Géométrie

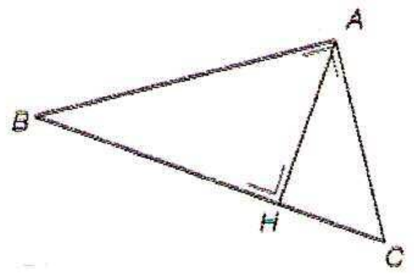
D'autres théorèmes

§ 1. Théorèmes dans les triangles rectangles

En plus du **théorème de Pythagore** (voir chapitre "Théorème de Pythagore"), il y a deux autres théorèmes dans les triangles rectangles: le théorème de la hauteur et le théorème d'Euclide.

Théorème de la hauteur:

Dans tout triangle rectangle comme celui ci-contre, on a: $AH^2 = BH \cdot CH$.



Ainsi, on peut calculer des longueurs dans un triangle rectangle si on connaît certains de ses éléments.

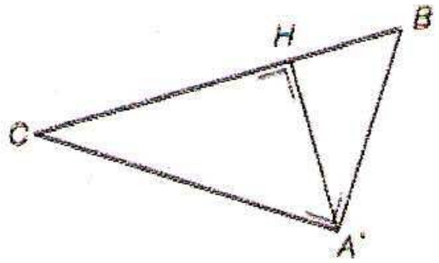
Exemple: Si $BH = 3,2$ et $CH = 1,8$, alors

$AH^2 = BH \cdot CH = 3,2 \cdot 1.8 = 5,76$ et, donc, $AH = \sqrt{5,75} = 2,4$.

Réciproquement, **si, dans un triangle, on a** $AH^2 = BH \cdot CH$**, alors le triangle est un triangle rectangle**.

Théorème d'Euclide:

Dans tout triangle rectangle comme celui ci-contre, on a: $AB^2 = BC \cdot BH$ et $AC^2 = BC \cdot CH$.



Ainsi, on peut calculer des longueurs dans un triangle rectangle si on connaît certains de ses éléments.

Exemple: si $BC = 5$ et $BH = 1,8$, alors

$AB^2 = BC \cdot BH = 5 \cdot 1.8 = 9$, et, donc,

$AB = \sqrt{9} = 3$.

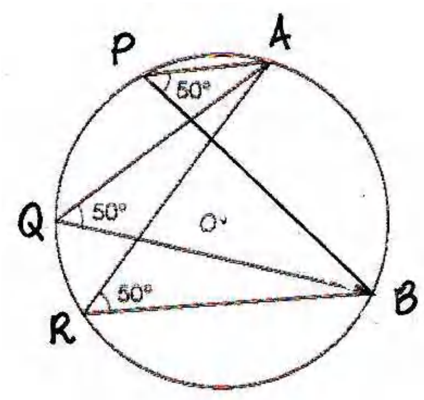
Réciproquement, **si, dans un triangle, on a** $AB^2 = BC \cdot BH$ **et** $AC^2 = BC \cdot CH$**, alors le triangle est un triangle rectangle**.

§ 2. Théorèmes concernant les angles dans des cercles

Il existe des théorèmes qui relient les angles inscrits et les angles au centre dans un cercle.

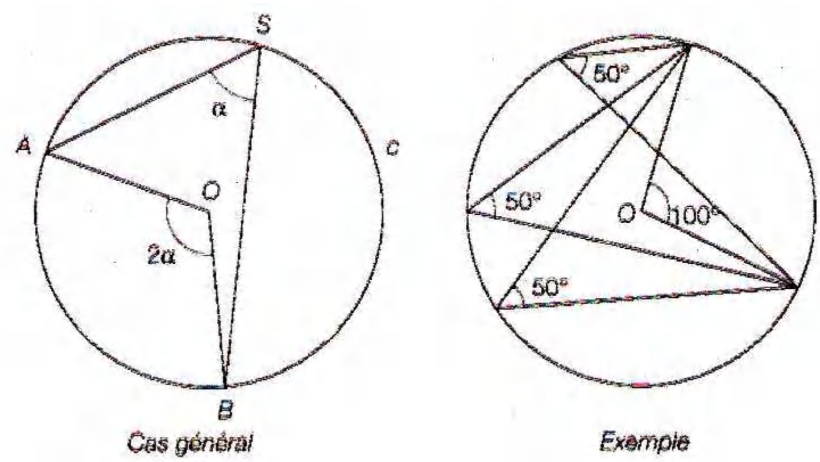
Théorème de l'angle inscrit:

Tous les angles inscrits sur le cercle partant des mêmes points A et B d'un cercle ont la même valeur. Ainsi: $\widehat{APB} = \widehat{AQB} = \widehat{AQC} = \ldots$



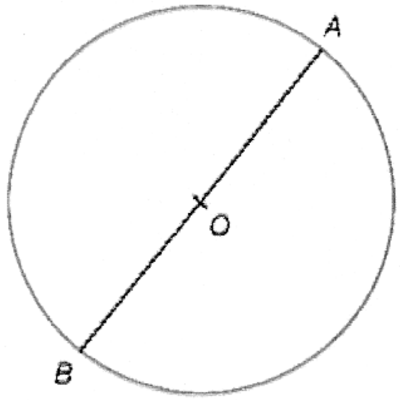
Théorème de l'angle inscrit et de l'angle au centre:

L'angle au centre partant des points d'un cercle est toujours le double de tout angle inscrit partant des mêmes points du cercle:

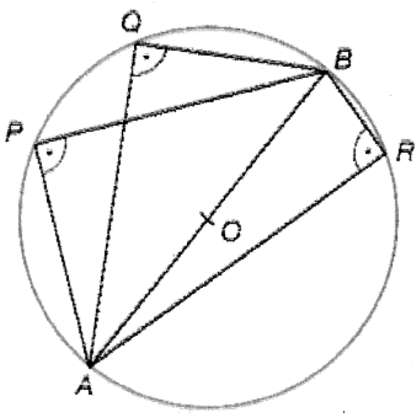


§ 3. Cercle de Thalès

Le **cercle de Thalès** d'un segment AB est le cercle de diamètre AB.



Le **cercle de Thalès** d'un segment AB est l'ensemble des points (à l'exception de A et B) d'où l'on "voit" le segment AB sous un angle droit.



C'est en fait un cas particulier du théorème de l'angle inscrit et de l'angle au centre. En effet, si les points fixés sont les extrémités d'un diamètre du cercle, l'angle au centre à partir de ces deux points vaut 180°, ce qui signifie que tout angle inscrit à partir de ces deux points vaut 90°.

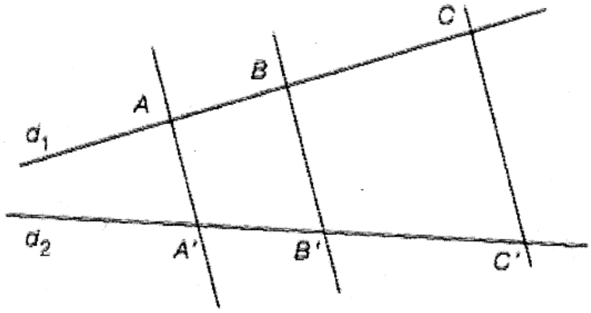
§ 4. Théorème de Thalès

Cas général:

Des parallèles déterminent sur des sécantes des segments proportionnels.

Exemples

$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$ $\qquad$ $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$



Les droites AA' , BB' et CC' sont parallèles.
Les droites d_1 et d_2 sont sécantes.

Cas particulier:

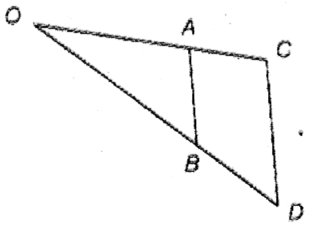
Dans cette figure, plusieurs rapports sont égaux.

Exemples

$\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} = \frac{CD}{AB}$ $\qquad$ $\frac{AC}{OA} = \frac{BD}{OB}$

$\frac{AC}{OC} = \frac{BD}{OD}$ $\qquad$ $\frac{OC}{OD} = \frac{OA}{OB}$

$\frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CD}$ $\qquad$ $\frac{AB}{OB} = \frac{CD}{OD}$



Les segments AB et CD sont parallèles.

Le triangle OAB a pour image le triangle OCD par l'homothétie de centre O et de rapport $k = \frac{OC}{OA}$,

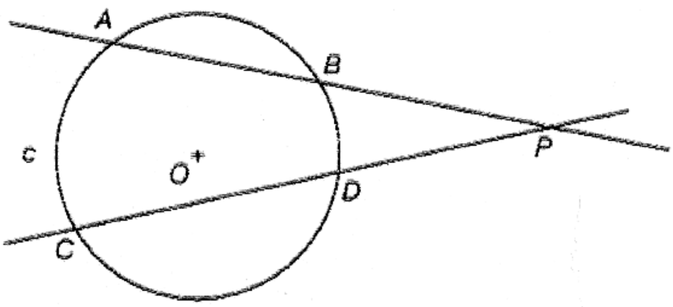
$$OAB \xrightarrow{\mathcal{H}(O\,;\,k)} OCD$$

On obtient les dimensions du triangle OCD en multipliant celles de OAB par le nombre k.

Les dimensions correspondantes de chaque triangle sont proportionnelles.

§ 5. Théorème du produit constant

On considère deux sécantes non parallèles AB et CD d'un cercle c, autrement dit deux droites non parallèles coupant le cercle, la première en A et B et la deuxième en C et D. Ces deux sécantes se coupent au point P:



On a alors:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

Ce produit ($PA \cdot PB$ ou $PC \cdot PD$) est appelé **puissance du point** P par rapport au cercle c.

Il est à remarquer que le point P peut être à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle.

Exemple: On doit calculer la longueur du segment AB, sachant que $CD = 8\ cm$, $PD = 6\ cm$ et $PB = 7\ cm$.

On a: $AB(PA - PB = PA - 7$;

$PA \cdot PB = PC \cdot PD$, et, donc,

$PA = \frac{PC \cdot PD}{PB} = \frac{(CD+PD) \cdot PD}{PB} = \frac{(8+6) \cdot 6}{7} = \frac{14 \cdot 6}{7} = 2 \cdot 6 = 12.$

Ainsi, $AB = PA - 7 = 12 - 7 = 5\ cm.$