Géométrie

Théorème de Pythagore

§ 1. Terminologie

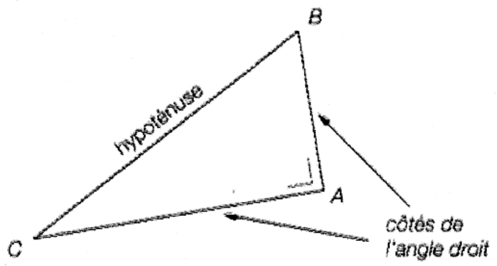
Avant d'aborder le théorème de Pythagore, il est nécessaire de connaître le vocabulaire le concernant.

Un **théorème** est un résultat mathématique qui peut être démontré.

Dans un triangle rectangle, l'**hypoténuse** est le côté opposé à l'angle droit. C'est le plus grand côté.

Un **triangle rectangle** en A est un triangle dont l'angle au sommet A mesure 90°.

Les côtés de l'angle droit sont parfois appelés les **cathètes**.

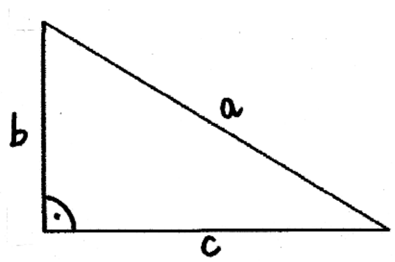


Le côté BC est l'hypoténuse du triangle rectangle. Les côtés AB et AC sont les côtés de l'angle droit.

§ 2. Théorème de Pythagore

Le **théorème de Pythagore** s'applique **uniquement aux triangles rectangles**.

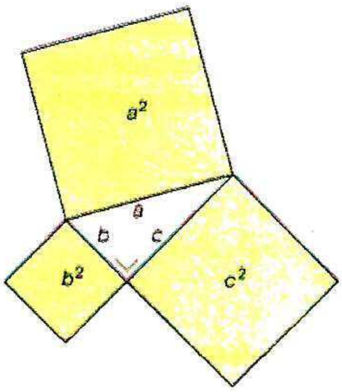
On désigne par la lettre a l'hypoténuse du triangle rectangle et par b et c les côtés de l'angle droit (c'est égal lequel est b et lequel est c):



Le théorème de Pythagore dit alors que le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Ainsi, si l'on construit trois carrés ayant chacun un côté du triangle rectangle, on remarque que l'aire du plus grand de ces carrés est la somme des aires des deux plus petits carrés:



Ainsi, lorsqu'on connaît les longueurs de deux côtés d'un triangle rectangle, on peut, en utilisant le théorème de Pythagore, calculer la longueur du troisième côté (voir les exemples d'applications ci-dessous).

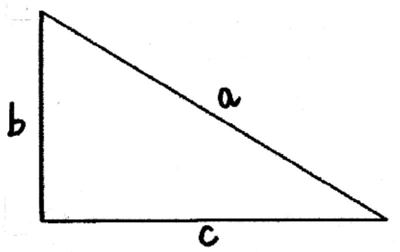
Le théorème de Pythagore s'énonce souvent ainsi: **le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit**.

§ 3. Réciproque du théorème de Pythagore

On appelle **réciproque d'un théorème** un résultat mathématique qui est valable aussi si on l'applique dans le sens inverse que dans le théorème considéré.

Le théorème de Pythagore dit que, dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.

La **réciproque du théorème de Pythagore** dit alors que, **si le carré du grand côté est égal à la somme des carrés des autres côtés, alors le triangle est rectangle**:

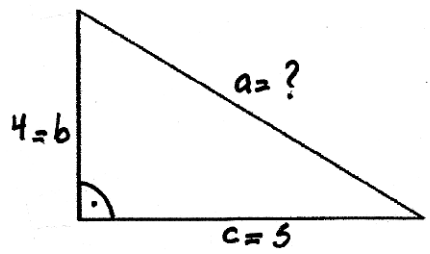


Si, dans le triangle ci-contre, a, b et c étant connus, on a $a^2 = b^2 + c^2$, alors le triangle est rectangle.

§ 4. Exemples d'applications du théorème de Pythagore

Exemple 1:

On sait que, dans un triangle rectangle, les côtés de l'angle droit valent 4 et 5 centimètres et on cherche à connaître la longueur de l'hypoténuse.



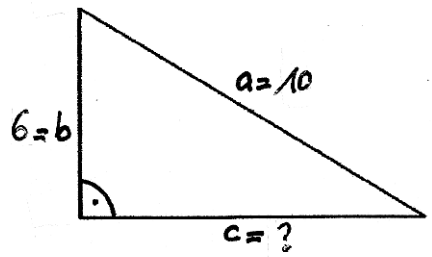
On dénomme par a l'hypoténuse du triangle et par b et c les côtés de l'angle droit: on a b = 4 cm et c = 5 cm et on cherche à calculer a.

Par le théorème de Pythagore, on a $a^2 = b^2 + c^2$. En remplaçant les valeurs que l'on connaît, on obtient $a^2 = 4^2 + 5^2$, c'est-à-dire $a^2 = 16 + 25 = 41$. On obtient alors $a = \sqrt{41} \simeq 6{,}4$.

L'hypoténuse du triangle rectangle est donc environ **6,4 cm**.

Exemple 2:

On sait que l'hypoténuse d'un triangle rectangle vaut 10 cm et qu'un côté de l'angle droit vaut 6 cm et on cherche à connaître la longueur du deuxième côté de l'angle droit.



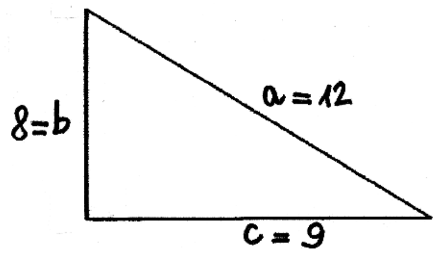
On dénomme par a l'hypoténuse du triangle et par b et c les côtés de l'angle droit: on a a = 10 cm et b = 6 cm et on cherche à calculer c.

Par le théorème de Pythagore, on a $a^2 = b^2 + c^2$. En remplaçant les valeurs que l'on connaît, on obtient $10^2 = 6^2 + c^2$, c'est-à-dire $100 = 36 + c^2$, d'où l'on tire que $c^2 = 100 - 36 = 64$. On obtient alors $c = \sqrt{64} = 8$.

Le deuxième côté de l'angle droit vaut donc **8 cm**.

Exemple 3:

On sait que, dans un triangle, les longueurs des côtés valent 8, 9 et 12 cm et on aimerait savoir s'il s'agit d'un triangle rectangle.



Le côté de 12 cm, étant le plus grand, correspond à l'hypoténuse.

On peut alors nommer les côtés du triangle de la manière suivante: a = 12, b = 8 et c = 9.

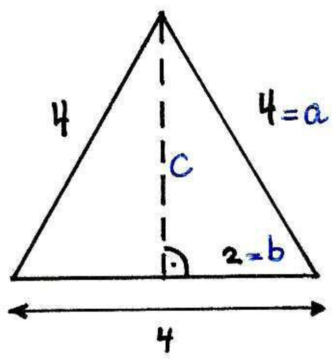
On a alors: $a^2 = 12^2 = 144$ et $b^2 + c^2 = 8^2 + 9^2 = 64 + 81 = 145$. Comme $144 \neq 145$, on n'a pas $a^2 = b^2 + c^2$ et **le triangle n'est pas rectangle**. Si on avait obtenu le même résultat pour a^2 et $b^2 + c^2$, alors le triangle aurait été rectangle.

§ 5. Utilisations du théorème de Pythagore

Le théorème de Pythagore est utilisé dans différentes situations où on a (ou on trouve) un triangle rectangle et où on doit calculer une longueur d'un de ses côtés connaissant les longueurs de deux autres de ses côtés.

Exemple 1:

Quelle est la hauteur d'un triangle équilatéral de 4 cm de côté?



Si on partage en deux un triangle équilatéral par un de ses axes de symétrie, on obtient un triangle rectangle dont l'hypoténuse vaut 4 cm et un des côtés de l'angle droit vaut 4 : 2 cm = 2 cm. Le deuxième côté de l'angle droit est la hauteur du triangle équilatéral.

On peut alors y appliquer le théorème de Pythagore: a = 4 et b = 2. $a^2 = b^2 + c^2$ s'écrit alors $4^2 = 2^2 + c^2$, c'est-à-dire $16 = 4 + c^2$, d'où on obtient $c^2 = 12$, et donc, $c = \sqrt{12} \simeq 3{,}46$.

Ainsi la hauteur du triangle équilatéral vaut environ **3,46 cm**.

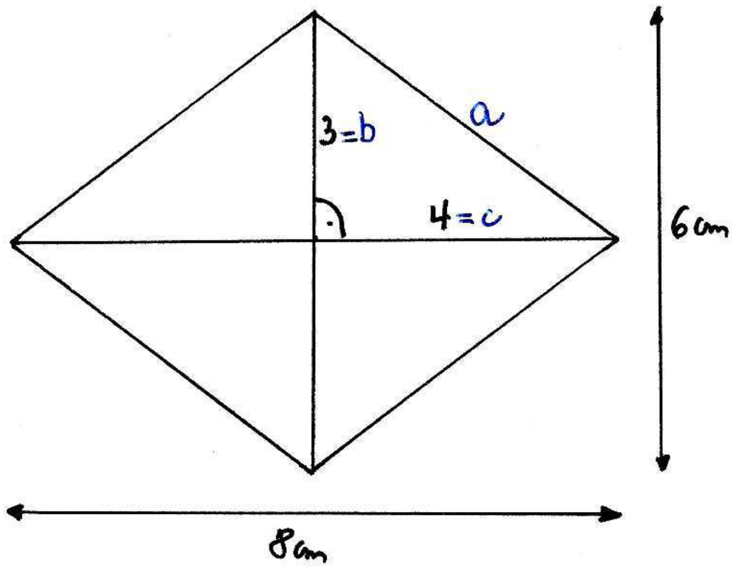
La difficulté réside souvent dans le fait de trouver le triangle rectangle dans lequel on pourra appliquer le théorème de Pythagore.

Exemple 2:

Quel est le périmètre d'un losange dont les diagonales valent 6 et 8 centimètres?

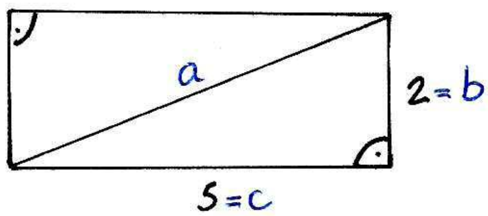
Etant donné que les diagonales d'un losange se coupent perpendiculairement en leurs milieux, le losange et ses diagonales forment quatre triangles rectangles isométriques dont les côtés de l'angle droit valent 3 et 4 centimètres (voir schéma ci-dessous). Dans un de ces triangles rectangles, a sera l'hypoténuse et b et c les côtés de l'angle droit. On pose b = 3 cm et c = 4 cm. On peut alors appliquer le théorème de Pythagore. $a^2 = b^2 + c^2$ s'écrit alors $a^2 = 3^2 + 4^2$, c'est-à-dire $a^2 = 9 + 16$, d'où on obtient $a^2 = 25$, et donc, $a = \sqrt{25}$

= 5. Ainsi le côté du losange est 5 cm, et on en déduit que son périmètre est 4 fois 5 cm = **20 cm**.



Exemple 3:

Calculer la longueur d'une diagonale d'un rectangle dont les côtés valent 2 et 5 centimètres. On remarque tout d'abord que les deux diagonales d'un rectangle sont isométriques. En partageant le rectangle par une de ses diagonales, on obtient deux triangles rectangles isométriques dont les côtés de l'angle droit valent 2 et 5 cm. Dans un de ces triangles rectangles, a sera l'hypoténuse et b et c les côtés de l'angle droit. On pose b = 2 cm et c = 5 cm. On peut alors appliquer le théorème de Pythagore. $a^2 = b^2 + c^2$ s'écrit alors $a^2 = 2^2 + 5^2$, c'est-à-dire $a^2 = 4 + 25$, d'où on obtient $a^2 = 29$, et donc, $a = \sqrt{29} \simeq 5{,}39$ cm. Ainsi la longueur d'une des diagonales du rectangle est **5,39 cm**.

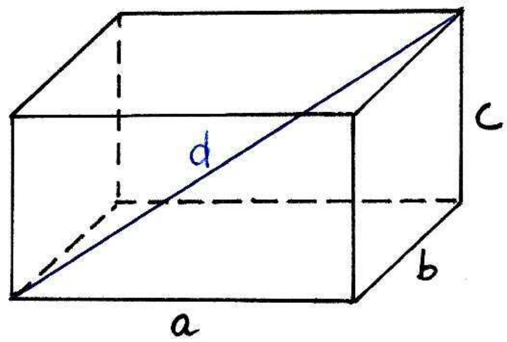


§ 6. Généralisation du théorème de Pythagore dans l'espace

D'après ce que l'on a vu dans l'exemple 3 ci-dessus, le carré de la diagonale d'un rectangle est égal à la somme des carrés des côtés du rectangle ($a^2 = b^2 + c^2$), en application du théorème de Pythagore.

On peut se demander s'il existe une relation similaire pour calculer la diagonale d'un parallélipipède rectangle. Une telle relation existe:

Si on a un parallélipipède rectangle dont les côtés valent a, b et c, la diagonale d de ce solide est donnée par $\mathbf{d^2 = a^2 + b^2 + c^2}$.



Par exemple, si a = 5 cm, b = 3 cm et c = 2 cm, alors la diagonale d du parallélipipède rectangle est donnée par $d^2 = 5^2 + 3^2 + 2^2 = 25 + 9 + 4 = 38$, d'où $d = \sqrt{38} \simeq$ **6,16 cm**.

On a donc ici une **généralisation du théorème de Pythagore à une situation dans l'espace**.