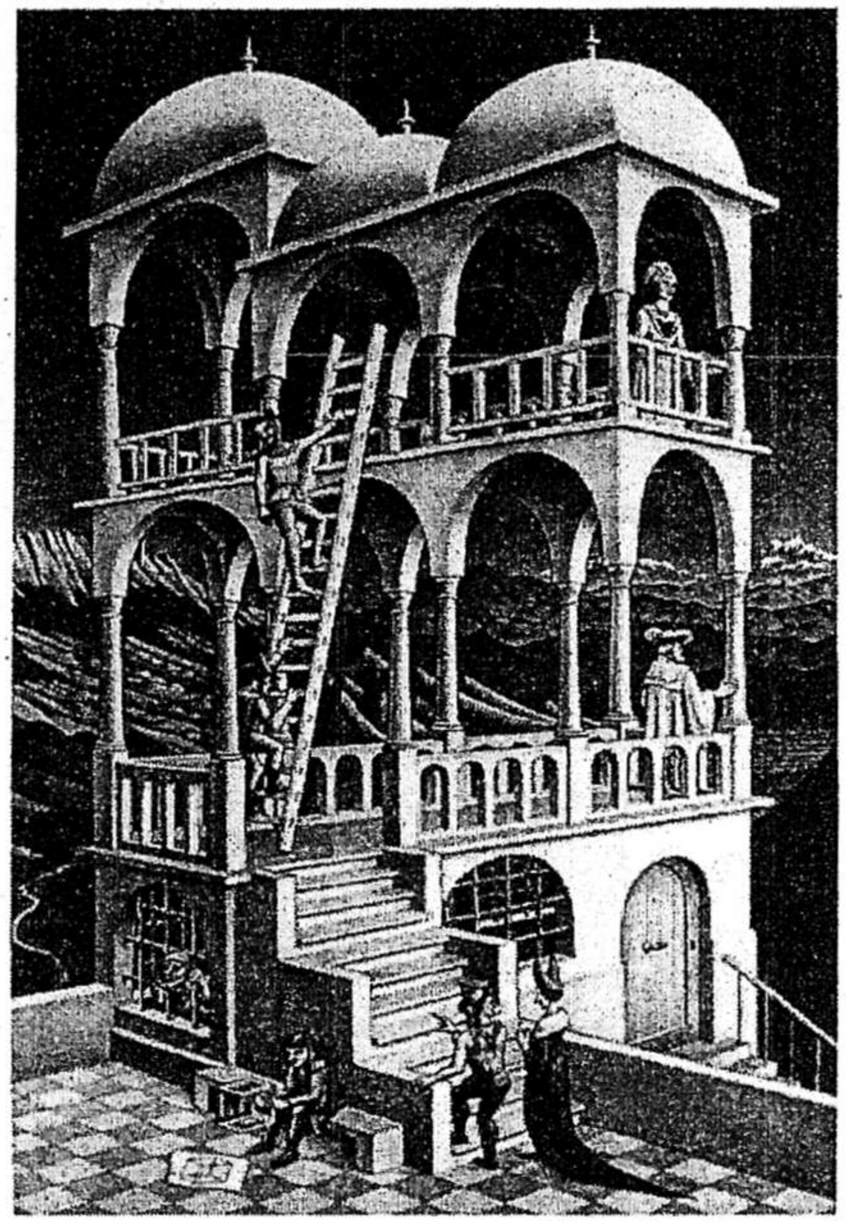
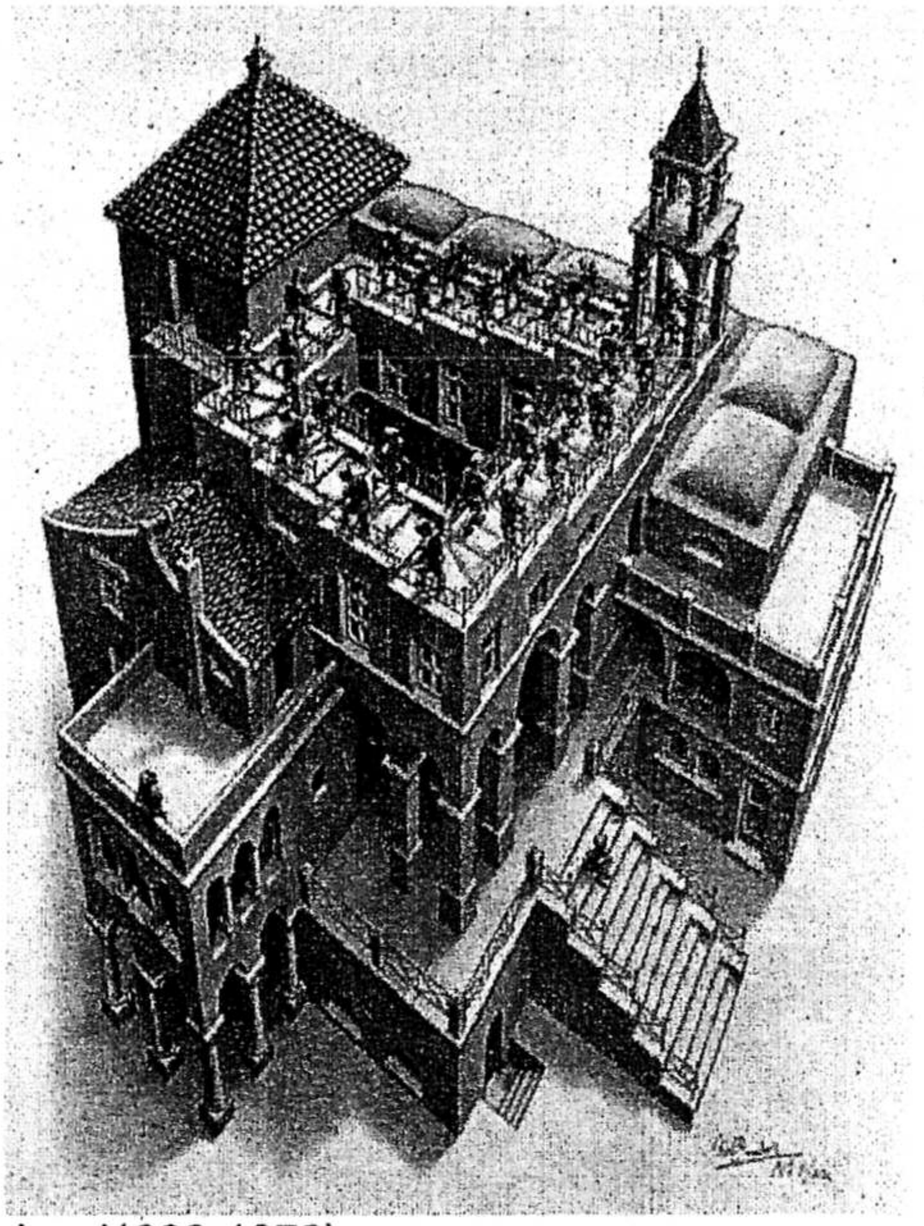
Géométrie à 3 dimensions

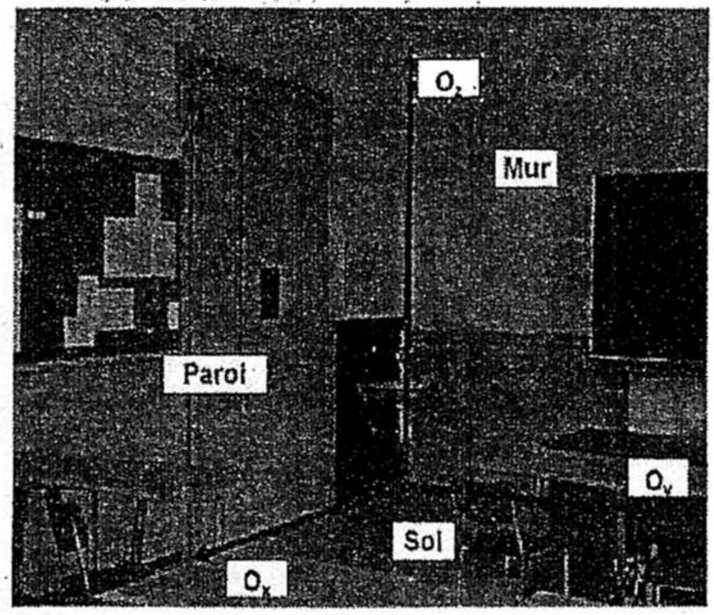




Maurits Cornelis Escher (1898-1972)

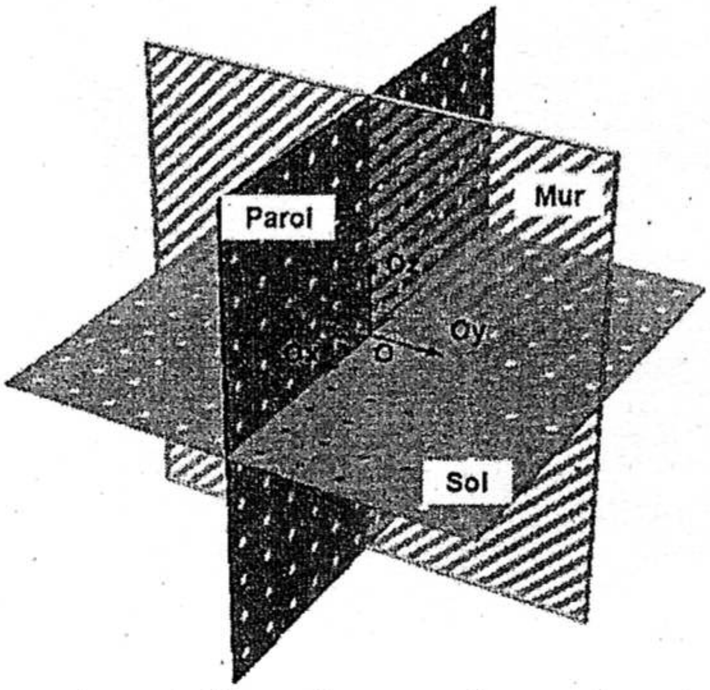
§A PRÉAMBULE

Pour ce chapitre, on estime connues les notions vues dans l'espace à 2 dimensions, notamment la notion de point, de vecteur, de droite, d'indépendance linéaire, de base et de repère orthonormé ainsi que la notion de plan.

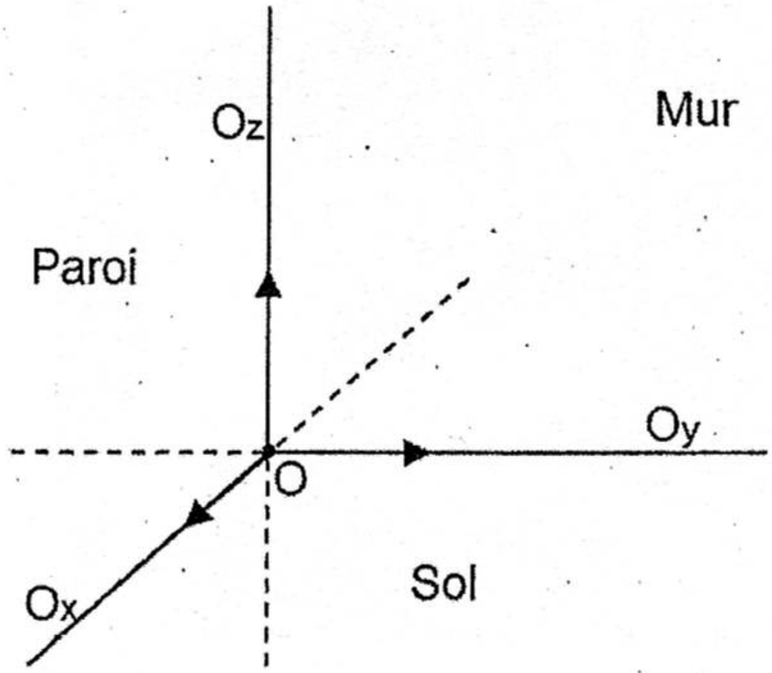


Par soucis de simplification, nous n'aborderons que la géométrie à 3 dimensions basées sur 3 vecteurs orthogonaux que nous nommerons $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$.

A l'aide d'un point fixe, noté O et nommé origine, nous pouvons définir 3 axes, Ox, Oy et Oz.

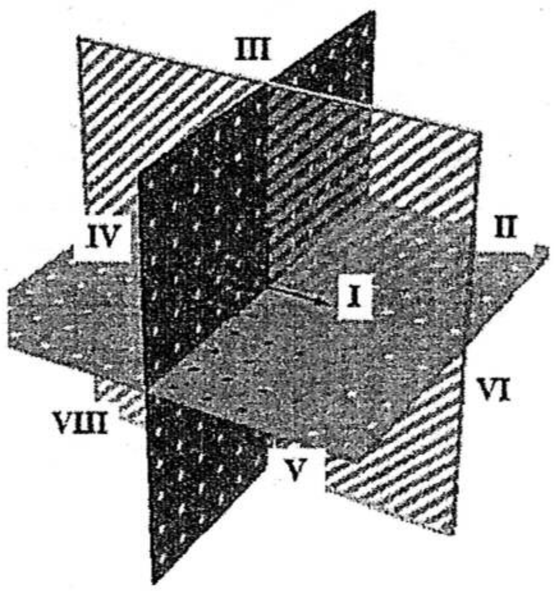


Représentation d'un repère orthonormé 3D à l'aide du logiciel Cabri 3D. Bien entendu, il s'agit d'une représentation en 2D.



Représentation d'un repère orthonormé 3D à l'aide du "papier-crayon". Bien entendu, il s'agit d'une représentation en 2D.
ATTENTION : Dans cette représentation, le parallélisme est conservé, pas les angles

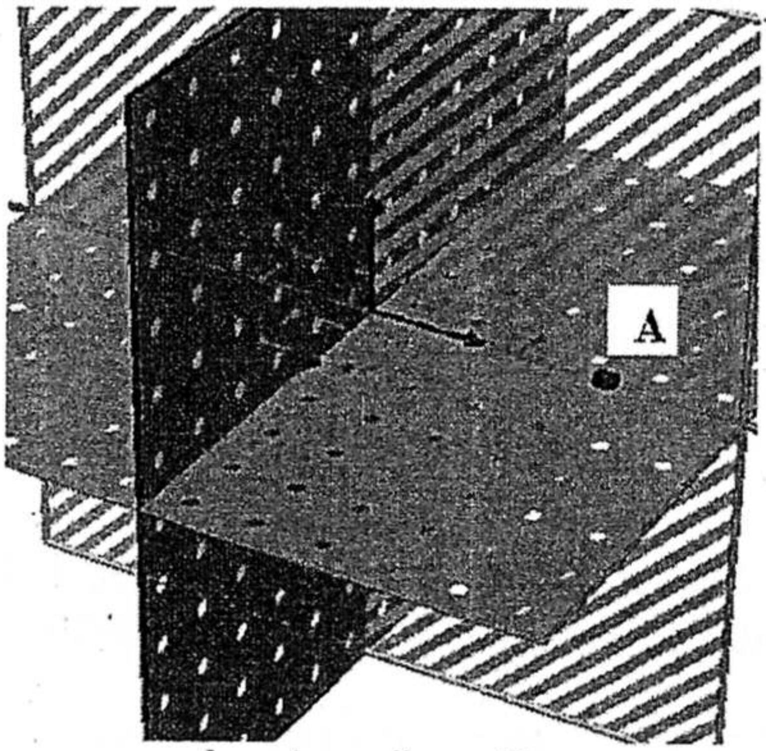
On appelle "**Sol**", l'ensemble des points P tels que $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}$ où $x,y \in \mathbb{R}$, les coordonnées de P sont P(x;y;0).
On appelle "**Mur**", l'ensemble des points P tels que $\overrightarrow{OP} = y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}$ où $y,z \in \mathbb{R}$, les coordonnées de P sont P(0;y;z).
On appelle "**Paroi**", l'ensemble des points P tels que $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{e_1} + z\overrightarrow{e_3}$ où $x,z \in \mathbb{R}$, les coordonnées de P sont P(x;0;z).
Ces 3 ensembles sont appelés **plans de référence**.



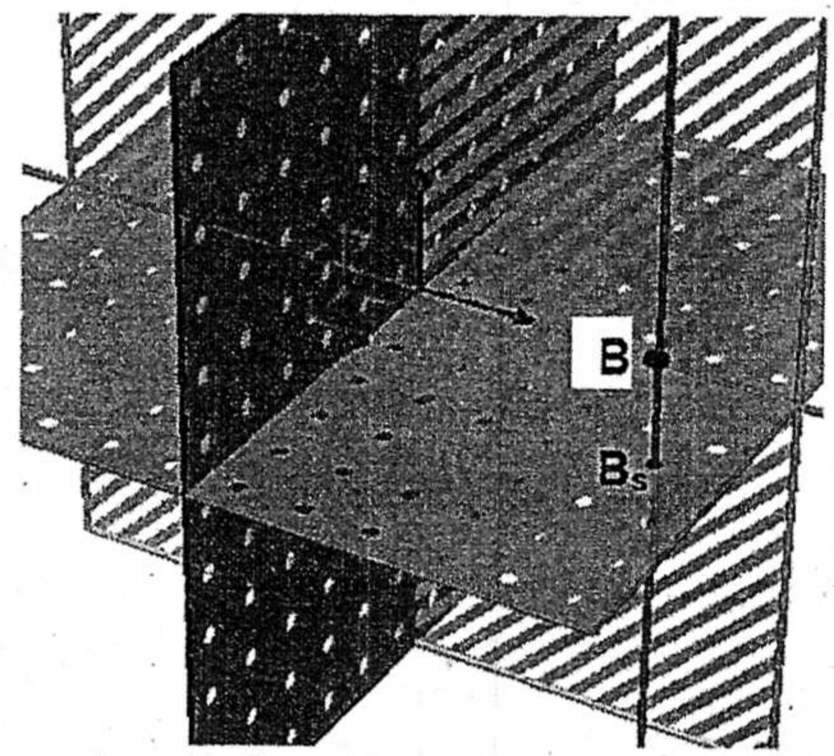
L'espace, par ces 3 plans de référence est divisé en 8 **octants**

§B REPRÉSENTATION D'UN POINT

En observant les 2 points ci-dessous, on voit que pour A sur l'axe Oy et pour B, légèrement en dessus du sol, leur représentation sur la feuille de papier les placent apparemment au même endroit.

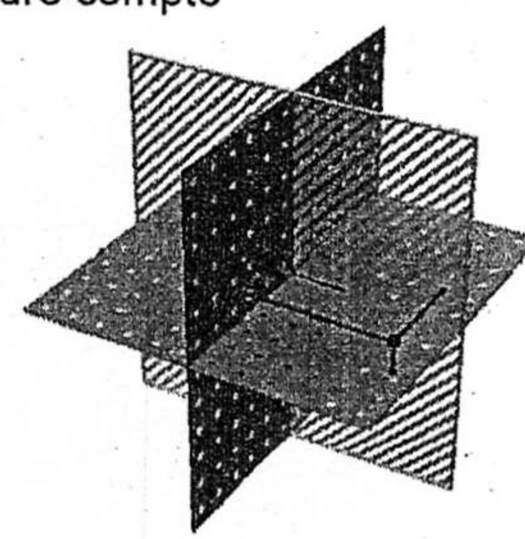


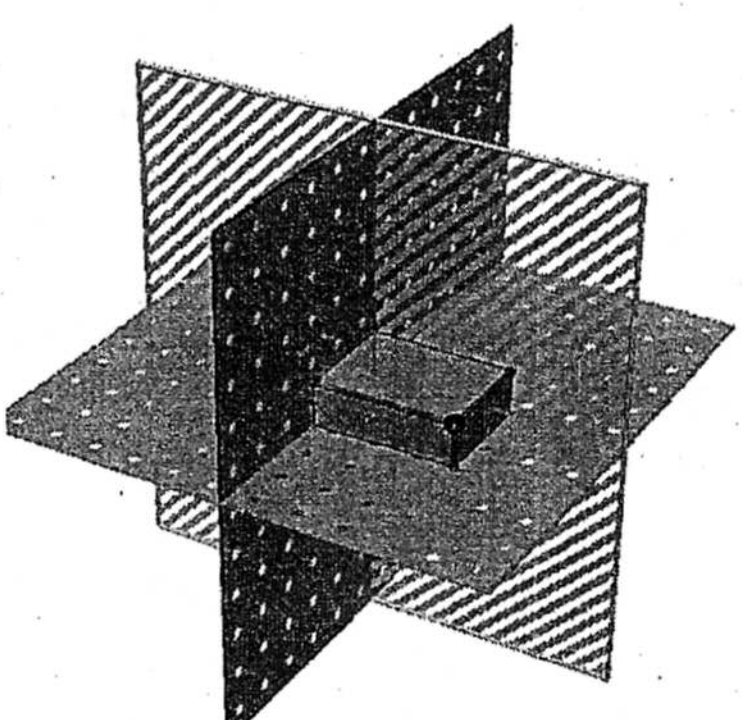
A est sur l'axe Oy

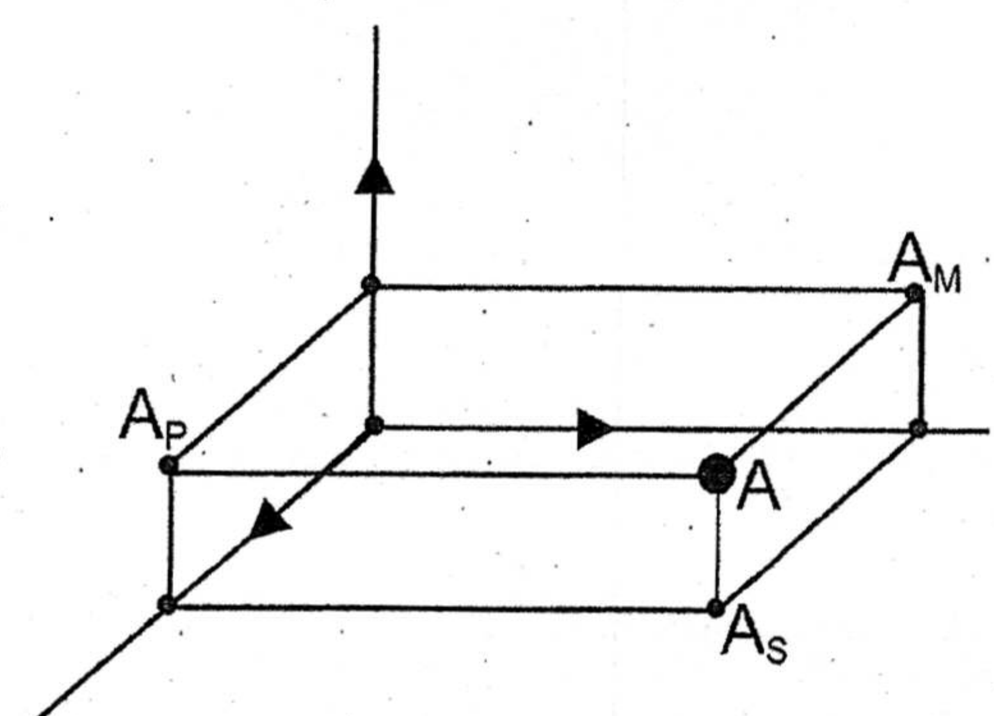


B est en-dessus du sol; Sa projection Bs aide à s'en rendre compte

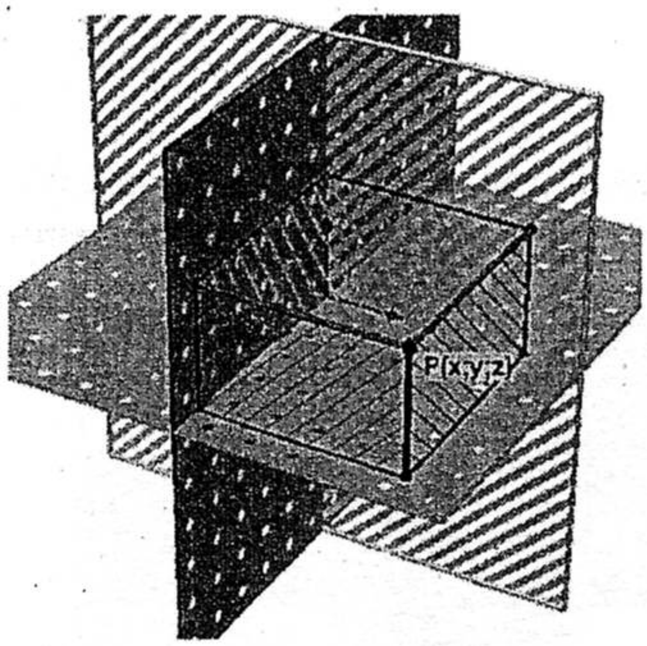
Il n'est pas possible de représenter un point en 3D par un seul point sur le papier (le papier est en 2D). On représente donc un point en 3D à l'aide l'une de ses **projections** dans un des 3 plans de référence. La projection du point B dans le sol se note Bs et est l'intersection de la droite parallèle à Oz passant par B et le sol.
Chaque point a donc 3 projections notées à l'aide des indices "M", "P" et "S", donc A_M, A_P et A_S pour le point A







On peut créer un parallélépipède rectangle dit **parallélépipède de construction** pour chaque point, les 8 sommets étant l'origine, le point lui-même, ses projections dans les plans de référence et sur les axes (qui sont en fait les projections de ses projections).

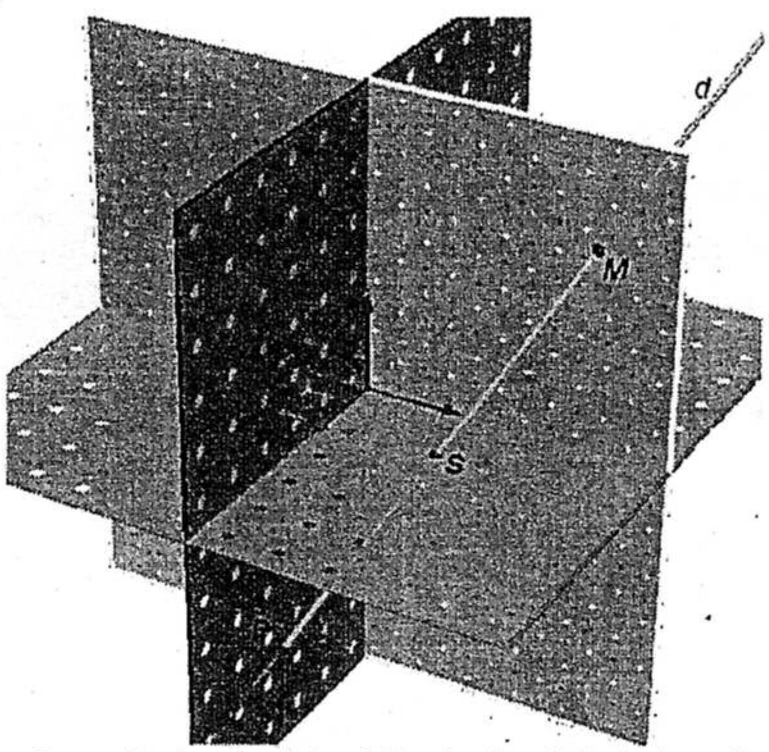


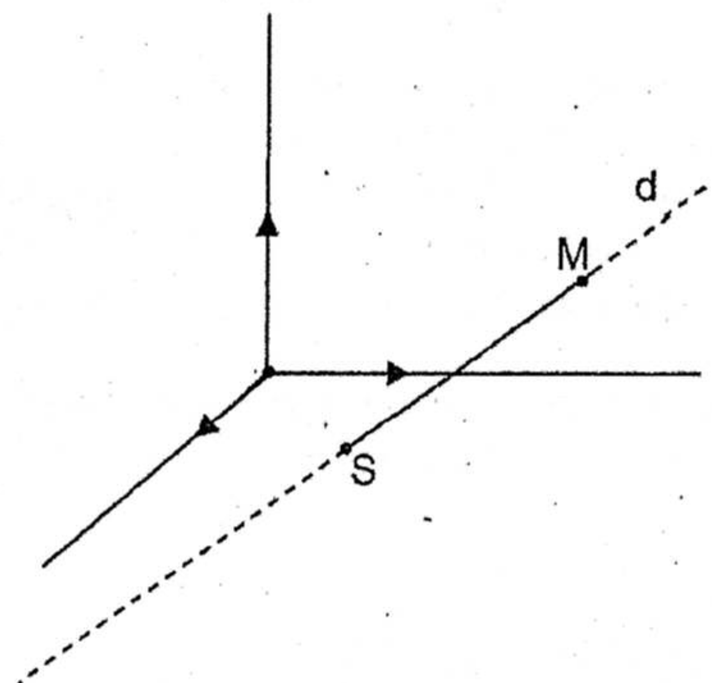
Par analogie avec la géométrie 2D, tout point P(x;y;z) engendre un rayon- vecteur $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}$ que l'on note $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

x,y,z sont les **<u>coordonnées</u>** du point P et les **<u>composantes</u>** du vecteur $\overrightarrow{OP}$.

§C REPRÉSENTATION D'UNE DROITE

Pour que la représentation d'une droite sur papier soit univoque, il faut que 2 de ses points soient représentés sans ambigüité. L'utilisation des **<u>traces</u>** d'une droite permet de représenter avantageusement une droite.
(<u>Définition</u> : les **<u>traces</u>** d'une droite sont les intersections de la droite et des plans de référence, on les note M, P et S)





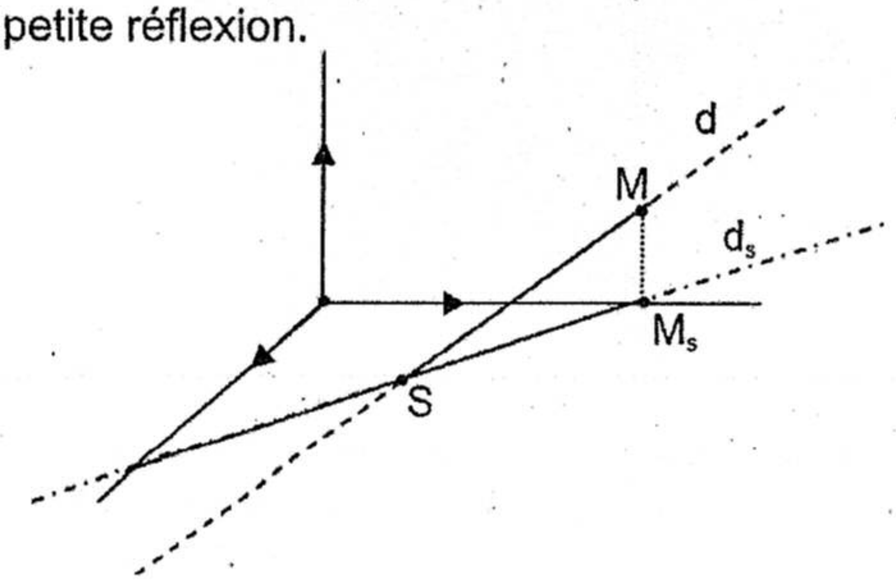
Avec les choix de M et S, le logiciel dessine d et place P.

Avec les choix de M et S, comment placer P ?

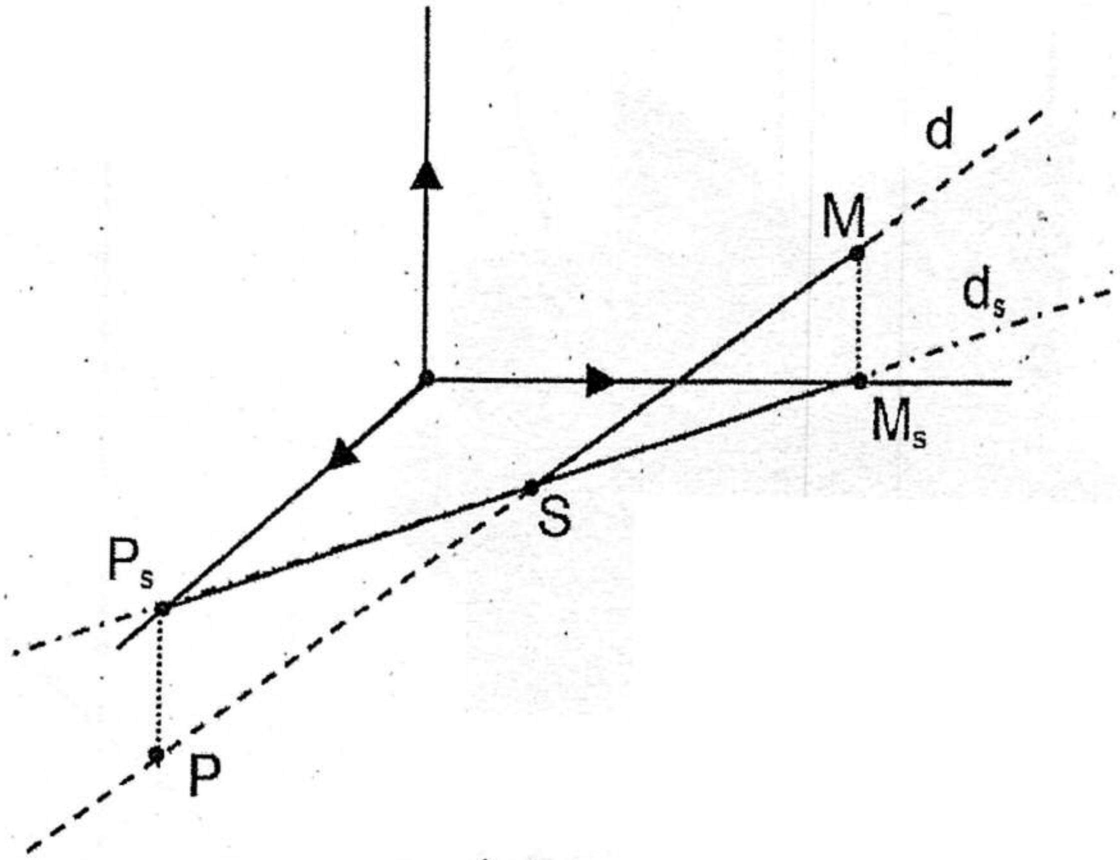
Comme on le voit sur la représentation "papier-crayon" ci-dessus, la question de la position de la 3ème trace à partir des 2 premières nécessite une petite réflexion.
Il faut d'abord définir la notion de projection de droite.

La **<u>projection d'une droite</u>** d dans le sol, notée d_s est la droite formée de la projection dans le sol des points de la droite d, dans l'exemple ci-dessus, il n'est pas difficile de positionner M_s et S_s (S_s = S !!) et donc de dessiner la projection d_s .

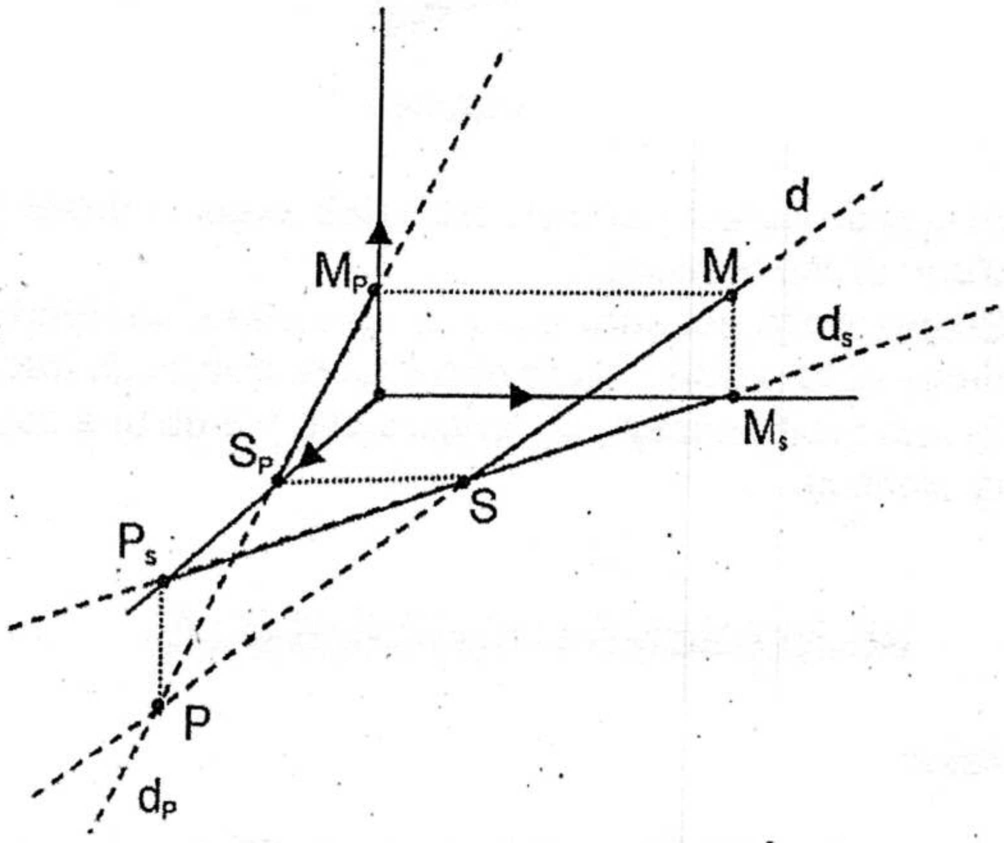
<u>NB</u> : Toute partie de droite non située dans le premier octant est **traitillée**.



L'intersection de d_s avec Ox est P_s et celle avec Oy est M_s. P_s permet de positionner P



NB : Bien entendu, on peut aussi définir la projection d'une droite dans le mur et dans la projection d'une droite dans la paroi. Pa exemple pour d_p, il faut positionner 2 points parmi M_p, S_p et P

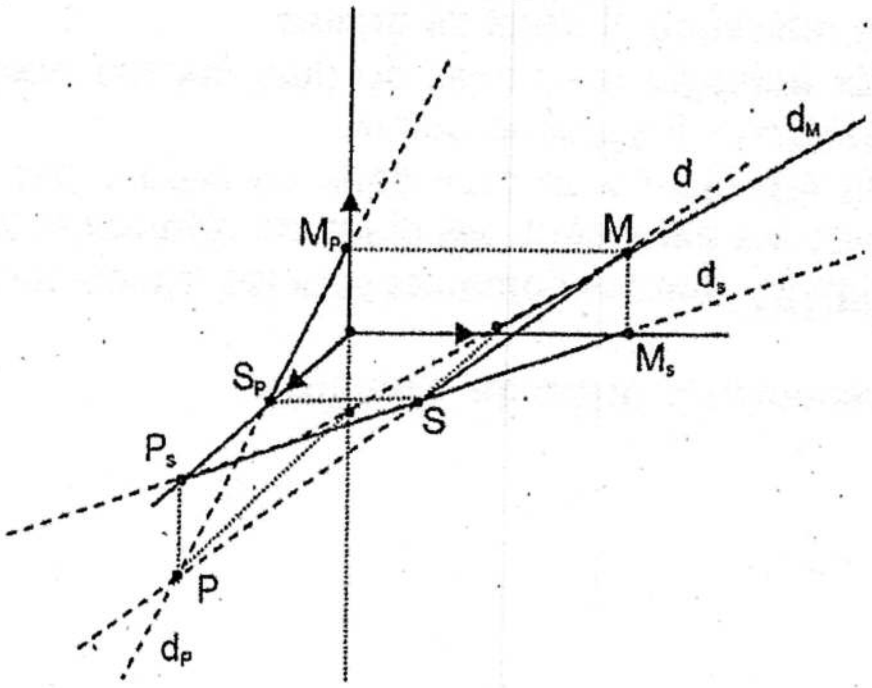


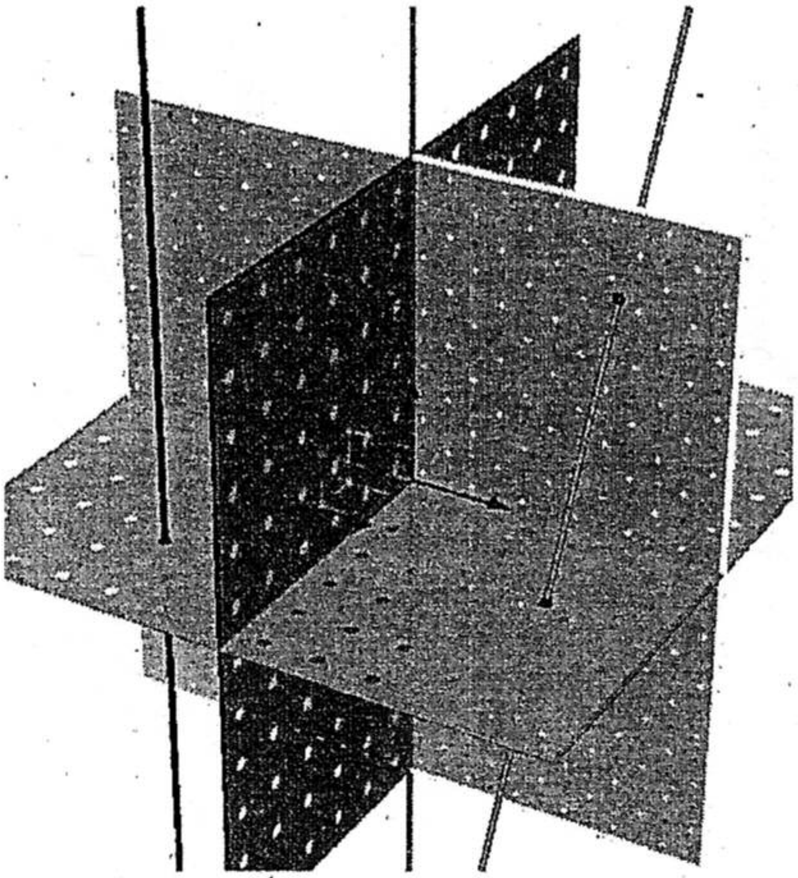
Il n'est pas souhaitable de représenter sur un même dessin une droite d avec ces 3 projections

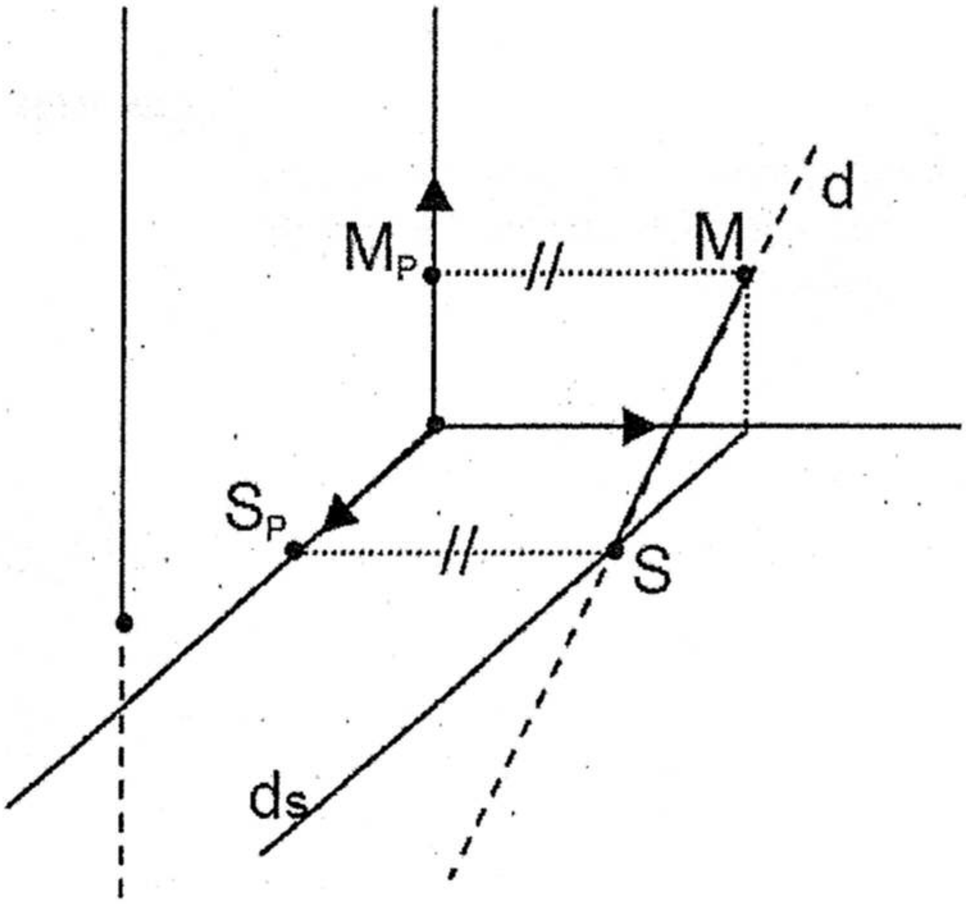
Il n'en demeure pas moins qu'il faut se souvenir que :

- Les projections des traces d'une droite sont sur les axes.
- Une droite coupe ses projections en ses traces

et être capable d'appliquer ces 2 principes avec n'importe lequel des 3 plans de référence.







Quelques cas particuliers de droites :

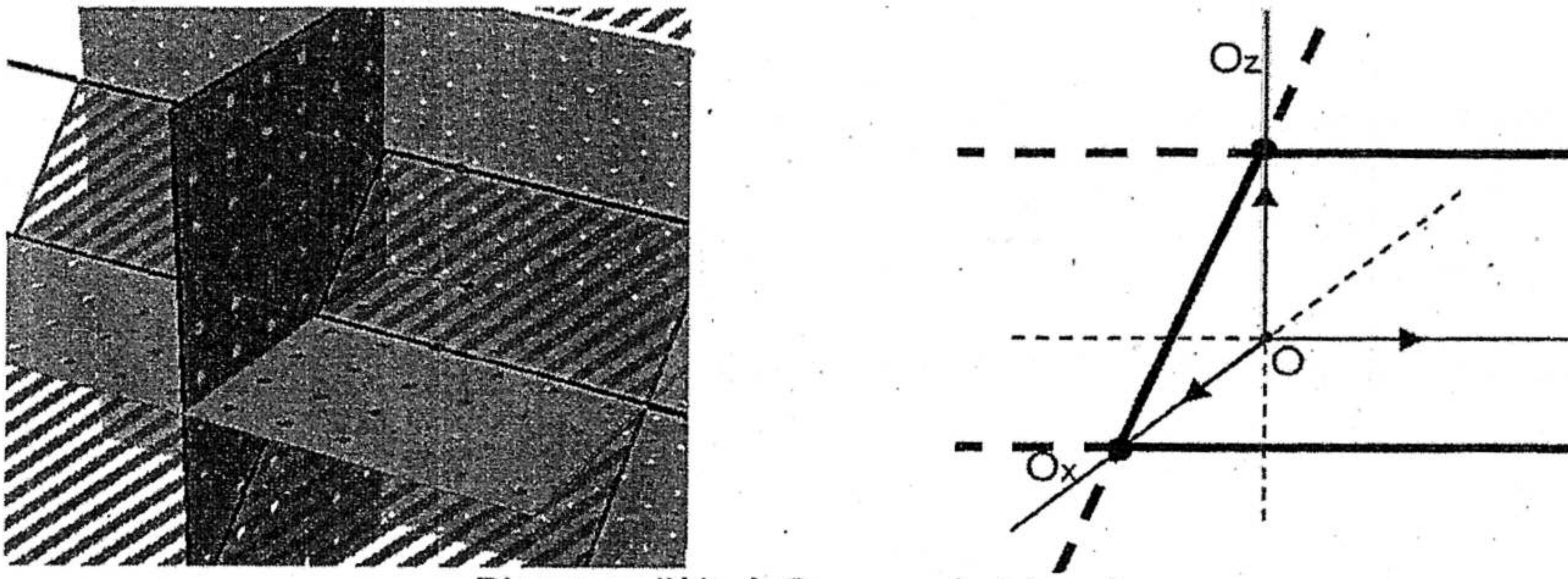
- Si une droite est parallèle à un des axes, la droite n'a alors qu'une trace (ci-dessus, cas d'une droite verticale)
- Si une droite est parallèle à un des plans de référence (ci-dessus pas d'intersection entre la droite et la paroi) , la droite n'a alors que deux traces.
- Si une droite passe par l'origine elle n'a qu'une seule trace (L'origine !!), cas non représenté ci- dessus.

§D REPRÉSENTATION D'UN PLAN

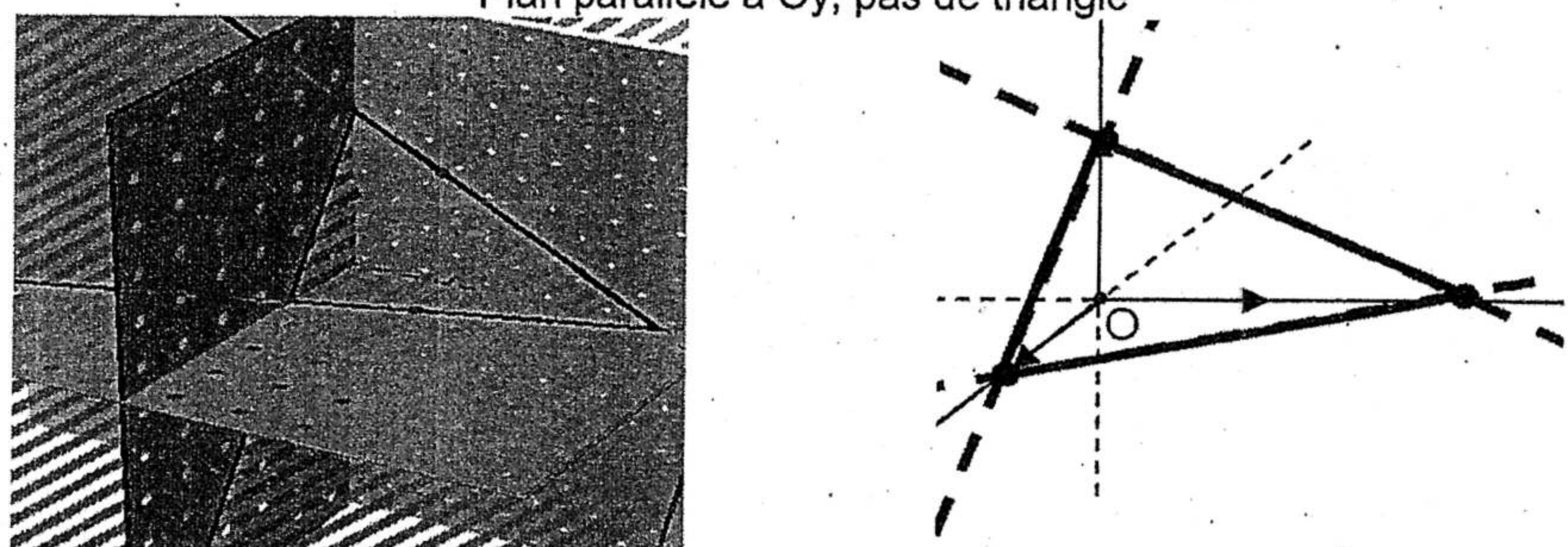
Définition :

On appelle **traces du plan** dans les plans de référence les intersections du plan avec les plans de référence. Il s'agit de droites
Par analogie les traces du plan sur les axes sont les intersections du plan avec les axes de référence. Il s'agit de points.
On représente un plan dans un repère par ses traces. S'il n'y a pas de parallélisme du plan avec les axes et/ou les plans de référence, les 3 traces dans les plans de référence forment un triangle dont les sommets sont les traces sur les axes

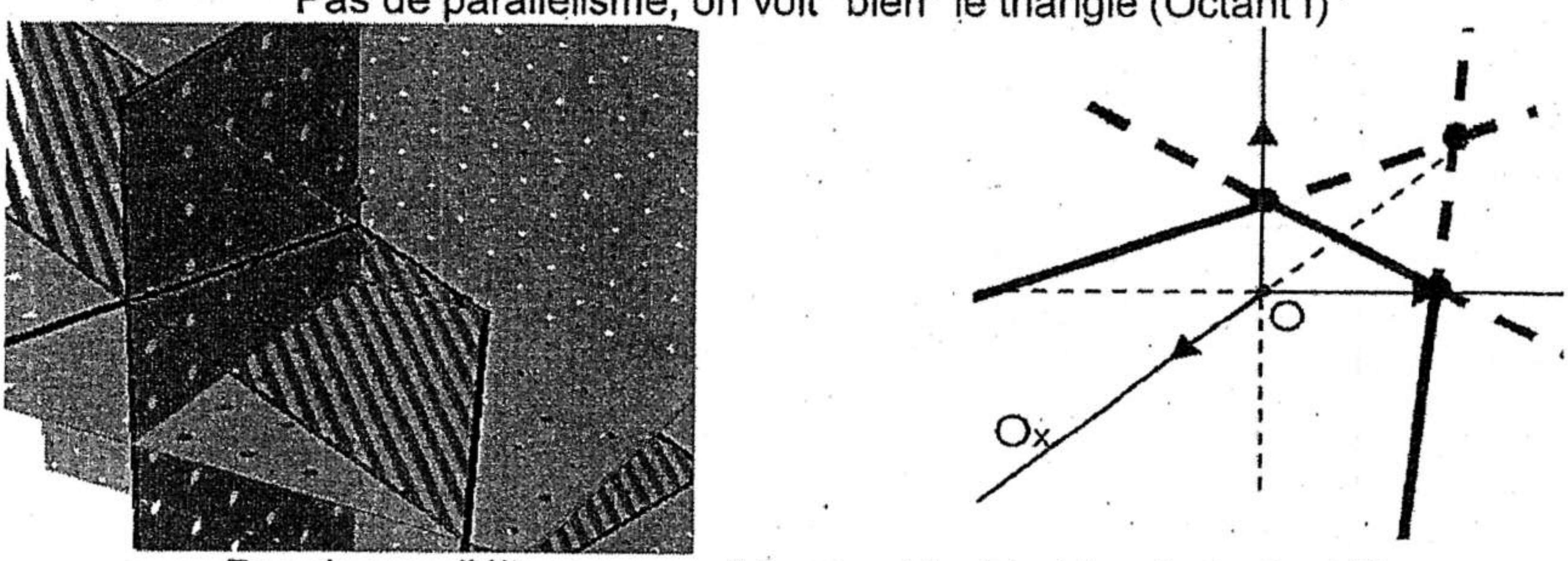
Découvrons quelques exemples ...



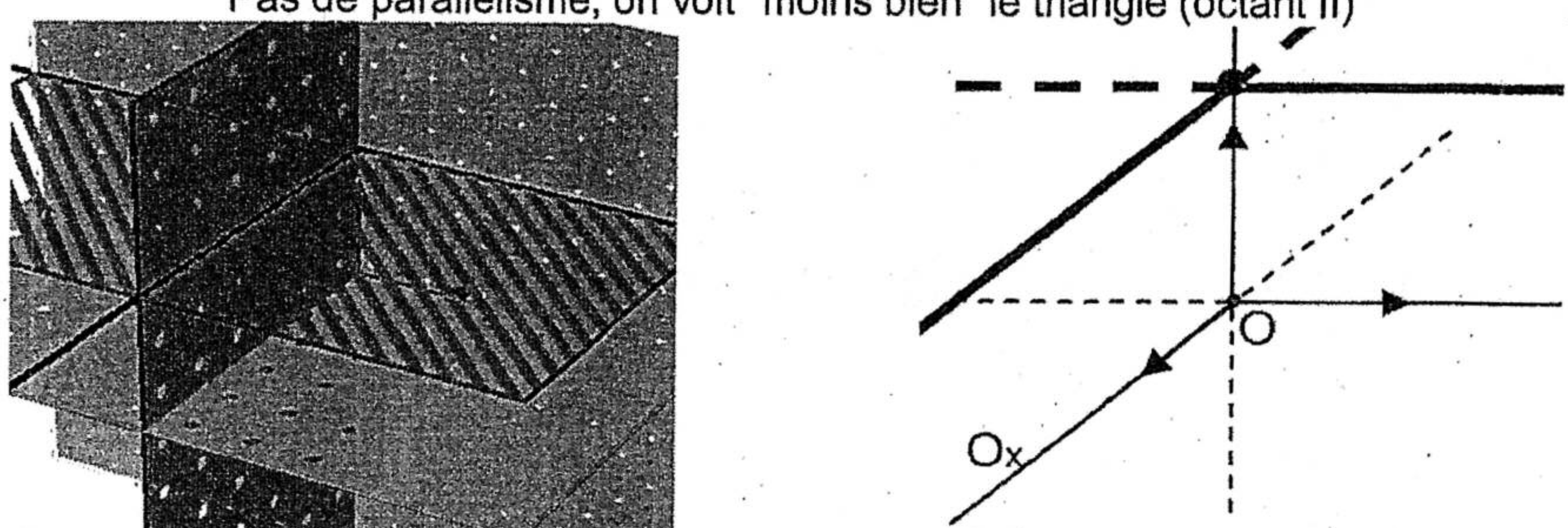
Plan parallèle à Oy, pas de triangle



Pas de parallélisme, on voit "bien" le triangle (Octant I)



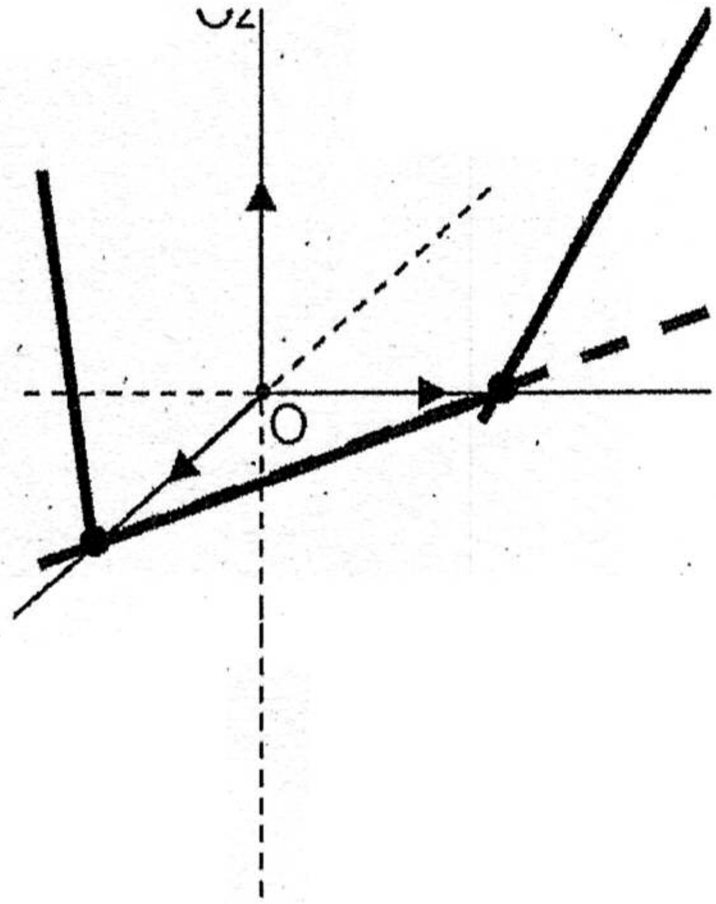
Pas de parallélisme, on voit "moins bien" le triangle (octant II)



Plan horizontal (parallèle au sol), pas de triangle

La représentation partielle des "traces" peut induire en erreur. Par exemple, ci-contre on peut penser que les 3 droites sont les traces d'un plan ....
Ce qui n'est pas le cas !!

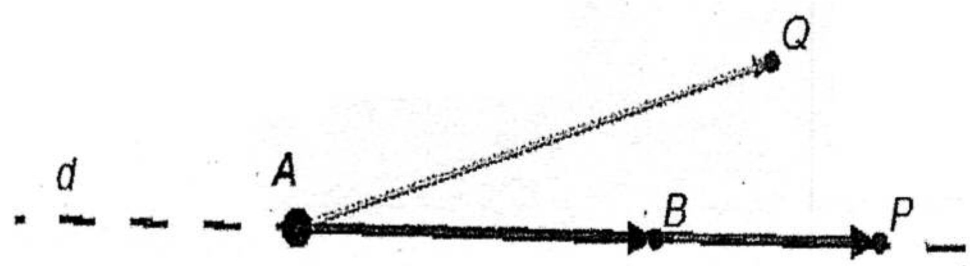
Il est laissé au lecteur le soin d'en découvrir la raison



§E EQUATIONS

1. Droite

Définition :



Soit A et B 2 points.
Soit $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$

On appelle **droite** contenant A et B l'ensemble des points P tels que :

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \cdot \vec{v} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \ .$$

NB : On dit $\overrightarrow{AP}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** ou parallèles
On note généralement une droite à l'aide de la lettre d

Par Chasles, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$ et donc :

$$\boxed{P \in d \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \ \text{ tel que } \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{v}}$$ *(équation paramétrique vectorielle de d)*

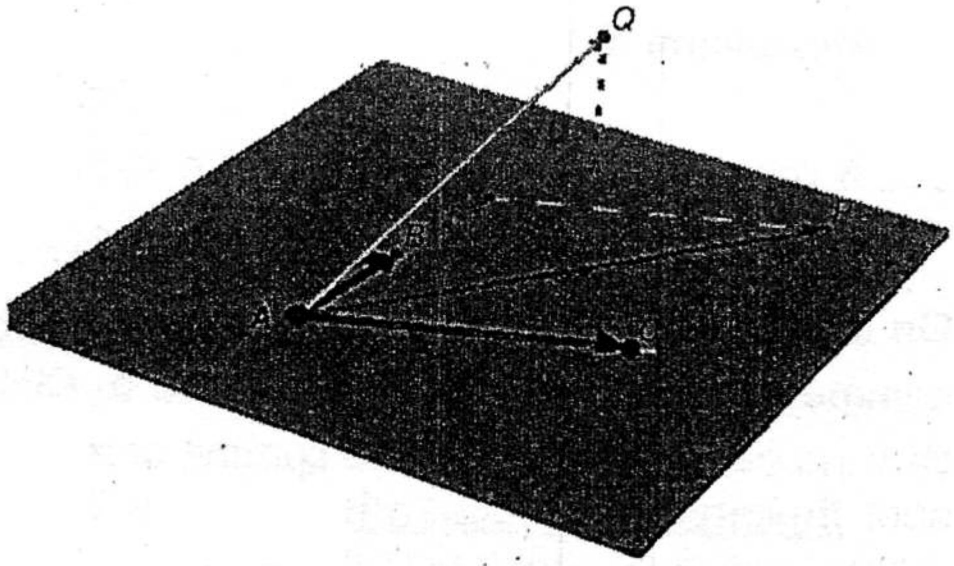
Observons qu'avec un point Q n'appartenant pas à d on ne peut pas écrire $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{v}$.

On définit la droite d par 3 **équations paramétriques** scalaires ; $\boxed{d: \begin{cases} x = a_1 + \lambda \cdot v_1 \\ y = a_2 + \lambda \cdot v_2 \\ z = a_3 + \lambda \cdot v_3 \end{cases}}$

où :

- $P(x;y;z)$ est le point variable de d,
- $A(a_1;\, a_2;\, a_3)$ est un point donné de d,
- $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ est un vecteur donné parallèle à d

2. Plan



Définition :

Soit A; B et C, 3 points non alignés.
Soit $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$.

On appelle **plan** contenant A,B et C l'ensemble des points P tels que :

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w} \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

NB : On dit : Les 3 vecteurs $\overrightarrow{AP}, \vec{v}, \vec{w}$ sont **coplanaires**
On note généralement les plans à l'aide de la lettre π

Par Chasles, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$ et donc :

$$\boxed{P \in \pi \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ tels que } \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w}}$$ *(équation paramétrique vectorielle de π)*

Observons qu'avec un point Q n'appartenant pas à π on ne peut écrire $\overrightarrow{AQ} = \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w}$.

On définit le plan π par 3 **équations paramétriques** scalaires ; $\boxed{\pi : \begin{cases} x = a_1 + \lambda \cdot v_1 + \mu \cdot w_1 \\ y = a_2 + \lambda \cdot v_2 + \mu \cdot w_2 \\ z = a_3 + \lambda \cdot v_3 + \mu \cdot w_3 \end{cases}}$

où :

- $P(x;y;z)$ est le point variable de π,
- $A(a_1; a_2; a_3)$ est un point donné de π,
- $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ est un vecteur donné parallèle à π *("parallèle à un segment AB inclus dans π")*
- $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ est un vecteur donné parallèle à π *("parallèle à un segment AC inclus dans π")*

Remarque :

On constate qu'il y a une inconnue de plus que d'équations (4 contre 3) pour les équations paramétriques de la droite et deux inconnues de plus que d'équations (5 contre 3) pour les équations paramétriques du plan. On parle de **degré de liberté**, il y a 1 degré de liberté pour la droite : la droite est un ensemble à 1 dimension; alors qu'il y a 2 degrés de liberté pour le plan : le plan est un ensemble à 2 dimensions.

3. Déterminant d'ordre 3

Soit 3 vecteurs $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ et $\vec{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$

On dit que $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont **linéairement dépendants** si et seulement si $\vec{c}$ peut être exprimé comme combinaison linéaire de $\vec{a}$ et de $\vec{b}$, Ces vecteurs sont alors coplanaires.

Si $\vec{c}$ ne peut pas être exprimé comme combinaison linéaire de $\vec{a}$ et de $\vec{b}$, on dit que $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont **linéairement indépendants** . Ces 3 vecteurs forment alors une **base** de l'espace à 3 dimensions et ne sont pas coplanaires

La notion de dépendance linéaire *(ou d'indépendance linéaire)* est fondamentale en géométrie : elle détermine la dimension de l'espace dans lequel on travaille. Le fait qu'il est possible de trouver au maximum 3 vecteurs linéairement indépendants dans l'espace définit que l'espace est à 3 dimensions.

Pour déterminer si 3 vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont linéairement dépendants ou indépendants il faut trouver α et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{c}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b}$. Si cela est possible les 3 vecteurs sont linéairement dépendants, sinon, ils sont linéairement indépendants.

On peut montrer que le nombre $a_1\cdot b_2\cdot c_3+b_1\cdot c_2\cdot a_3+c_1\cdot a_2\cdot b_3-a_3\cdot b_2\cdot c_1-b_3\cdot c_2\cdot a_1-c_3\cdot a_2\cdot b_1$ permet de répondre à la question "$\vec{c}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b}$ a-t-elle une solution ?".

Ce nombre est appelé **déterminant** de $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ et est noté $D\left(\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right)$.

Pour ce souvenir de ce nombre, on utilise le schéma ci-dessous (règle de Sarrus) :

$$-a_3b_2c_1 \quad -b_3c_2a_1 \quad -c_3a_2b_1 \quad \Big\} = -a_3\cdot b_2\cdot c_1-b_3\cdot c_2\cdot a_1-c_3\cdot a_2\cdot b_1$$

$$D\left(\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}\underset{\text{notation}}{=}\begin{matrix}a_1&b_1&c_1&a_1&b_1\\a_2&b_2&c_2&a_2&b_2\\a_3&b_3&c_3&a_3&b_3\end{matrix}$$

$$+c_1a_2b_3 \quad +b_1c_2a_3 \quad +a_1b_2c_3 \quad \Big\} = a_1\cdot b_2\cdot c_3+b_1\cdot c_2\cdot a_3+c_1\cdot a_2\cdot b_3$$

$$\Rightarrow \boxed{D\left(\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right) = a_1\cdot b_2\cdot c_3+b_1\cdot c_2\cdot a_3+c_1\cdot a_2\cdot b_3-a_3\cdot b_2\cdot c_1-b_3\cdot c_2\cdot a_1-c_3\cdot a_2\cdot b_1}$$

Se souvenir :

$$\boxed{D\left(\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right)\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\left(\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right) \text{ est une base}\\ \vec{a};\vec{b};\vec{c} \text{ sont linéairement indépendants}\\ \vec{a};\vec{b};\vec{c} \text{ ne sont pas coplanaires}\end{cases}}$$

<u>NB</u>: On peut montrer $\left|D\left(\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right)\right|$ est le volume du parallélépipède engendré par $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$.

4. Equation cartésienne d'un plan

Soit un plan π donné (comme ci-dessus) par 3 de ses points (non alignés) A; B et C.
On construit les vecteurs $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$

On a $P \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires donc : $\boxed{P \in \pi \Leftrightarrow D\left(\overrightarrow{AP}; \vec{v}; \vec{w}\right) = 0}$

Equation cartésienne du plan π

<u>Exemple</u> de recherche d'une équation cartésienne :
Soit le plan π contenant les points A(1;3;2), B(2;5;0) et C(2;-1;3)

- $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $D\left(\overrightarrow{AP}; \vec{v}; \vec{w}\right) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y-3 & 2 & -4 \\ z-2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} x-1 & 1 \\ y-3 & 2 \\ z-2 & -2 \end{matrix} = 2(x-1) - 4(z-2) - 2(y-3) - 2(z-2) - 8(x-1) - (y-3)$

$\Rightarrow D\left(\overrightarrow{AP}; \vec{v}; \vec{w}\right) = -6(x-1) - 6(z-2) - 3(y-3) = -6x - 3y - 6z + 27 = 0$

$\Rightarrow$ Equation cartésienne de $\boxed{\pi : 2x + y + 2z + 9 = 0}$ (*le lecteur peut vérifier que* A, B et $C \in \pi$)

<u>NB</u> : Une équation cartésienne de plan est une équation à 3 inconnues, on retrouve les 2 degrés de liberté mentionnés ci-dessus
Une équation de la forme "x – 5 = 0" ou de la forme "2x – y + 1 = 0" représente, dans l'espace à 3 dimensions, un plan car il y a bien 2 degrés de liberté !!
<u>Corolaire</u> : Il n'y a pas d'équation cartésienne de droite en 3 dimensions

Il est fortement conseillé (dans la mesure du possible) de privilégier la forme cartésienne au détriment de la forme paramétrique.

§F INTERSECTIONS

Nous considérons 4 cas

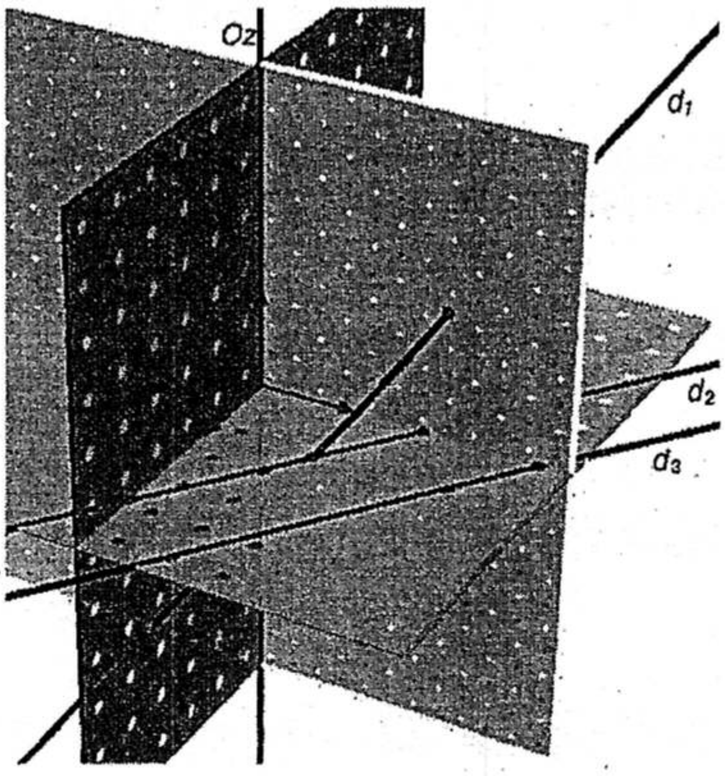
- 1. Intersection de deux droites
- 2. Intersection de deux plans
- 3. Intersection d'une droite et d'un plan
- 4. Intersection de 3 plans

1. Intersection de deux droites

Remarque préliminaire :

2 droites distinctes peuvent être :

- sécantes (ci-contre d_1 et d_2),
- parallèles (ci-contre d_2 et d_3),
- gauches (ci-contre Oz et n'importe laquelle des droites d_1 à d_3).



On parle de **position relative** de 2 droites

Par définition 2 droites sont dites **gauches** si elles ne sont ni sécantes, ni parallèles, donc **pas coplanaires**.

Remarque :

Il n'est en général facile de déterminer si 2 droites données sont parallèles ou non parallèles; par contre il est plus délicat de déterminer si 2 droites données sont gauches ou sécantes.

Exemple : Détermination de la position relative de 2 droites

Soit $d_1 : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \quad \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$ et $d_2 : \begin{cases} x = 5 + \mu \\ y = 1 + \mu \\ z = 4 - \mu \end{cases}$, on voit de suite que ces 2 droites ne sont pas parallèles.

1ère méthode : Recherche de l'éventuelle intersection :

En comparant les 2 premières équations de chacune des droites on a $\left| \begin{array}{l} 1 + 2\lambda = 5 + \mu \\ \lambda = 1 + \mu \end{array} \right. \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} \lambda = 3 \\ \mu = 2 \end{array} \right.$

En calculant le "z" de l'éventuel point d'intersection, on obtient ici $\left\langle \begin{array}{ll} z_1 = -4 & (\text{pour } d_1) \\ z_2 = 2 & (\text{pour } d_2) \end{array} \right.$

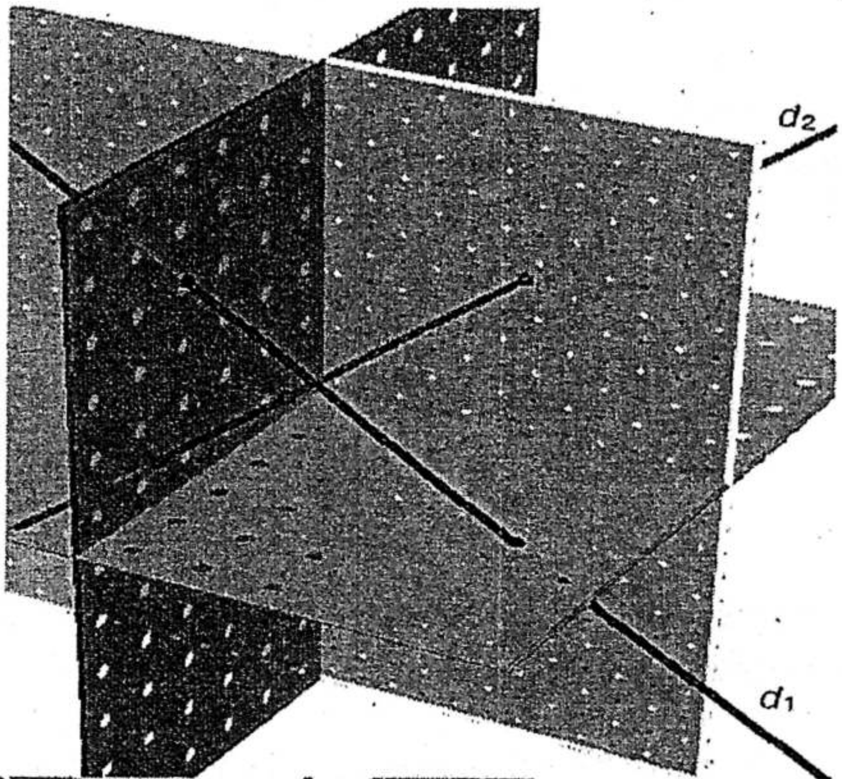
Comme $z_1 \neq z_2$ il n'y a pas d'intersection et ces 2 droites sont gauches.

2ème méthode : Par calcul d'un déterminant

Le déterminant $D\left(\overrightarrow{A_1A_2}; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}\right)$ permet de différencier les cas où les droites sont coplanaires ou non, donc si elles sont sécantes ou gauches. NB : $A_1(1;0;1)$, $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A_2(5;1;4)$ et $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

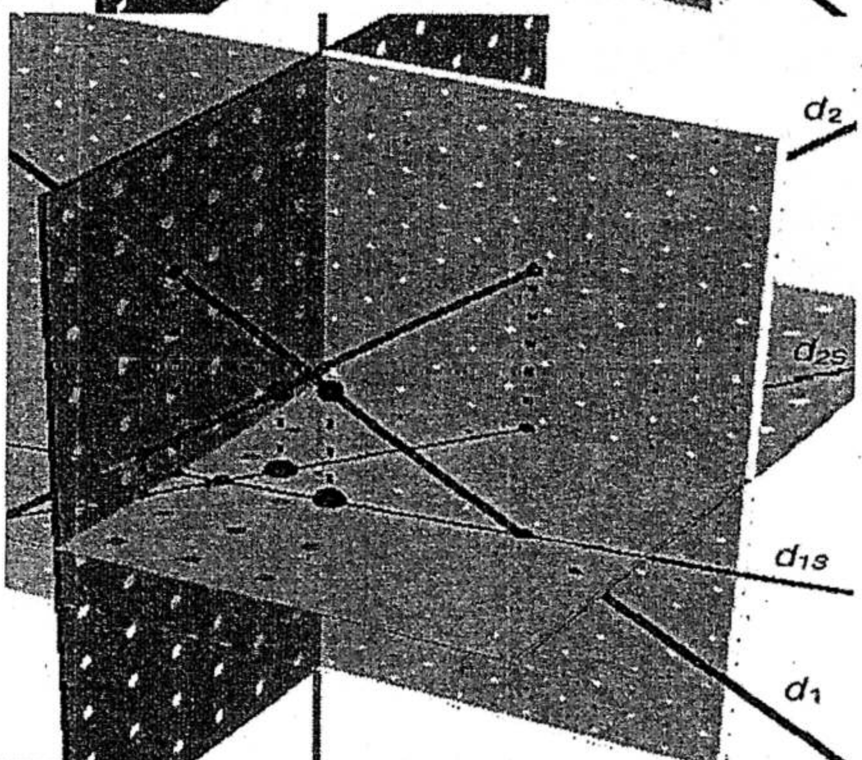
3ème méthode : Graphiquement

On représente les droites dans un repère
(Attention, les droites montrées ici ne sont pas les mêmes que dans l'exemple numériques ci-dessus).

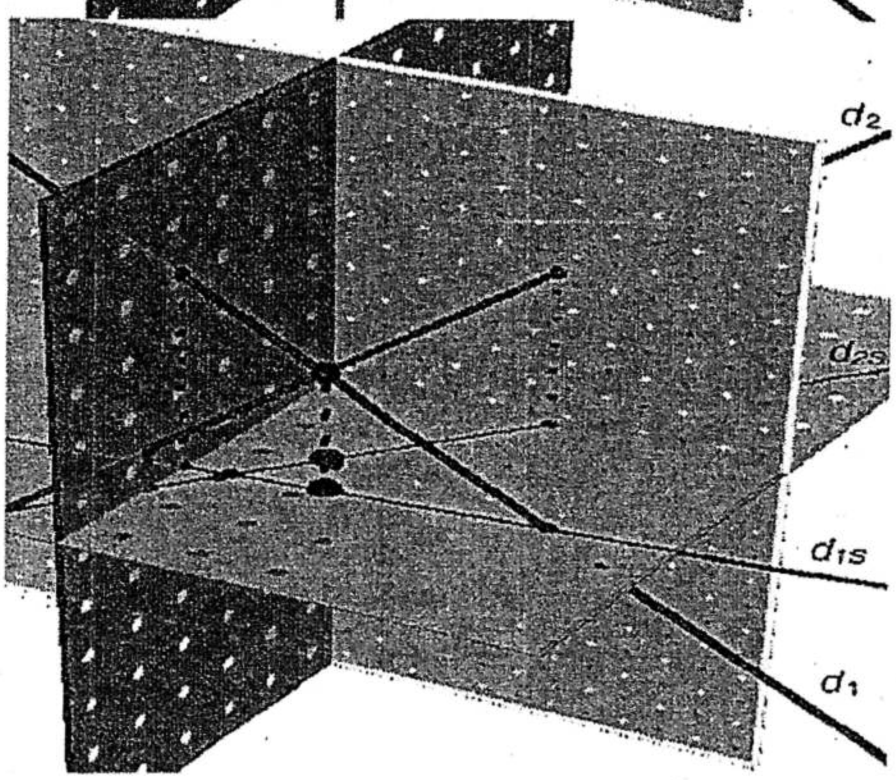


Impossible de se prononcer sans autres sur la position relative des 2 droites.

Il y a bien un "point" sur la feuille de papier qui pourrait être l'intersection, mais … ??



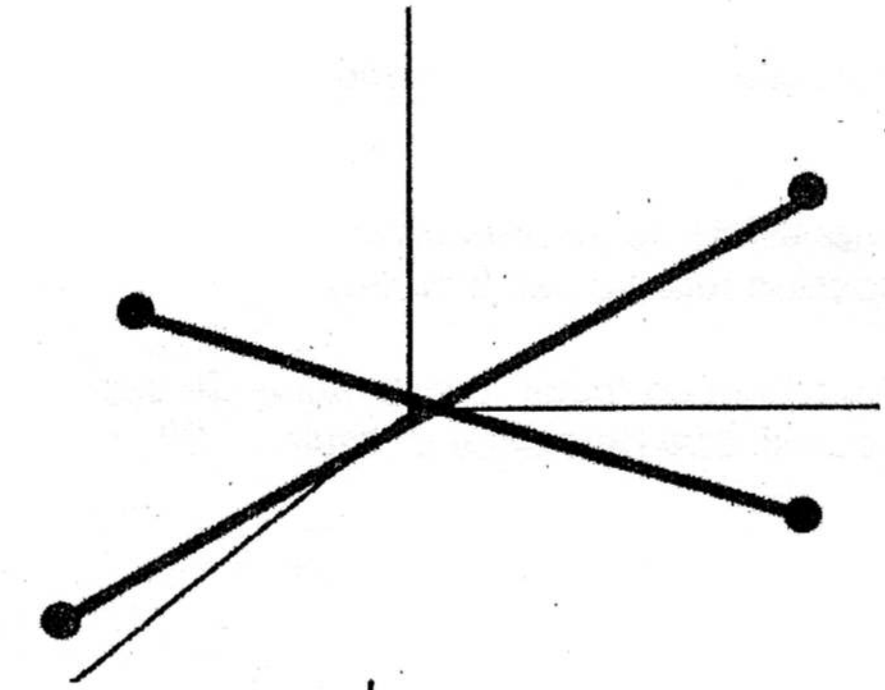
A l'aide de projections (dans le sol par exemple), on voit que …



…
il y a 2 projections distinctes dans le sol pour le "point" sur la feuille.

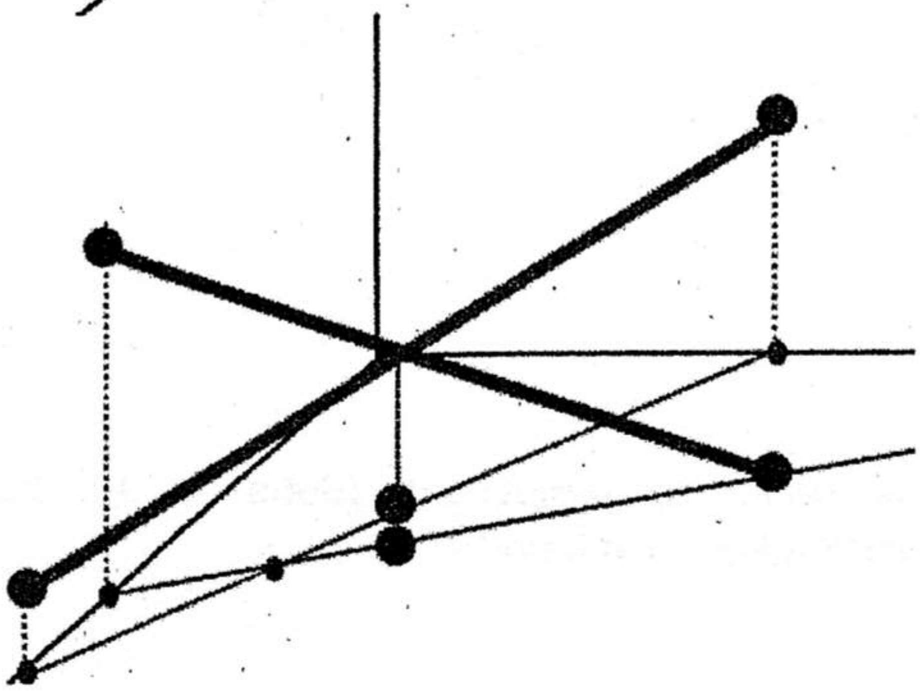
Pour que les droites soient sécantes il aurait fallu que la projection du point d'intersection corresponde à l'intersection des projections des droites.

Construction avec "papier-crayon"



Impossible de se prononcer sans autres sur la position relative des 2 droites.

Il y a bien un "point" sur la feuille de papier qui pourrait être l'intersection, mais ... ??



A l'aide de projections (dans le sol par exemple), on voit que ...

il y a 2 projections distinctes dans le sol pour le "point" sur la feuille.

Pour que les droites soient sécantes il aurait fallu que la projection du point d'intersection corresponde à l'intersection des projections des droites.

2. Intersection de 2 plans

Lorsque l'on recherche l'éventuelle intersection de 2 plans, on peut se trouver dans l'un des 2 cas suivants :

a) Les 2 plans sont parallèles
b) Les 2 plans sont sécants selon une droite.

(Situation qui a une certaine analogie avec les positions relatives de 2 droites en 2 dimensions)

Pour déterminer la position relative et donc l'(les) éventuelle(s) intersections, nous allons voir 2 méthodes :

<u>1ère méthode</u> : Algébriquement

Nous partons du principe que les 2 plans sont donnés chacun par une équation cartésienne, nous disposons donc de 2 équations à 3 inconnues (Tiens, un degré de liberté ...)
Si on pense à la droite i d'intersection des 2 plans (celle que l'on doit trouver donc), on peut supposer que i coupe le sol en $S(x_S;y_S;0)$ et donc on peut en remplaçant z par 0 dans les 2 équations, calculer x_S et y_S et donc calculer le point S
De même on peut imaginer que i coupe le mur en $M(0; y_M. z_M)$ et de manière analogue calculer le point M.
Une fois que 2 points de i sont connus, la droite i elle-même est connue.
Objection ?
Bien sûr ... il n'est pas impossible qu'au cas où la droite i soit parallèle à un axe ou/et à un plan de référence, ou lorsqu'elle passe par l'origine, la recherche de 2 points puisse être moins idyllique que la démarche proposée ci-dessus, mais le principe reste le même, il faut trouver 2 points et choisir une des coordonnées pour chacun des points.
Une variante intéressante consiste à poser $x = \lambda$, ce qui permet de trouver les équations de i sans passer par les points (*l'objection ci-dessus demeure toutefois aussi dans ce cas*)

Si les 2 plans sont parallèles, le calcul n'aboutira pas ... mais dans ce cas une étude rapide des équations données pour les plans permet de détecter le parallélisme.

<u>Exemple</u> où 2 plans données sont parallèles :

Si $\pi_1 : 2x - y + 3z + 6 = 0$ et $\pi_2 : 4x - 2y + 6z - 1 = 0$, on peut se convaincre facilement que ses 2 plans sont parallèles car on a :

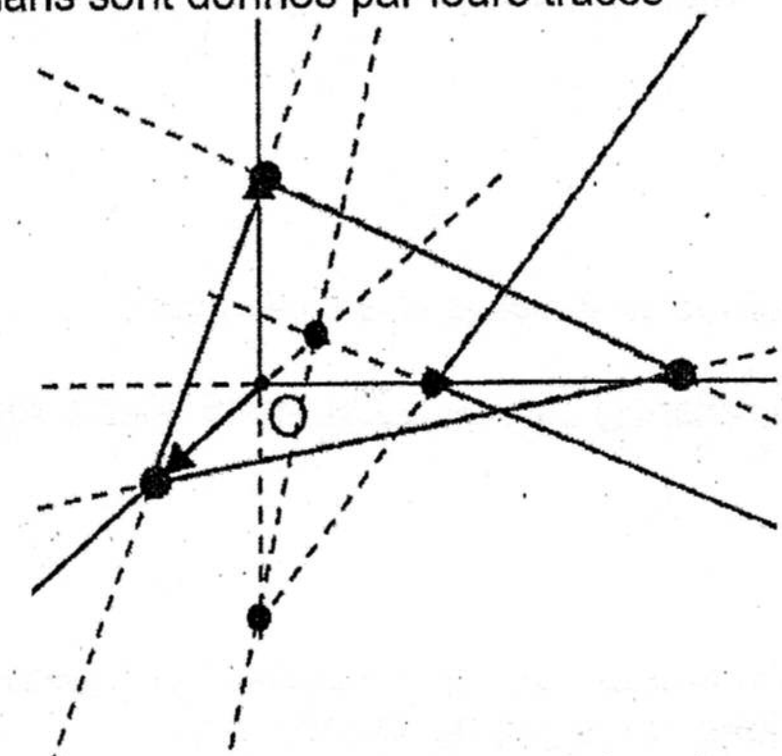
- Pour $\pi_1 : 2x - y + 3z = -6$
- Pour $\pi_2 : 2x - y + 3z = \frac{1}{2}$,

et comme 2x-y+3z ne peut valoir simultanément "-6" et "$\frac{1}{2}$", il n'a a pas de P(x;y;z) satisfaisant les 2 solutions, donc les 2 plans sont parallèles.

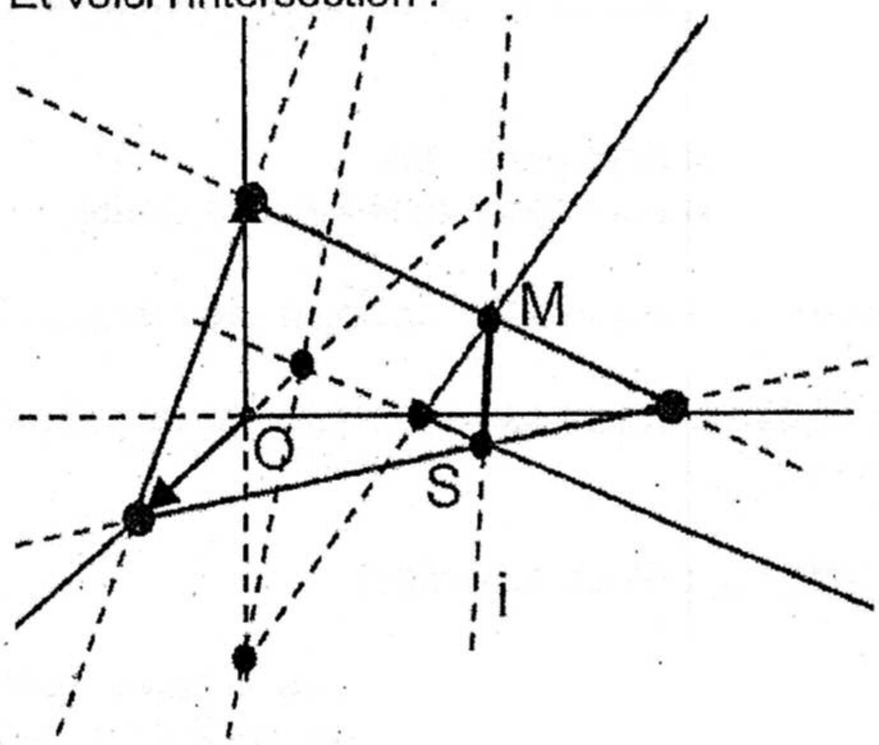
De manière générale, avec $\begin{cases} \pi_1 : a_1x + b_1 + c_1 + d_1 = 0 \\ \pi_2 : a_2x + b_2 + c_2 + d_2 = 0 \end{cases}$, on a : $\boxed{\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$

2^ème^ méthode : Par construction

2 plans sont donnés par leurs traces



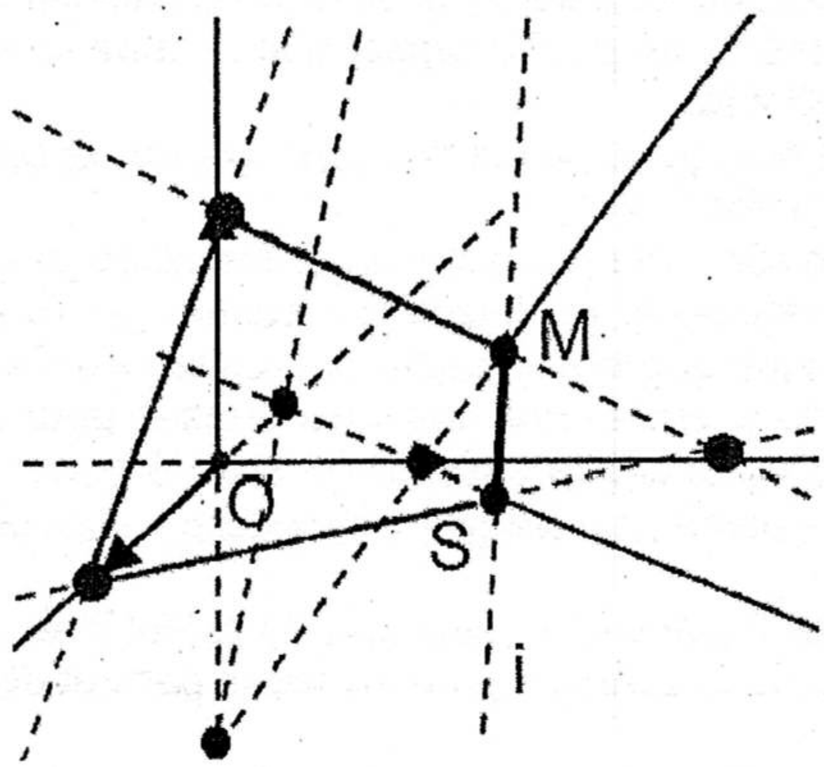
Et voici l'intersection :



On part du principe que chacun des plans est donné par ses traces. L'intersection des 2 traces dans le sol dont le point S, l'intersection des 2 traces dans le mur donne le point M … et le tour est joué.

Remarque : toute ligne qui est derrière un plan doit être dessinée en traitillés, la solution donnée ci-dessus peut donc être améliorée comme ci-contre.

Un léger hachurage des parties visibles (Octant I et pas "caché" par un autre plan) permet d'améliorer encore la visualisation.



3. Intersection d'une droite et d'un plan

Lorsque l'on recherche l'éventuelle intersection d'une droite d et d'un plan π, on peut se trouver dans l'un des 3 cas suivants :

a) La droite coupe le plan en un seul point (Exemple : Oz et le sol)
b) La droite est incluse dans le plan : tous les points de la droite sont "intersection"
c) La droite ne coupe pas le plan, elle est dite parallèle au plan.

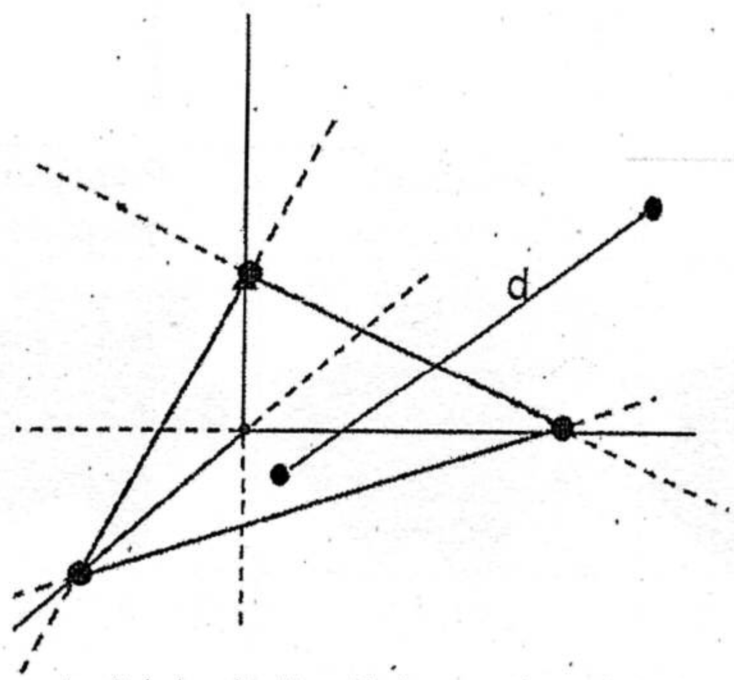
Pour déterminer la position relative et l'éventuelle intersection, nous allons voir 2 méthodes :

<u>1ère méthode</u> : Algébriquement

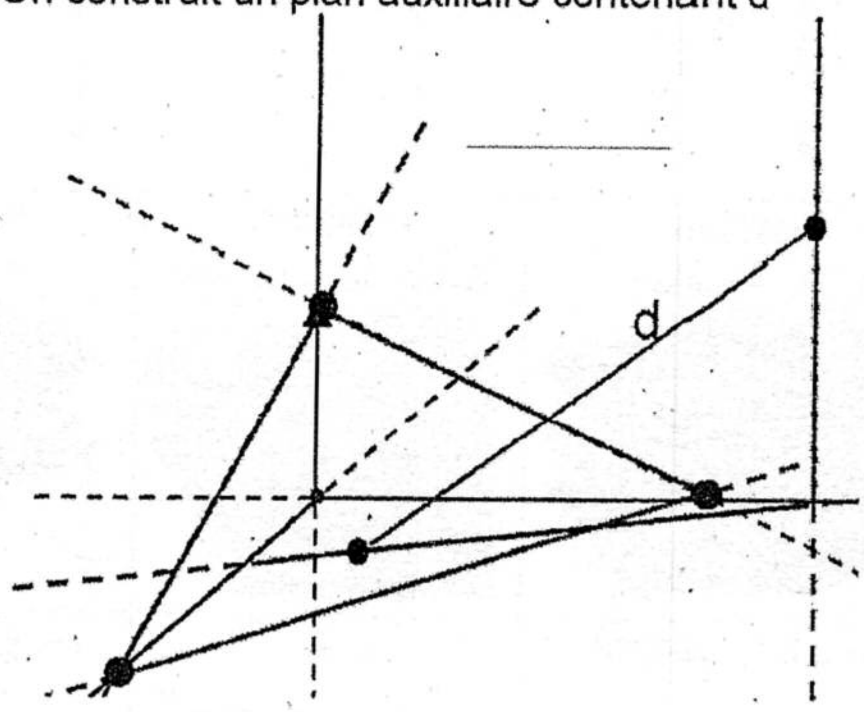
On se limitera à la situation où la droite est donnée par 3 équations paramétriques et le plan par une équation cartésienne. La recherche de l'intersection revient donc à résoudre un système de 4 équations à 4 inconnues (x,y,z et λ) : la substitution simultanée du x, du y et du z dans l'équation cartésienne par les expressions issues des équations paramétriques permet de se ramener facilement à une équation à une seule inconnue (λ).
Le problème est donc élémentaire et est laissée au lecteur.

<u>2ème méthode</u> : Par construction

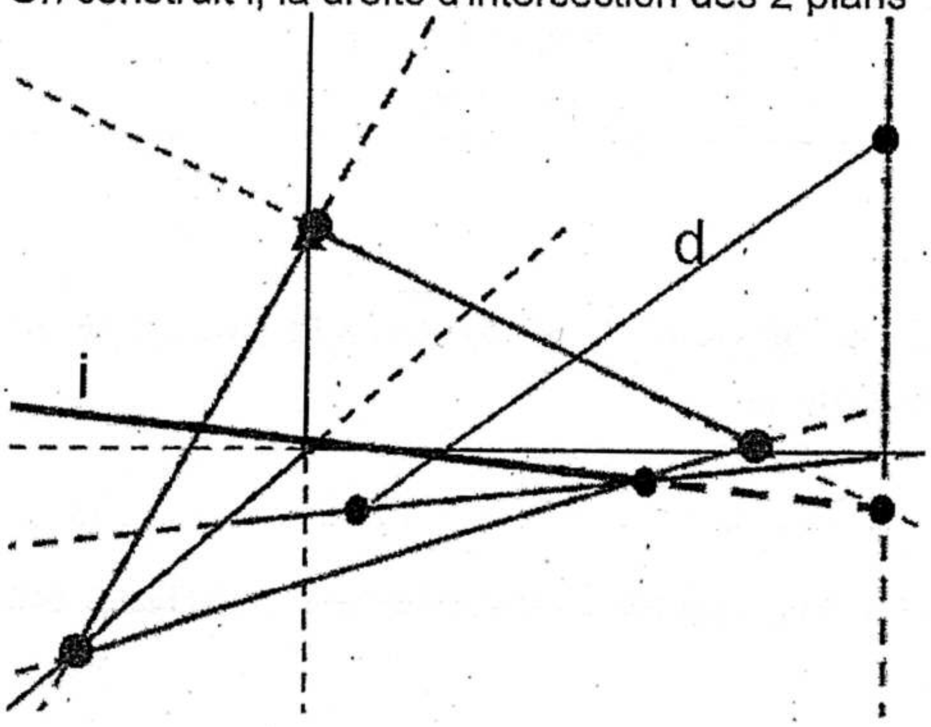
1 plans et 1 droite sont donnés par leurs traces



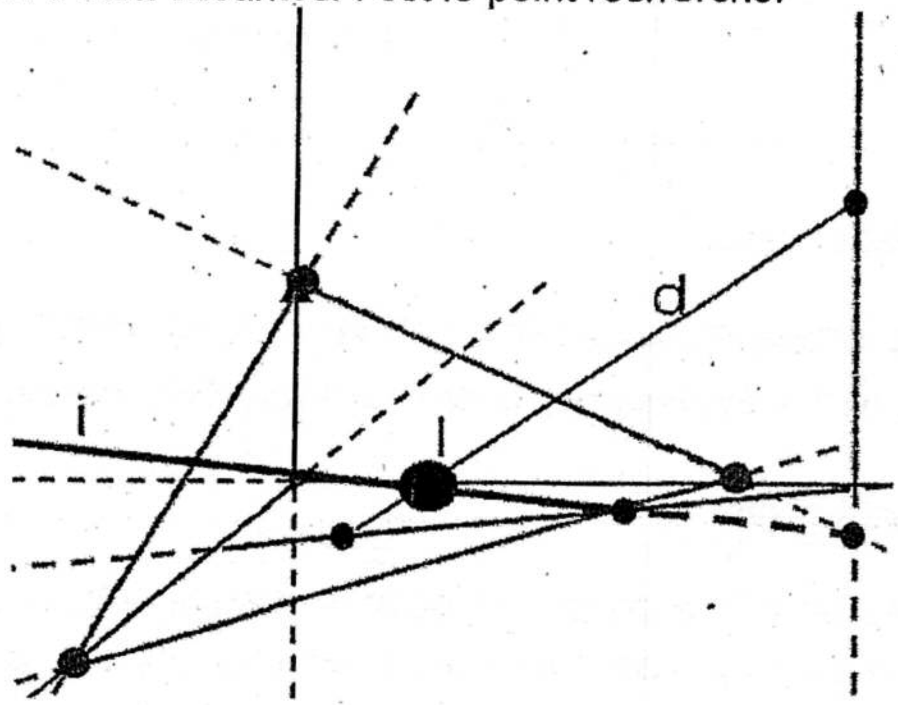
On construit un plan auxiliaire contenant d



On construit i, la droite d'intersection des 2 plans



i et d sont sécantes. I est le point recherché.

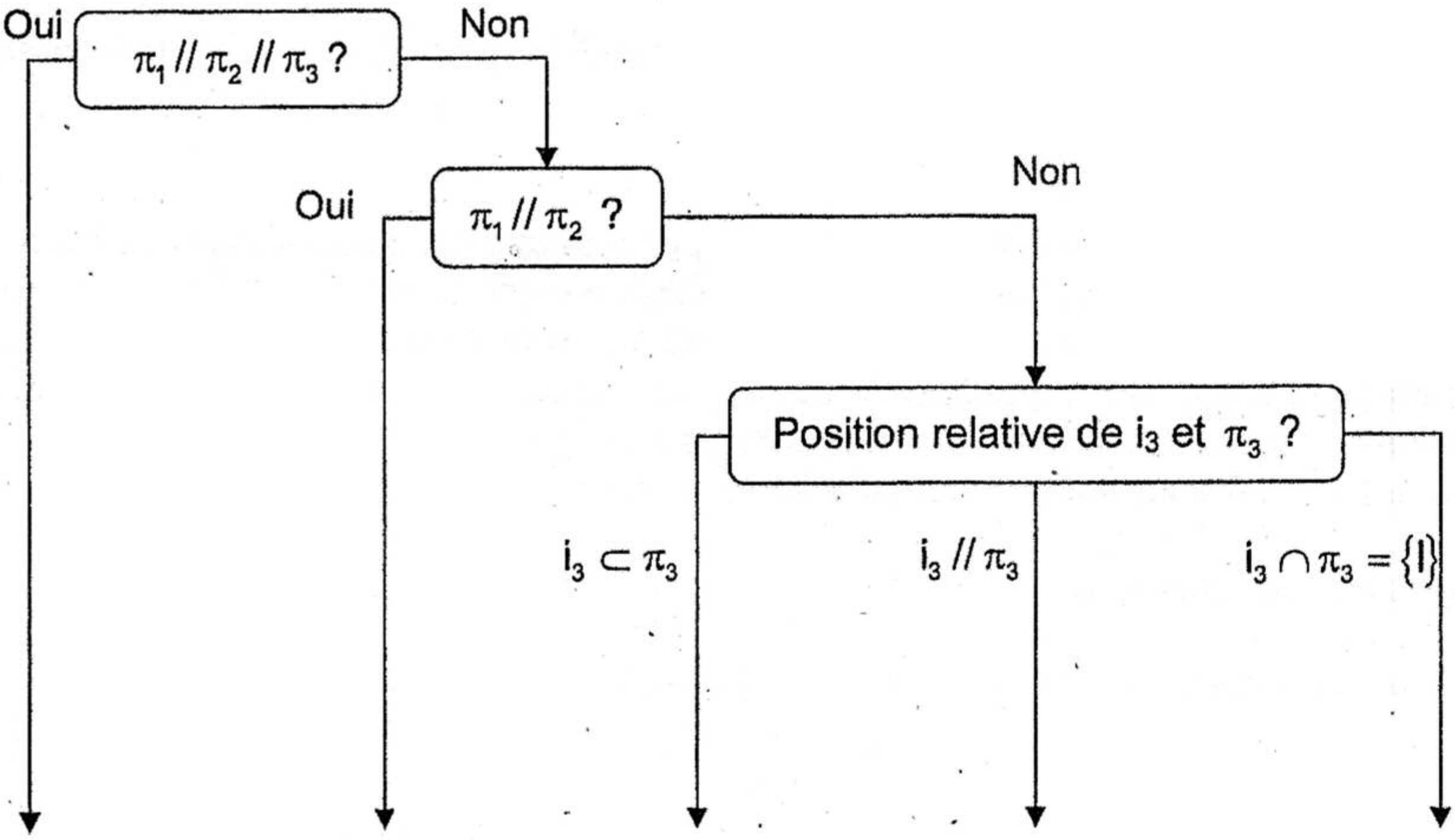


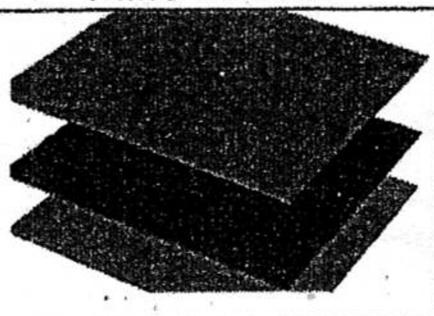
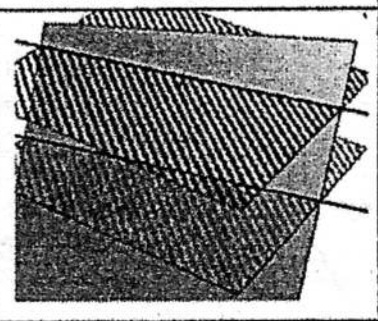
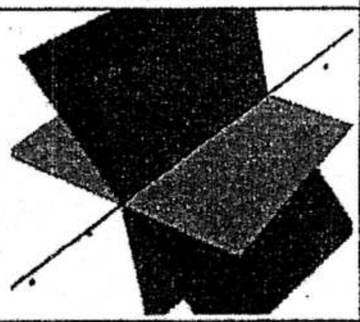
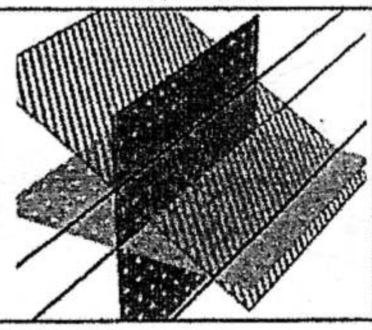
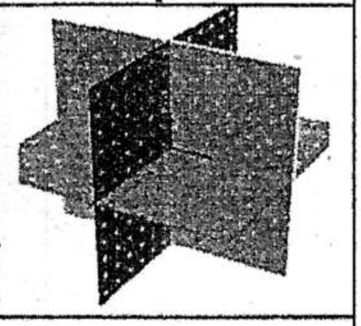
A titre d'exercice, le lecteur est encouragé à "traitiller" les droites d et i, ainsi que les plans ...

4. Intersection de 3 plans

Soit π_1, π_2 et π_3 3 plans distincts.

On distingue 5 positions relatives possibles pour 3 plans donnés que l'on peut déterminer à l'aide du schéma ci-dessous :



Position Mille-feuilles	Position Croix de Lorraine	Position Cahier	Position Toblerone	**Position Repère**
				
Aucune intersection	$i_1 // i_2$ *avec* $i_1 = \pi_2 \cap \pi_3$ *et* $i_2 = \pi_1 \cap \pi_3$	$i = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$	$i_1 // i_2 // i_3$ *avec* $i_1 = \pi_2 \cap \pi_3$, $i_2 = \pi_1 \cap \pi_3$ *et* $i_3 = \pi_1 \cap \pi_2$	$\{I\} = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$

<u>Convention</u> :

La droite d'intersection (si elle existe) entre π_1 et π_2 se note i_3 et de manière analogue on note les éventuelles autres droites d'intersection de 2 plans.

<u>Remarque</u>

Par souci de concision pour le diagramme ci-dessus, les 2 plans éventuellement parallèles ont été désignés arbitrairement comme étant π_1 et π_2.