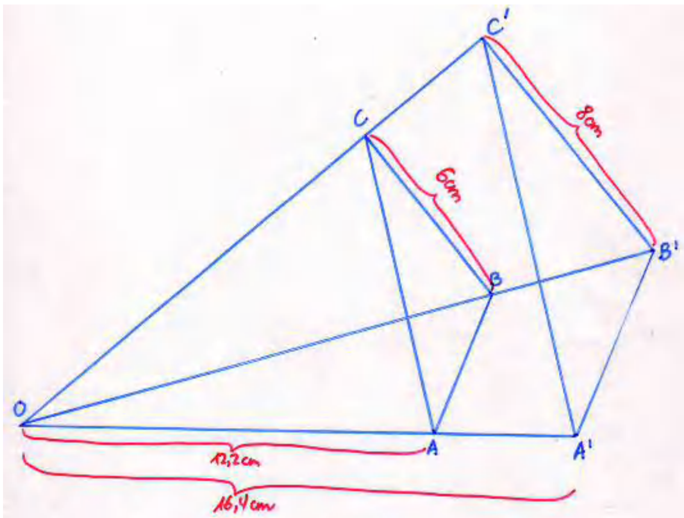


La figure A'B'C' est agrandie par rapport à la figure ABC. On trouve le **centre d'homothétie** en reliant A à A', B à B' et C à C', en prolongeant ces traits autant que nécessaire afin qu'ils se coupent en un point O. C'est le centre d'homothétie.



Le **facteur d'homothétie** est donné par:

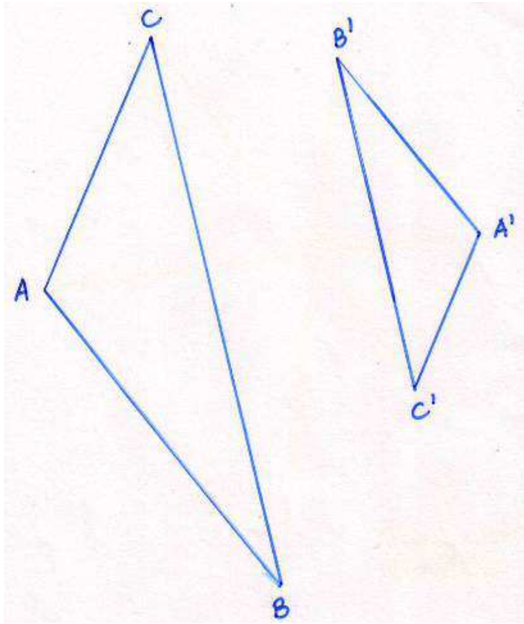
$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} \simeq$$
$$\simeq 1,3.$$



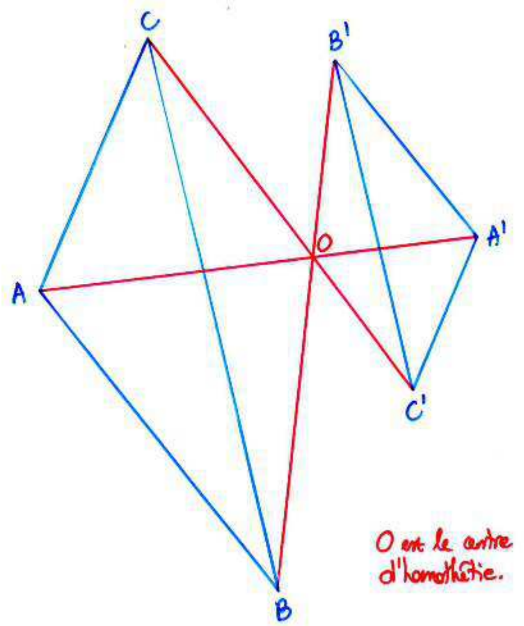
Ainsi, l'homothétie permettant de passer de ABC à A'B'C' est $H(O;1,3)$.

2ème situation

Quelle est l'homothétie permettant de passer de la figure ABC à la figure A'B'C' ?



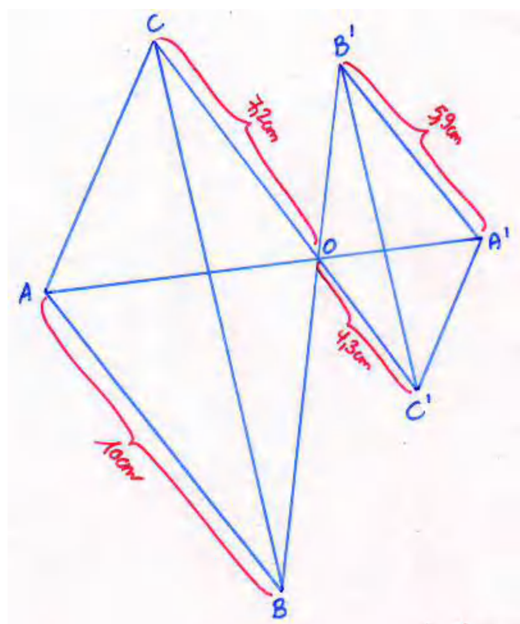
La figure A'B'C' est réduite et tournée de 180° par rapport à la figure ABC. On trouve le **centre d'homothétie** en reliant A à A', B à B' et C à C' et en déterminant leur intersection. C'est le centre d'homothétie.



Le **facteur d'homothétie** est donné par:

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} \simeq 0,59.$$

Comme la figure est tournée de 180°, on mettra le signe "-".



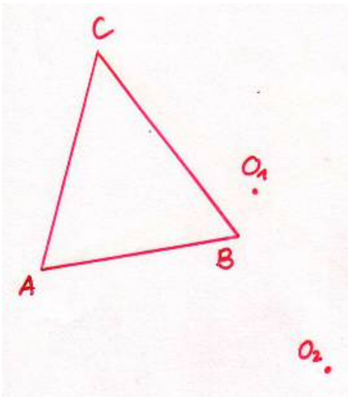
Ainsi, l'homothétie permettant de passer de ABC à A'B'C' est $H(O;-0,59)$.

§ 7. Compositions d'homothéties

Une **composition d'homothéties** est une suite d'homothéties: on part d'une figure à laquelle on applique une homothétie; à partir de l'image obtenue, on applique une nouvelle homothétie; à partir de la nouvelle image obtenue, on applique une autre homothétie; etc. On peut faire 2, 3, 4, 5, etc. homothéties à la suite.

§ 8. Détermination dans les compositions d'homothéties

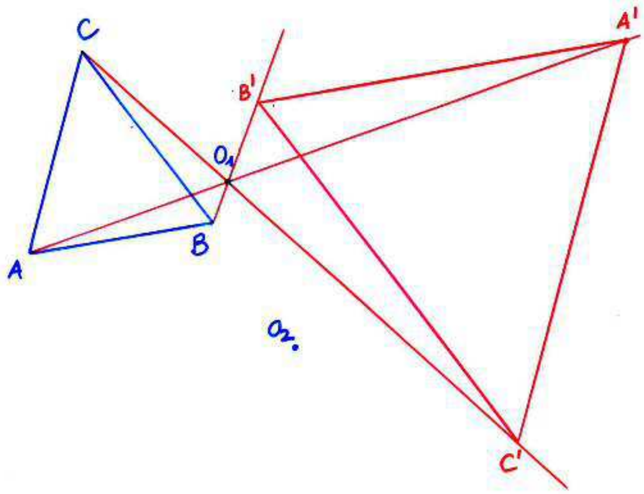
Lorsqu'on effectue une composition d'homothéties, on est souvent intéressé de savoir par quelle homothétie on aurait pu passer directement de la figure de départ à la figure finale. On appelle cela la **détermination dans les compositions d'homothéties**.
On effectue la composition des deux homothéties suivantes:



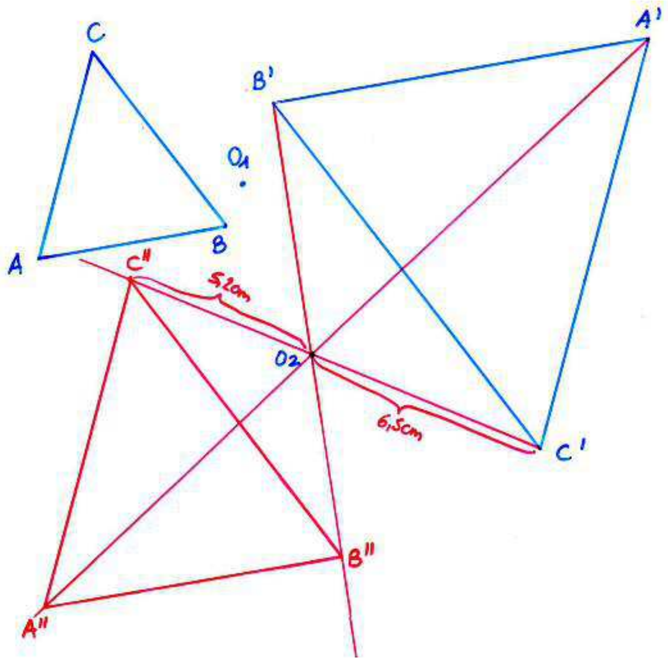
$$ABC \xrightarrow{H(O_1;-2)} A'B'C' \xrightarrow{H(O_2;-0,8)} A''B''C''$$

et on cherche à déterminer l'homothétie permettant de passer directement de *ABC* à *A''B''C''*.

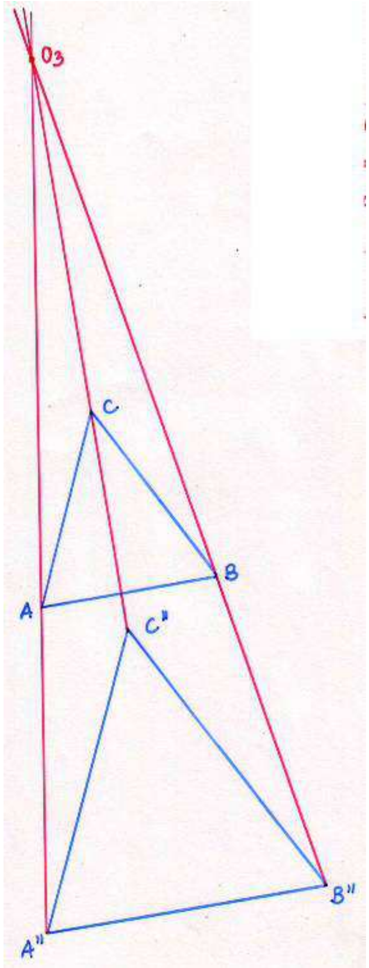
On commence par effectuer l'homothétie $H(O_1;-2)$:



Puis, à partir de A'B'C', on effectue l'homothétie $H(O_2;-0,8)$:



On peut alors déterminer quelle est l'homothétie permettant de passer directement de ABC à A''B''C'':



En reliant A à A'', B à B'', C à C'' et en prolongeant les traits, on trouve le point $O_{3,}$, qui est le centre d'homothétie.

Comme AB = 5 cm et A''B'' = 8 cm, le facteur d'homothétie est $\frac{A''B''}{AB} = \frac{8}{5} = 1,6$.

Ainsi, l'homothétie qui permet de passer directement de ABC à A''B''C'' est: H(O_3;1,6).