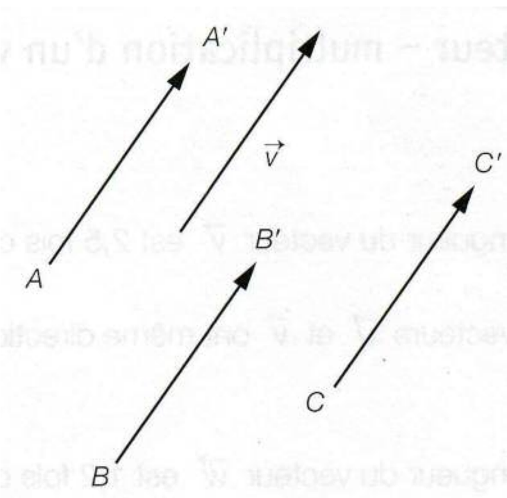
Géométrie

Géométrie analytique du plan

§ 1. Vecteurs

Un **vecteur** est un segment muni d'un sens que l'on symbolise par une flèche au bout du segment. On dit aussi qu'un vecteur est un **segment orienté**.

Un vecteur qui correspond au segment AA' et dont la flèche est en A' est noté $\overrightarrow{AA'}$:



Dans le dessin ci-dessus, les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$ ont même direction (les droites qui les portent sont parallèles), même sens (les flèches sont du même côté) et même longueur. Ces vecteurs représentent en fait la même chose; il représente un même segment orienté, que l'on peut également noter $\vec{v}$, par exemple.

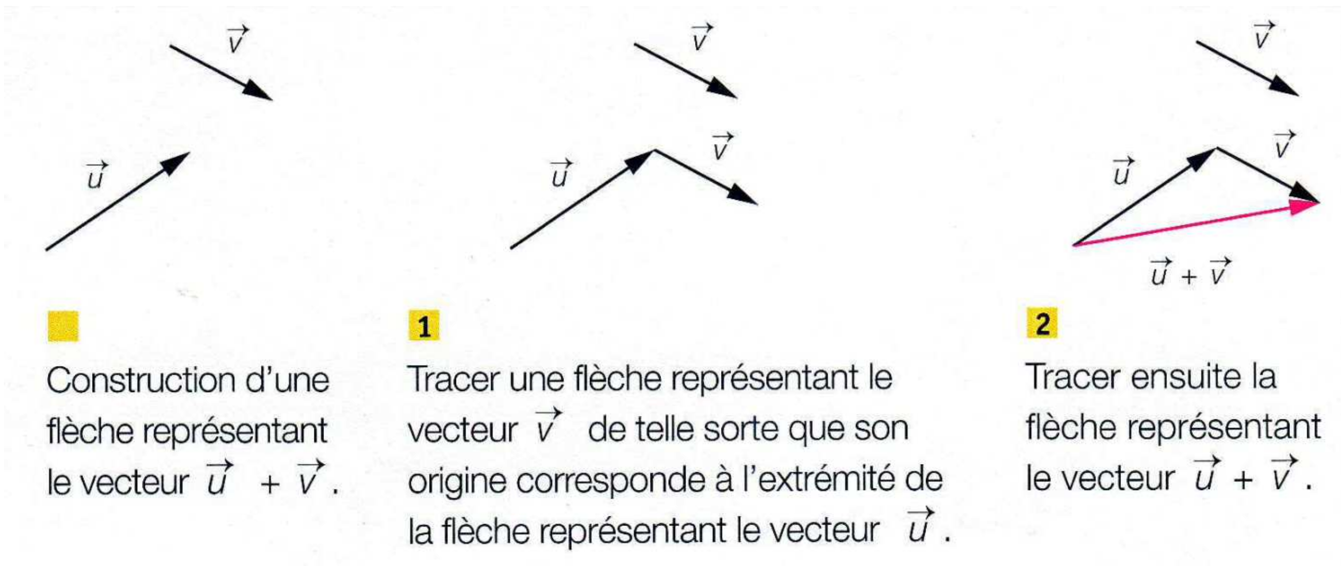
On peut donc écrire $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \vec{v}$.

Par conséquent, un vecteur peut être représenté par une infinité de segments orientés.

Le **vecteur opposé** à un vecteur est le vecteur qui a la même direction et la même longueur, mais dont le sens est inverse. On note $-\vec{v}$ le vecteur opposé au vecteur $\vec{v}$.

§ 2. Additions géométriques de vecteurs

Voici une méthode pour **additionner géométriquement deux vecteurs** (il en existe d'autres):



§ 3. Multiplications géométriques de vecteurs

On peut **multiplier géométriquement un vecteur par un nombre**:

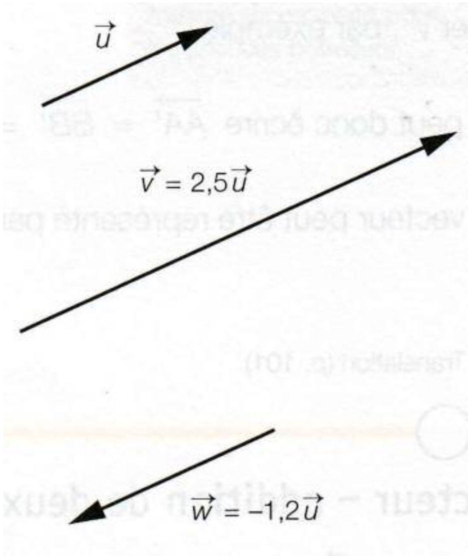
- si le nombre est positif, la direction et le sens du vecteur restent les mêmes et sa longueur est multipliée par le nombre;

- si le nombre est négatif, la direction du vecteur reste la même, son sens change et sa longueur est multipliée par la valeur absolue du nombre.

Dans les dessins ci-contre, on a:

- les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v} = 2,5\vec{u}$ ont même direction et même sens; la longueur du vecteur $\vec{v}$ est 2,5 fois celle du vecteur $\vec{u}$;

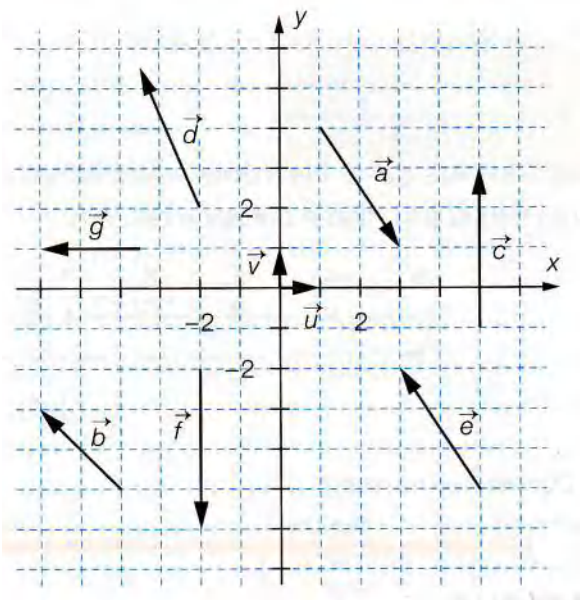
- les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w} = -1,2\vec{u}$ ont même direction, mais sont de sens opposés; la longueur du vecteur $\vec{w}$ est 1,2 fois celle du vecteur $\vec{u}$.



§ 4. Vecteurs dans des systèmes d'axes du plan

Dans un système d'axes du plan, les graduations sont définies par les nombres entiers (...; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...).

Le vecteur qui va de l'origine des axes au point (1 ; 0) (autrement dit le vecteur qui relie 0 à 1 sur l'axe x) est parfois nommé le **vecteur unité** $\vec{u}$. Le vecteur qui va de l'origine des axes au point (0 ; 1) (autrement dit le vecteur qui relie 0 à 1 sur l'axe y) est parfois nommé le **vecteur unité** $\vec{v}$:



Dans un système d'axes du plan où on a défini les vecteurs unités $\vec{u}$ et $\vec{v}$, tout vecteur dessiné dans ce système d'axes peut alors s'exprimer comme une combinaison (c'est-à-dire comme une somme de facteurs) de ces vecteurs unité. De tels vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'appellent une **base du plan** qui est notée (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$), où O est l'origine des axes de coordonnées.

Dans le schéma ci-dessus, le vecteur $\vec{a}$ correspond à un déplacement de 2 unités vers la droite, parallèlement à l'axe x, et de 3 unités vers le bas, parallèlement à l'axe y. On peut ainsi dire que le vecteur $\vec{a}$ correspond à la somme du vecteur $2\vec{u}$ (déplacement de 2 unités vers la droite) et du vecteur $-3\vec{v}$ (déplacement de 3 unités vers le bas). On peut donc écrire: $\vec{a} = 2\vec{u} + \left(-3\vec{v}\right) = 2\vec{u} - 3\vec{v}$.

Cette manière d'écrire le vecteur $\vec{a}$ comme en fonction des vecteurs $\vec{u}$ e $\vec{v}$ s'appelle la **décomposition du vecteur** $\vec{a}$ dans la base (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$)

De la même manière, on peut noter (voir schéma):

$$\vec{b} = -2\vec{u} + 2\vec{v} \qquad \vec{e} = -2\vec{u} + 3\vec{v}$$

$$\vec{c} = 4\vec{v} \qquad \vec{f} = -4\vec{v}$$

$$\vec{d} = -1,5\vec{u} + 3,5\vec{v} \qquad \vec{g} = -2,5\vec{u}.$$

Le vecteur $\vec{a}$ est opposé au vecteur $\vec{e}$, car il a la même direction et la même longueur, mais pas le même sens: on peut donc écrire $\vec{a} = -\vec{e}$ ou $\vec{e} = -\vec{a}$.

De même, le vecteur $\vec{c}$ est opposé au vecteur $\vec{f}$.

§ 5. Composantes de vecteurs dans des systèmes d'axes du plan

Si le vecteur $\vec{a}$ est exprimé dans une base (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) du plan, cela signifie qu'il peut s'écrire sous la forme $\vec{a} = m\vec{u} + n\vec{v}$, où *m* et *n* sont des nombres réels.

On peut alors écrire le vecteur $\vec{a}$ simplement comme suit: $\vec{a} = \binom{m}{n}$ (il est toujours sous-entendu que le vecteur est exprimé dans la base (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) du plan et que $\vec{a} = m\vec{u} + n\vec{v}$).

Dans l'écriture $\vec{a} = \binom{m}{n}$, les nombres m et n s'appellent les **composantes du vecteur** $\vec{a}$ dans la base (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$). Le nombre du haut (m) est la **première composante du vecteur** et le nombre du bas (n) est la **deuxième composante du vecteur**.

Dans les exemples ci-dessus, dans la base (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) du plan, on pourra écrire les composantes des autres vecteurs:

$$\vec{b} = \binom{-2}{2} \qquad \vec{e} = \binom{-2}{3}$$

$$\vec{c} = \binom{0}{4} \qquad \vec{f} = \binom{0}{-4}$$

$$\vec{d} = \binom{-1{,}5}{3.5} \qquad \vec{g} = \binom{-2{,}5}{0}.$$

§ 6. Additions arithmétiques de vecteurs

Pour **additionner deux vecteurs donnés dans une base** (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) du plan, on peut procéder comme suit:

Si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont donnés dans la base (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) par $\vec{a} = 2\vec{u} - \vec{v}$ et $\vec{b} = \vec{u} + 3\vec{v}$, alors le vecteur $\vec{a} + \vec{b}$ est donné dans la base (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) par: $\vec{a} + \vec{b} =$
$= \left(2\vec{u} - \vec{v}\right) + \left(\vec{u} + 3\vec{v}\right) = 2\vec{u} - \vec{v} + \vec{u} + 3\vec{v} = 2\vec{u} + \vec{u} - \vec{v} + 3\vec{v} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$.

Autrement dit, on additionne les facteurs des vecteurs unités pour obtenir les facteurs de la somme des vecteurs.

Si les vecteurs $\vec{c}$ et $\vec{d}$ sont donnés dans la base (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) par $\vec{c} = \binom{-3}{1}$ et $\vec{d} = \binom{2}{3}$, alors le vecteur $\vec{c} + \vec{d}$ est donné dans la base (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) par:

$$\vec{c} + \vec{d} = \binom{-3}{1} + \binom{2}{3} = \binom{-3+2}{1+3} = \binom{-1}{4}.$$

Autrement dit, on additionne les premières composantes des vecteurs de départ pour obtenir la première composante du vecteur somme et on additionne les deuxièmes composantes des vecteurs de départ pour obtenir la deuxième composante du vecteur somme.

§ 7. Multiplications arithmétiques de vecteurs par des nombres

Pour **multiplier un vecteur** donné dans une base (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) du plan **par un nombre réel**, on peut procéder comme suit:

Si le vecteur $\vec{a}$ est donné dans la base (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) par $\vec{a} = 2\vec{u} - \vec{v}$ et qu'on veut le multiplier par (-3), alors le vecteur $-3\vec{a}$ est donné dans la base (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) par:

$$-3\vec{a} = -3 \cdot \left(2\vec{u} - \vec{v}\right) = -3 \cdot 2\vec{u} - 3 \cdot \left(-\vec{v}\right) = -6\vec{u} + 3\vec{v}.$$

Autrement dit, on multiplie chaque facteur des vecteurs unités par le nombre en question pour obtenir les facteurs du vecteur résultat.

Si le vecteur $\vec{c}$ est donné dans la base (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) par $\vec{c} = \binom{-3}{1}$ et qu'on veut le multiplier par 2,5, alors le vecteur $2,5\vec{c}$ est donné dans la base (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) par:

$$2,5\vec{c} = 2,5 \cdot \binom{-3}{1} = \binom{2,5 \cdot (-3)}{2,5 \cdot 1} = \binom{-7,5}{2,5}.$$

Autrement dit, on multiplie chaque composante du vecteur à multiplier par le nombre en question pour obtenir les composantes du vecteur résultat.