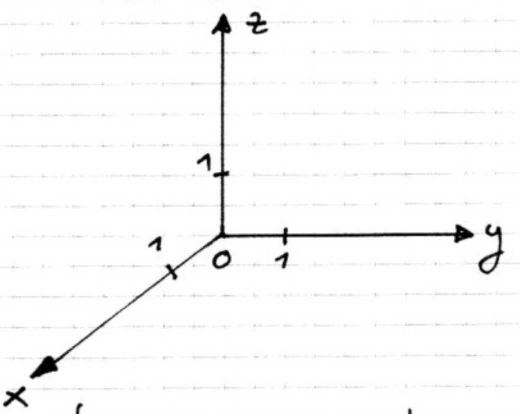
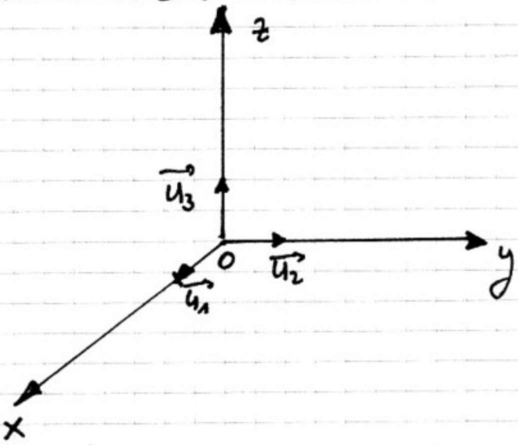
Géométrie dans l'espace

Fait par Roland Vuille, Perma'math

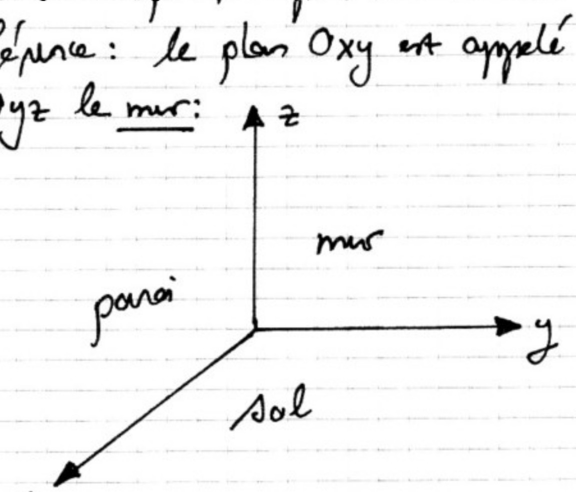
Dans l'espace, il faut trois axes pour pouvoir déterminer la position d'un <u>point</u> : l'axe x (axe des <u>abscisses</u>), l'axe y (axe des <u>ordonnées</u>) et l'axe z (axe des <u>cotes</u>).
On les dispose de la manière suivante :



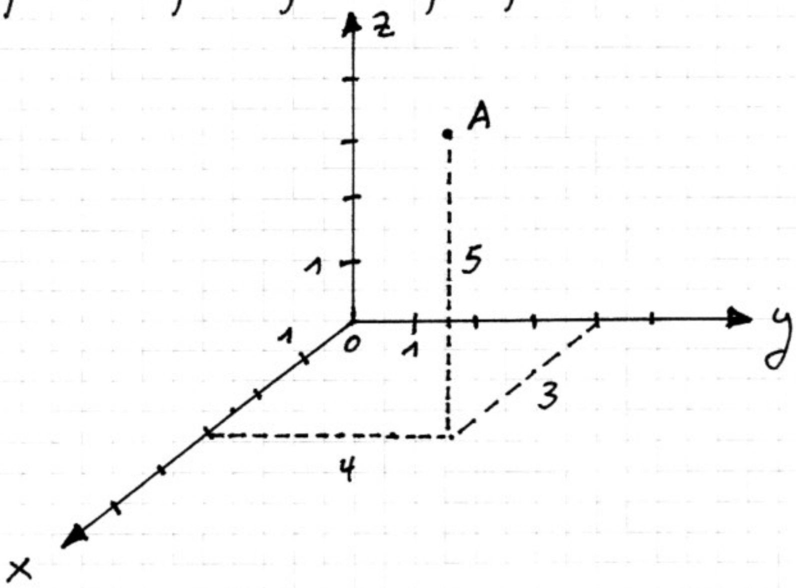
Le point $O(0;0;0)$ est l'<u>origine</u> du système d'axes.
Parfois on dit que l'on munit l'espace d'un <u>repère</u> $\{O; \vec{u_1}; \vec{u_2}; \vec{u_3}\}$. Le repère se présente alors de la manière suivante :



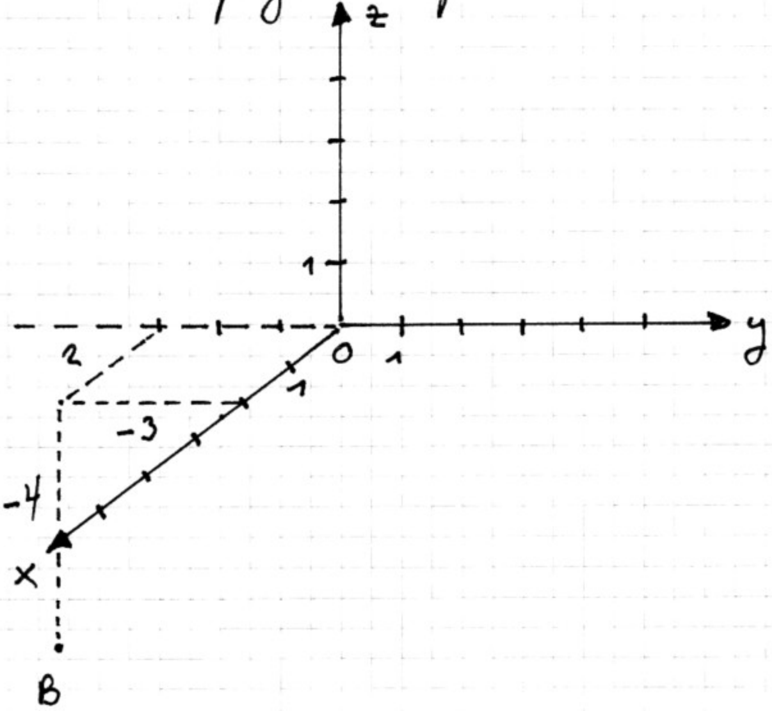
Dans un système d'axe de l'espace, en plus des 3 axes de référence (x, y et z), il y a 3 plans de référence : le plan Oxy est appelé le <u>sol</u>, le plan Oxz la <u>paroi</u> et le plan Oyz le <u>mur</u> :



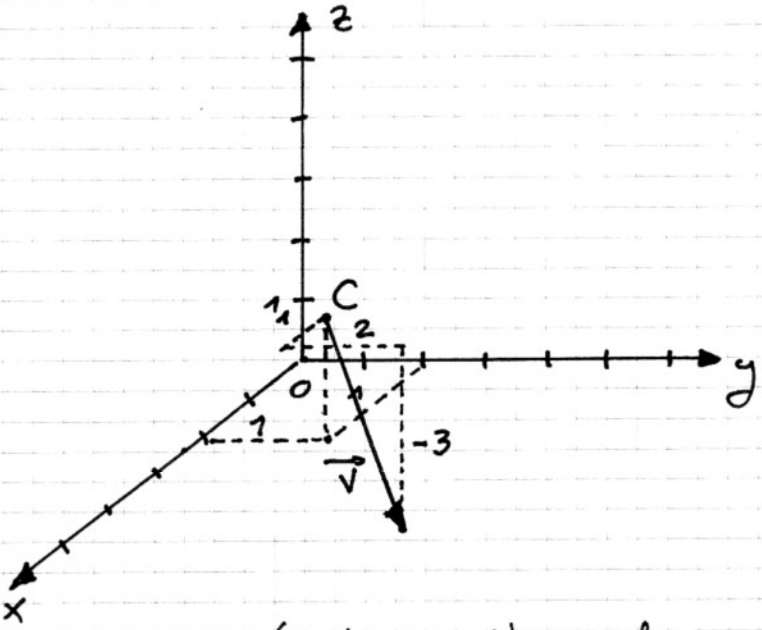
Dans l'espace un point est représenté par 3 <u>coordonnées</u> $(x\,;y\,;z)$:
x est son abscisse, y son ordonnée et z sa cote.
Pour représenter un point (par exemple $A(3\,;4\,;5)$) dans le système d'axes de l'espace, on peut par exemple procéder comme suit :



Si on veut représenter un point qui a une ou plusieurs coordonnées négatives (par exemple $B(2\,;-3\,;-4)$), on dessine les prolongements des axes nécessaires du côté des négatifs et on procède comme suit :



Dans l'espace, un <u>vecteur</u> va être donné par 3 <u>composantes</u> : la première composante décrit le déplacement selon l'axe x, la seconde le déplacement selon l'axe y et la troisième selon l'axe z.
Ainsi, le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ qui a pour origine le point $C(2\,;2\,;2)$ se représente comme suit :



On rappelle qu'un vecteur donné n'a pas d'origine fixe et peut être dessiné n'importe où dans le système d'axes.

Il existe un lien entre les coordonnées d'un point (par exemple $D(-2;1;-4)$) et le vecteur reliant O à D, noté $\overrightarrow{OD}$: les composantes de $\overrightarrow{OD}$ correspondent aux coordonnées de D : $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Si on a un vecteur $\vec{v}$, le <u>vecteur opposé</u> à $\vec{v}$ est $\vec{v}$.
Ainsi l'opposé du vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est $-\vec{v} = -\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Deux <u>vecteurs</u> $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont <u>parallèles</u> si il existe un nombre réel k tel que $\vec{v} = k \cdot \vec{w}$.
Par exemple, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ sont parallèles car on a :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Deux <u>vecteurs</u> $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont <u>pas parallèles</u> si il n'existe pas de nombre réel k tel que $\vec{v} = k \cdot \vec{w}$.
Par exemple, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ne sont pas parallèles car :

si il existait un nombre k tel que $\vec{v} = k \cdot \vec{w}$, on aurait $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

i.e. $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6k \\ 2k \\ 3k \end{pmatrix}$, i.e., en écrivant cette égalité par ligne :

$$\begin{cases} 3 = -6k & (1) \\ -1 = 2k & (2) \\ 2 = 3k & (3) \end{cases}$$

La relation (1) implique que $k = -\frac{1}{2}$; la relation (2) implique que $k = -\frac{1}{2}$;

La relation 3 implique que $k = \frac{2}{3}$.
Comme les valeurs de k ne sont pas toutes égales, on en déduit que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas parallèles.

Lorsqu'un vecteur est donné par 2 points A et B et que l'on veut chercher les composantes de ce vecteur (noté $\overrightarrow{AB}$), on utilise la relation de Chasles:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

Par exemple, si $A(3;1;6)$ et $B(4;-2;3)$, on a $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

On est souvent intéressé à calculer la longueur d'un vecteur, ce que l'on appelle la norme du vecteur.

Si le vecteur est $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, sa norme, notée $\|\vec{v}\|$ est:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

On sait additionner et soustraire des vecteurs.
Il est possible de les multiplier.
Pour les vecteurs, il existe 2 sortes de multiplication.

Le premier est le produit scalaire de 2 vecteurs.

Le produit scalaire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est noté $\vec{v} \cdot \vec{w}$ et est défini comme suit:

Si $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3$

(le produit scalaire est la somme des produit des coordonnées).

Les propriétés du produit scalaire sont les suivantes:

1) $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$
2) $(k\vec{v}) \cdot \vec{w} = k \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$
3) $\vec{v} \cdot (\vec{w_1} + \vec{w_2}) = \vec{v} \cdot \vec{w_1} + \vec{v} \cdot \vec{w_2}$
4) $\vec{v}$ perpendiculaire à $\vec{w} \Longrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$
5) $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \Longrightarrow \vec{v}$ perpendiculaire à $\vec{w}$.

Le deuxième produit est le produit vectoriel de 2 vecteurs.

Le produit vectoriel de $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est noté $\vec{v} \wedge \vec{w}$ ou $\vec{v} \times \vec{w}$ et est défini comme suit : si $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$,

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}.$$

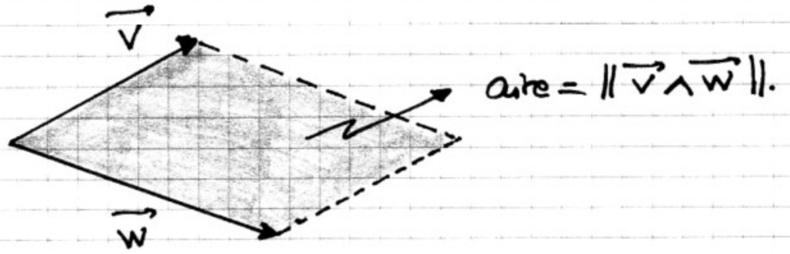
On remarque que le résultat du produit scalaire est un nombre, alors que le résultat du produit vectoriel est un vecteur.

Par exemple, si $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, on a :

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 2 - 4 \cdot 4 \\ 4 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 4 - (-2) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 - 16 \\ -4 - 2 \\ 4 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Les <u>propriétés du produit vectoriel</u> sont les suivantes :

1) $\vec{v} \wedge \vec{w} = -\vec{w} \wedge \vec{v}$
2) $(k\vec{v}) \wedge \vec{w} = k(\vec{v} \wedge \vec{w})$
3) $\vec{v} \wedge (\vec{w_1} + \vec{w_2}) = \vec{v} \wedge \vec{w_1} + \vec{v} \wedge \vec{w_2}$
4) $\vec{v}$ parallèle à $\vec{w} \Longrightarrow \vec{v} \wedge \vec{w} = 0$
5) $\vec{v} \wedge \vec{w} = 0 \Longrightarrow \vec{v}$ parallèle à $\vec{w}$
6) $\vec{v} \wedge \vec{w}$ est un vecteur perpendiculaire à $\vec{v}$ et perpendiculaire à $\vec{w}$
7) $\|\vec{v} \wedge \vec{w}\|$ est exactement égal à l'aire du parallélogramme formé par $\vec{v}$ et $\vec{w}$:



On peut calculer <u>l'angle entre 2 vecteurs</u> $\vec{v}$ et $\vec{w}$: si α est cet angle, on a :

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}.$$

Exemple : cherchons l'angle α entre $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On a : $\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 4 = -3 + 2 - 8 = -9$;

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14};$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 4 + 16} = \sqrt{21}.$$

Ainsi : $\cos(\alpha) = \dfrac{-9}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}} = -0{,}5245$ et $\alpha = \cos^{-1}(-0{,}5245) = 121{,}66°$.

Une droite dans l'espace est définie par un point et une direction. Cette direction est appelée vecteur directeur. Il existe toujours une infinité de vecteurs directeurs pour une droite.
Pour déterminer un point quelconque $P(x;y;z)$, on part du point connu $A(a;b;c)$ de la droite et on lui ajoute un certain nombre de fois le vecteur directeur choisi $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. Ce certain nombre de fois est ce qu'on appelle un paramètre.
Les équations paramétriques de la droite sont définies par:

$$\begin{cases} x = a + v_1 \cdot \lambda \\ y = b + v_2 \cdot \lambda \\ z = c + v_3 \cdot \lambda, \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est le paramètre.
En prenant différentes valeurs de λ, on se déplace sur la droite.
On remarque que les équations paramétriques de la droite sont les coordonnées du point plus λ fois les composantes du vecteur directeur.

Lorsqu'on veut dessiner une droite donnée par ses équations paramétriques dans un système d'axes de l'espace, on va chercher ses traces.
Les traces d'une droite sont ses intersections avec les plans de référence (sol, mur et paroi).
La trace dans le sol correspond à poser $z=0$ dans les équations de la droite, d'en déduire λ, puis les x et y correspondants. On note cette trace T_S.
La trace dans la paroi correspond à poser $y=0$ dans les équations de la droite, d'en déduire λ, puis les x et z correspondants. On note cette trace T_P.
La trace dans le mur correspond à poser $x=0$ dans les équations de la droite, d'en déduire λ, puis les y et z correspondants. On note cette trace T_m.
La droite passe alors par T_S, T_P et T_m.

Illustrons ceci par un exemple.
Soit la droite d donnée par les équations paramétriques: $\begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 2 + 2\lambda. \end{cases}$

Trace dans le sol : poser $z=0$;

on a alors $2+2\lambda=0$, i.e. $2\lambda=-2$, i.e $\lambda=-1$;

ainsi $x=3-(-1)=4$ et $y=1+3(-1)=-2$;

donc $T_S(4;-2;0)$.

Trace dans la paroi : poser $y=0$;

on a alors $1+3\lambda=0$, i.e. $3\lambda=-1$, i.e. $\lambda=-\frac{1}{3}$;

ainsi $x=3-(-\frac{1}{3})=\frac{10}{3}$ et $z=2+2(-\frac{1}{3})=\frac{4}{3}$;

donc $T_P(\frac{10}{3};0;\frac{4}{3})$.

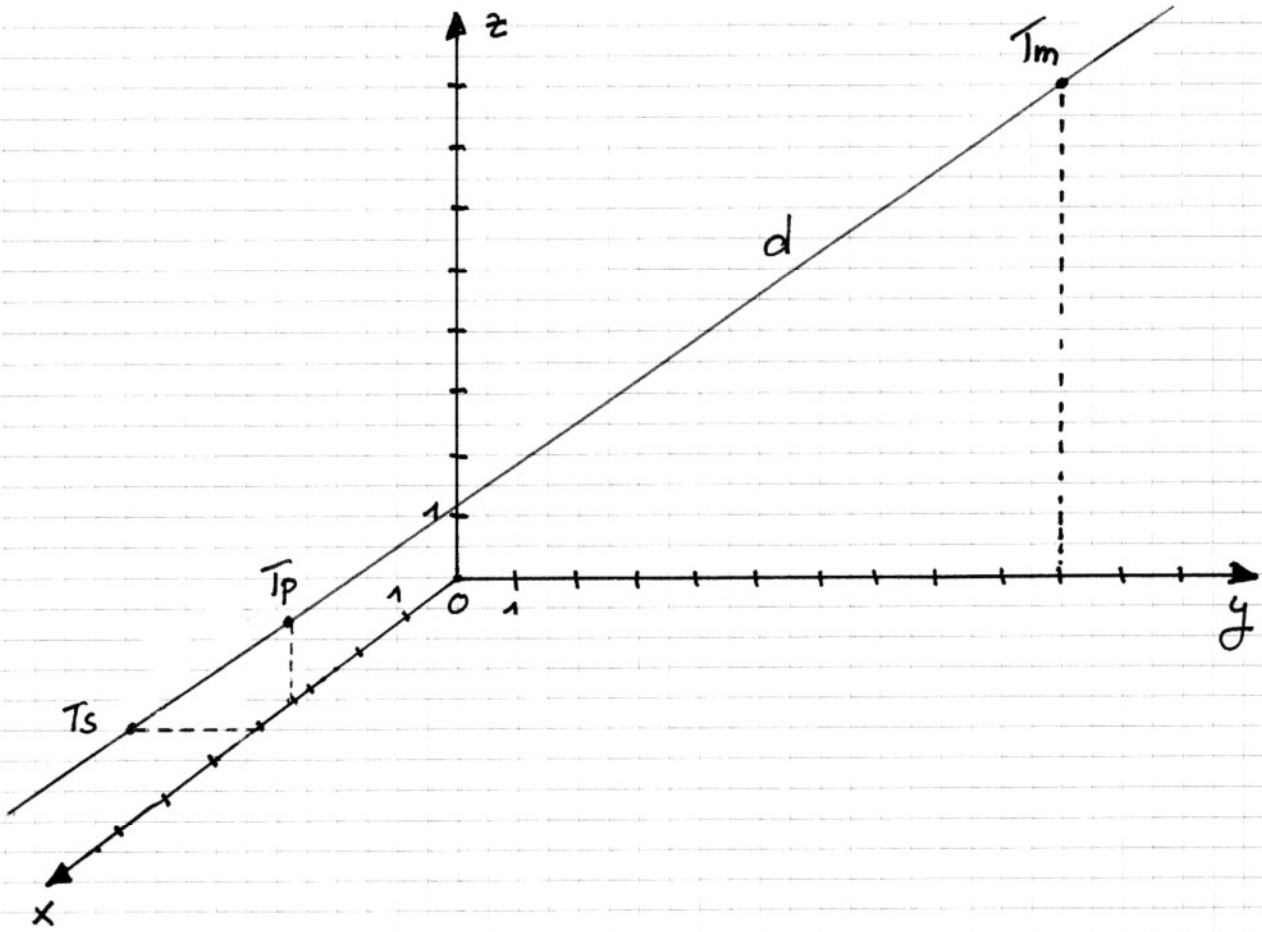
Trace dans le mur : poser $x=0$;

on a alors $3-\lambda=0$, i.e $\lambda=3$;

ainsi $y=1+3\cdot3=10$ et $z=2+2\cdot3=8$;

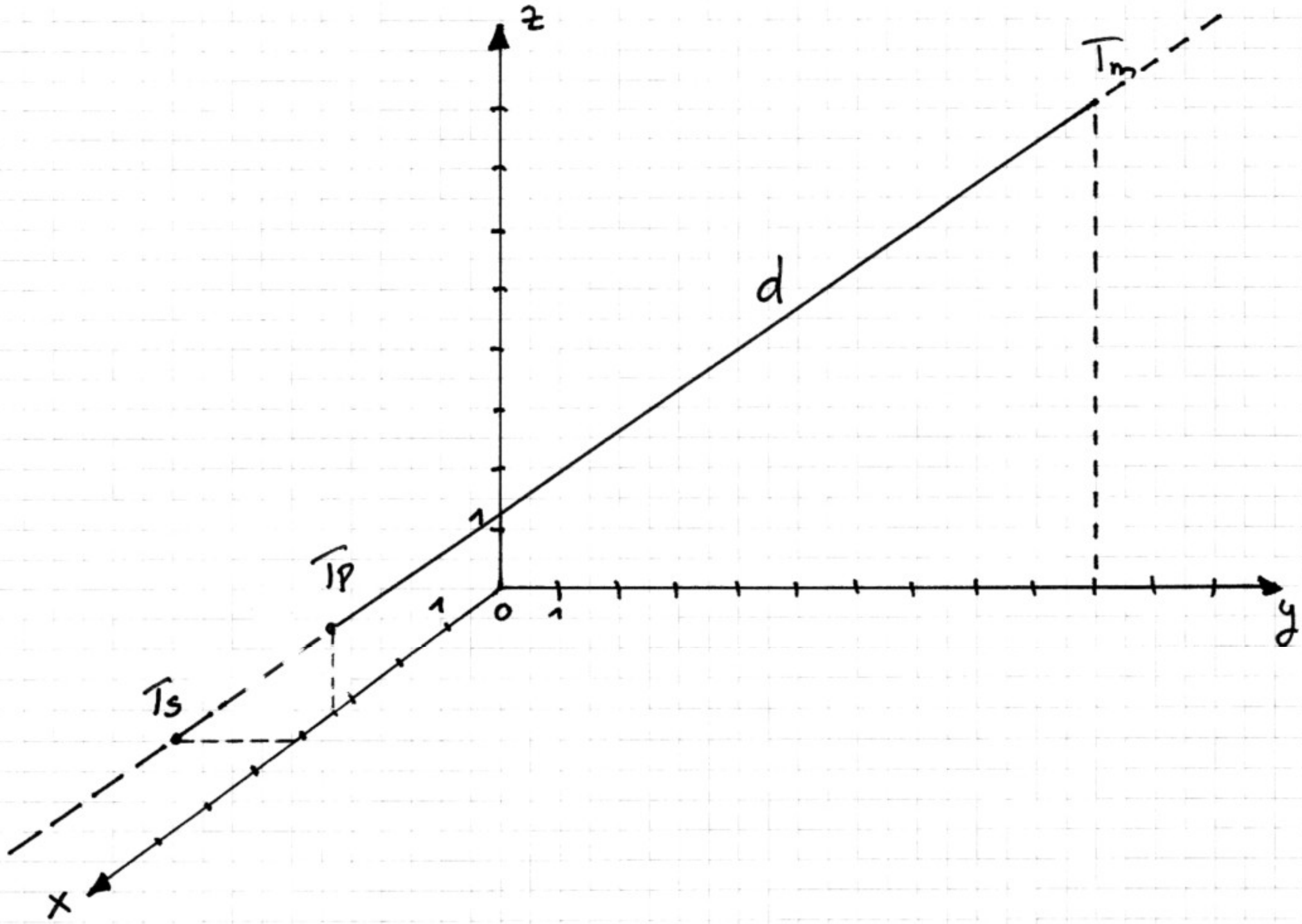
donc $T_m(0;10;8)$.

Représentons les traces dans un système d'axes et relions-les :

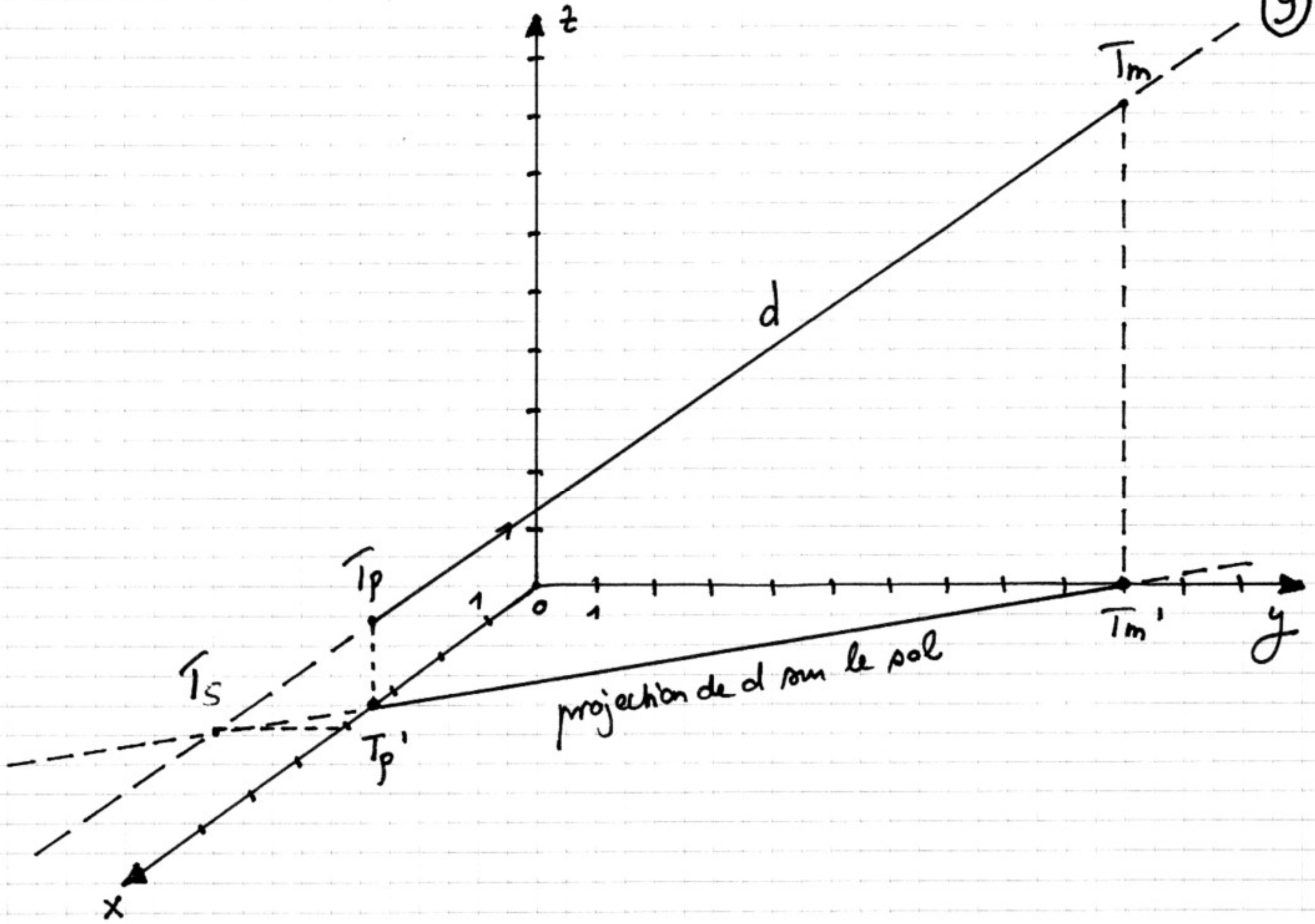


Lorsqu'on dessine une droite (ou un autre objet) dans un système d'axes de l'espace, il faut mettre en évidence les parties visibles (en traits continus) et les parties invisibles (en traits tillés). Les parties invisibles sont celles qui sont derrière un des plans de référence (pour l'observateur) et les parties visibles sont celles qui ne sont pas cachées par un plan de référence.

Ici T_s est derrière la paroi puisque sa deuxième coordonnée est négative. Ainsi, la partie contenant T_s jusqu'à T_p est invisible (en traits tillés). T_p et T_m sont visibles (ils sont sur la partie visible de la paroi et du mur). Le segment T_p et T_m est donc visible (trait continu). Après T_m, on passe derrière le mur : en traits tillés.
La représentation complète de d est donc:



On est aussi parfois intéressé à dessiner les <u>projections de la droite sur les plans de référence.</u>
Pour trouver la projection dans le sol, on projète T_p et T_m dans le sol et on relie ces projections avec T_s:
Dans l'exemple, on a $T_s\,(4;-2;0)$, $T_p\left(\frac{10}{3};0;\frac{4}{3}\right)$ et $T_m\,(0;10;8)$; les projections de T_p et T_m dans le sol sont $T_p'\left(\frac{10}{3};0;0\right)$ et $T_m'\,(0;10;0)$; on relie alors T_s, T_p' et T_m' en tenant compte des parties visibles et invisibles:



Similairement, pour trouver la projection de d dans la paroi, on projette T_S et T_m dans la paroi (mettre la 2^e coordonnée égale à zéro) et on relie ces projections à T_p.
Pour trouver la projection de d dans le mur, on projette T_S et T_p dans le mur (mettre la 1^{er} coordonnée égale à zéro) et on relie ces projections à T_m.

Lorsqu'on a 2 droites, on aimerait souvent connaître la <u>position relative de ces 2 droites.</u>
Il y a 4 possibilités:
1) Soit elles sont confondues;
2) soit elles sont parallèles (sans être confondues);
3) soit elles sont sécantes (un point d'intersection);
4) soit elles sont gauches (pas d'intersection et pas de parallélisme).

Pour déterminer cette position relative, on peut le faire algébriquement ou géométriquement.
Si on connaît les équations paramétriques des droites, on égalise les coordonnées et on résoud. Si on trouve une infinité de solutions, les droites sont confondues

(possibilité 1)) ; si on trouve zéro solution, les droites ne se coupent pas (possibilités 2) ou 4)) ; on regarde alors les vecteurs directeurs de ces droites ; si ils sont parallèles, les droites sont parallèles (possibilité 2)) ; si ils ne sont pas parallèles, les droites sont gauches (possibilité 4)) ; si on trouve exactement une solution, les droites sont sécantes (possibilité 3)).

Illustrons cela par un exemple.

Soient les droites d_1 et d_2 données par les équations paramétriques suivantes :

$$d : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2 - 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases} \qquad d' : \begin{cases} x = 3\mu \\ y = 1 - \mu \\ z = -1 + 2\mu \end{cases}$$

(lorsqu'on a 2 droites, il faut mettre des lettres différentes pour les paramètres, ceci afin d'éviter des confusions).

On égalise les coordonnées :

coordonnée x : $1 + \lambda = 3\mu$ ①

coordonnée y : $-2 - 2\lambda = 1 - \mu$ ②

coordonnée z : $3 - \lambda = -1 + 2\mu$ ③

On a ainsi 3 équations avec 2 inconnues.

Résolvons les 2 premières:

$$\begin{array}{rl|l} 1+\lambda &= 3\mu & \cdot 1 \\ -2-2\lambda &= 1-\mu & \cdot 3 \\ \hline -5-5\lambda &= 6 & +5 \\ -5\lambda &= 11 & :(-5) \\ \lambda &= -\frac{11}{5} & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl|l} 1+\lambda &= 3\mu & \cdot 2 \\ -2-2\lambda &= 1-\mu & \cdot 1 \\ \hline 0 &= 5\mu+1 & -1 \\ 5\mu &= -1 & :5 \\ \mu &= -\frac{1}{5} & \end{array}$$

La résolution de ① et ② donnent $\lambda = -\frac{11}{5}$ et $\mu = -\frac{1}{5}$.

Vérifions si ces solutions satisfont l'équation ③ :

$$3 - \lambda = 3 - \left(-\frac{11}{5}\right) = \frac{26}{5} \quad \text{et} \quad -1 + 2\mu = -1 + 2\cdot\left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{7}{5}.$$

Cela ne marche pas.

Ainsi le système de 3 équations à 2 inconnues n'a pas de solution.

On est donc dans les possibilités 2) ou 4).

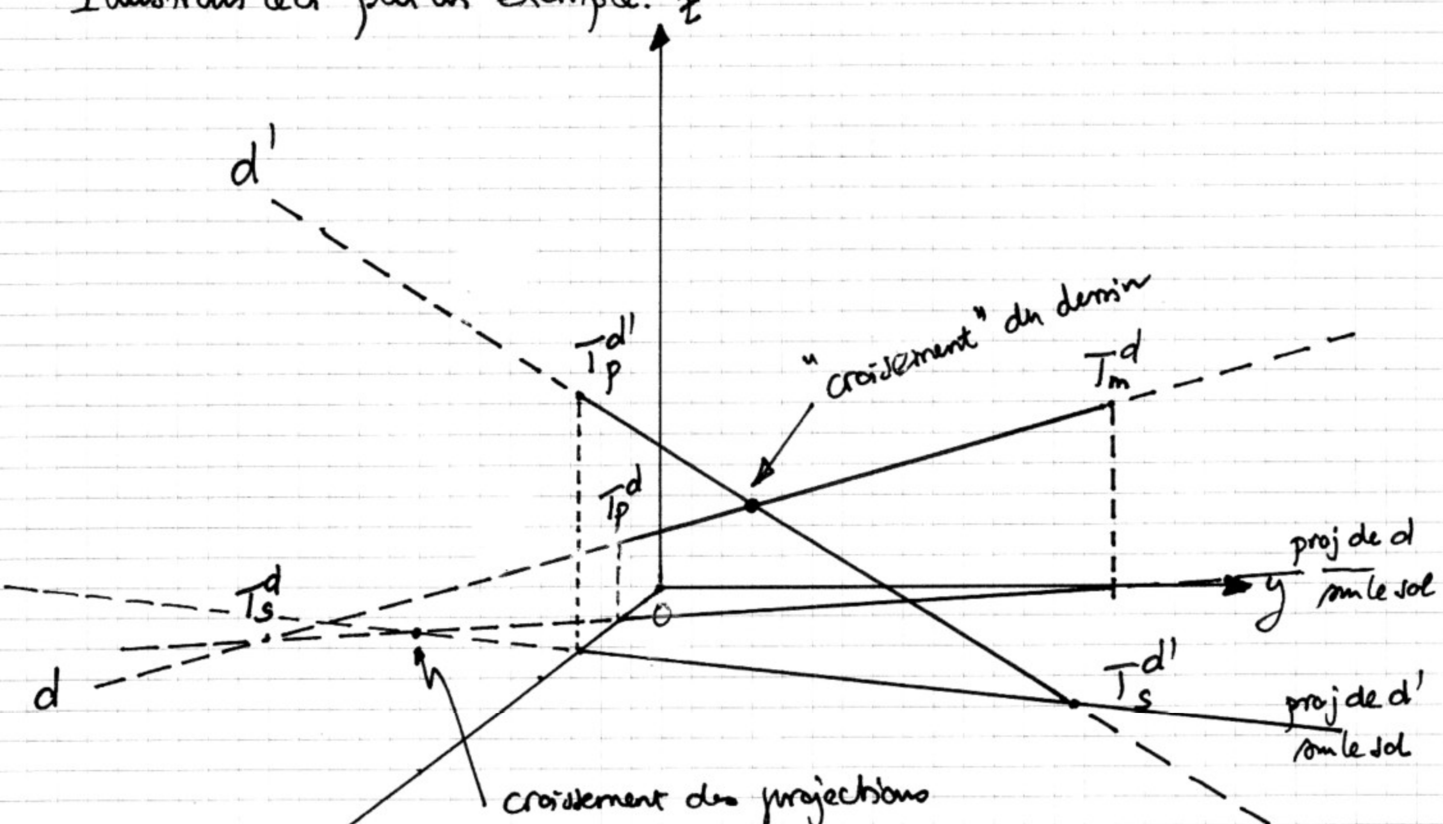
Regardons les vecteurs directeurs de d et d'.

Le vecteur directeur de d est : $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Le vecteur directeur de d' est : $\vec{d'} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

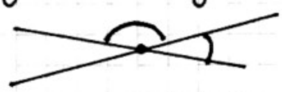
Les vecteurs ne sont clairement pas parallèle (il n'existe pas de nombre k tel que $\vec{d} = k \cdot \vec{d'}$).
On est donc dans la possibilité 4).
Ainsi d et d' sont gauches.

Lorsque les 2 droites sont dessinées dans un système d'axes, on regarde leurs projections sur les plans de référence. Si les intersections de ces projections ne correspondent pas au point d'intersection du dessin des 2 droites, les droites sont gauches. (Les possibilités de droites confondues et parallèles se voient immédiatement sur le dessin.) Si les intersections des projections correspondent toutes au point d'intersection du dessin, alors les droites sont sécantes.
Illustrons ceci par un exemple:



Comme les 2 croisements ne sont pas l'un en-dessous de l'autre (ce qui serait le cas si les droites étaient sécantes), on en conclut qu'elles sont gauches.

Lorsque 2 droites sont sécantes, on peut chercher la <u>valeur de l'angle aigu entre ces 2 droites</u> (sauf si les droites sont perpendiculaires, il y a toujours un angle aigu et un angle obtus entre deux droites, leur somme étant 180° :



c'est pourquoi on cherche à priori l'angle aigu).
Si $\vec{d_1}$ est un vecteur directeur de la 1ère droite et $\vec{d_2}$ un vecteur directeur de la 2e droite, alors l'angle aigu α entre les 2 droites est donné par :

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{d_1} \cdot \vec{d_2}|}{\|\vec{d_1}\| \cdot \|\vec{d_2}\|}.$$

On cherche parfois à calculer la <u>distance entre un point et une droite.</u>
Si d, la droite, est donnée par un point A et un vecteur directeur $\vec{d}$, la distance d'un point P à la droite d est donnée par

$$\frac{\|\overrightarrow{AP} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}.$$

Si 2 points définissent une droite, 3 points non alignés définissent un <u>plan.</u>
En fait, pour déterminer exactement un plan, il faut un point et deux vecteurs non parallèles (si le plan est donné par 3 points A, B et C, il est aussi donné par le point A et les 2 vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ par exemple).
On peut alors définir les <u>équations paramétriques du plan :</u>
Soient $A(a_1; a_2; a_3)$ un point du plan et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$, alors les coordonnées d'un point quelconque $P(x; y; z)$ sont données par les relations

$$\begin{cases} x = a_1 + v_1\lambda + w_1\mu \\ y = a_2 + v_2\lambda + w_2\mu \\ z = a_3 + v_3\lambda + w_3\mu, \end{cases}$$

où λ et μ sont des nombres réels (appelés paramètres).
Ces relations sont les équations paramétriques du plan.

En éliminant λ et μ dans ces 3 relations, on arrive à une équation plus simple pour le plan. C'est <u>l'équation cartésienne du plan.</u>

Si, par exemple, le plan est donné par les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x = 3 + \lambda - 2\mu & (1) \\ y = -2 - 3\lambda + \mu & (2) \\ z = 1 - \lambda + \mu & (3). \end{cases}$$

On va éliminer les paramètres λ et μ.

Eliminons tout d'abord μ dans les couples (1)-(2) et (1)-(3) :

$$\begin{array}{ll|l} (1) & x = 3+\lambda-2\mu & \cdot 1 \\ (2) & y = -2-3\lambda+\mu & \cdot 2 \\ \hline & x+2y = -1-5\lambda \quad (4) & \end{array} \qquad \begin{array}{ll|l} (1) & x = 3+\lambda-2\mu & \cdot 1 \\ (3) & z = 1-\lambda+\mu & \cdot 2 \\ \hline & x+2z = 5-\lambda \quad (5) & \end{array}$$

Eliminons maintenant λ dans le couple (4)-(5) :

$$\begin{array}{ll|l} (4) & x+2y = -1-5\lambda & \cdot(-1) \\ (5) & x+2z = 5-\lambda & \cdot 5 \\ \hline & 4x-2y+10z = 26. & \end{array}$$

On soustrait 26 des 2 côtés, puis on divise par 2 :

on obtient $2x - y + 5z - 13 = 0$, ce qui est l'équation cartésienne du plan.

L'équation cartésienne du plan est donc une équation de la forme

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Les nombres a, b et c ont la propriété que le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est perpendiculaire au plan.

Cette propriété est très utile pour déterminer l'équation cartésienne du plan sans passer par ses équations paramétriques (l'équation cartésienne est toujours la forme utilisée).

Si on doit, par exemple, chercher l'équation cartésienne du plan passant par $A(3;-1;2)$, $B(5;1;1)$ et $C(-1;6;3)$, on va chercher un vecteur perpendiculaire au plan.

Or, on sait que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$.

Ainsi le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est perpendiculaire au plan.

On a :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1-(-1)\cdot 8 \\ (-1)\cdot(-4)-2\cdot 1 \\ 2\cdot 8-2\cdot(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+8 \\ 4-2 \\ 16+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 24 \end{pmatrix}$.

le vecteur est perpendiculaire au plan, donc le vecteur $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}$ aussi

$\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 24 \end{pmatrix} \right)$.

On peut donc prendre $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}$ pour le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, autrement dit, on peut prendre $a=5$, $b=1$ et $c=12$.

Ainsi l'équation cartésienne du plan s'écrira $5x+y+12z+d=0$.

Reste à déterminer d.

Pour cela on utilise un des points connus du plan, par exemple $A(3;-1;2)$.

En remplaçant dans l'équation du plan x par 3, $y=-1$ et z par 2, cela doit jouer puisque A est un point du plan.

On obtient : $5\cdot 3+(-1)+12\cdot 2+d=0$, i.e.

$15-1+24+d=0$, i.e

$38+d=0$, i.e. $d=-38$.

L'équation du plan est donc finalement $5x+y+12z-38=0$.

Comme cas particulier d'équations cartésiennes, on a :

<u>équation du sol :</u> $z=0$

<u>équation de la paroi :</u> $y=0$

<u>équation du mur :</u> $x=0$.

On peut s'intéresser à la <u>position relatives de 2 plans.</u>

Il y a 3 possibilités :

1) les plans sont confondus ;
2) les plans sont parallèles (sans être confondus) ;
3) les plans sont sécants (ils se coupent selon une droite).

Pour déterminer cette position, on regarde tout d'abord les vecteurs normaux (perpendiculaires au plan) :

si le premier plan a pour équation $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, le vecteur $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ est perpendiculaire au plan ;

si le deuxième plan a pour équation $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$, le vecteur $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ est perpendiculaire au plan.

Si $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont parallèles, alors les plans sont parallèles ou confondus.

Si un point du premier plan appartient au deuxième plan, les plans sont alors confondus. Si ce point n'appartient pas au deuxième plan, les plans sont parallèles sans être confondus.

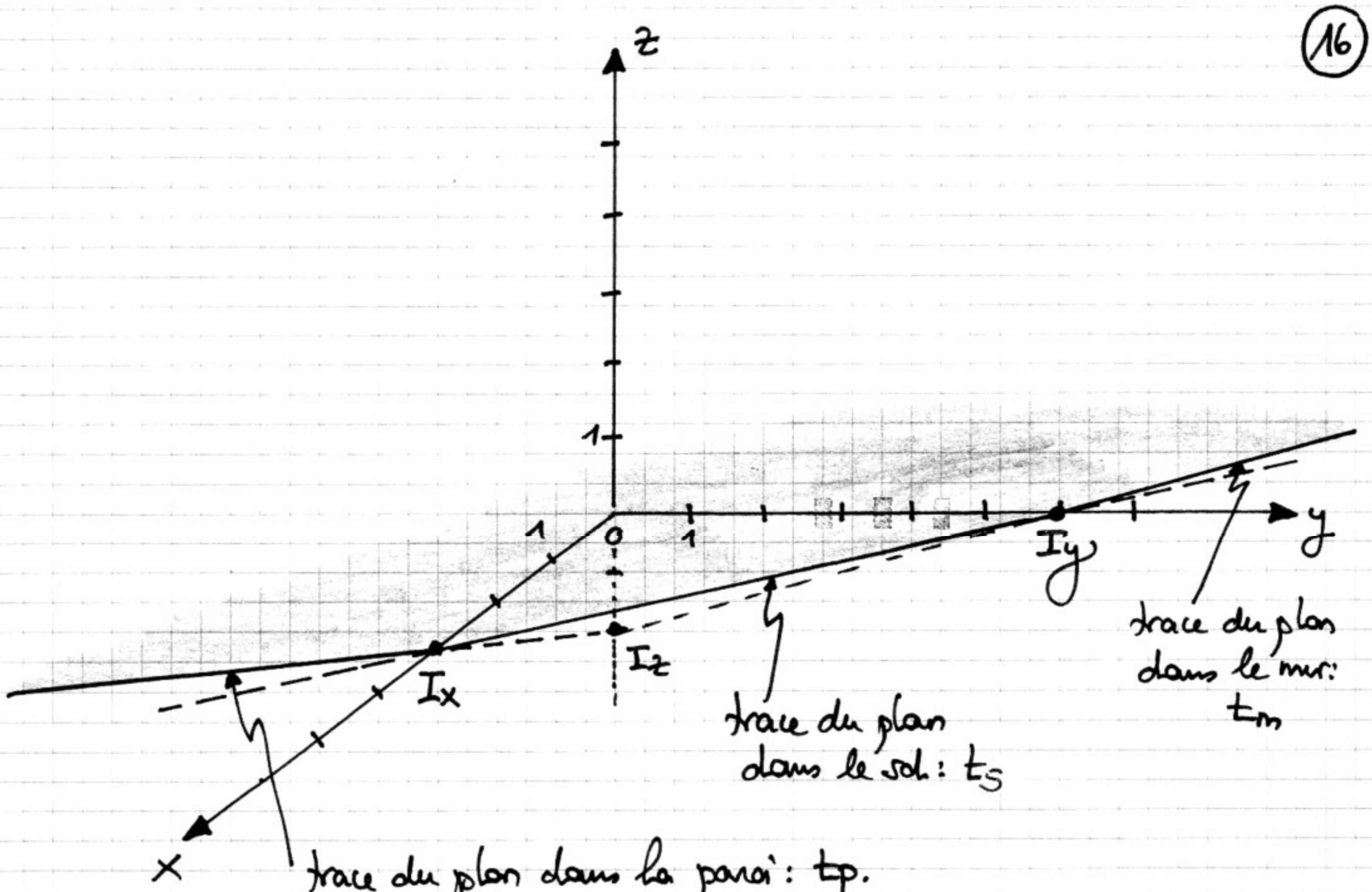
Si $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas parallèles, alors les plans sont sécants.
Pour trouver la droite d'intersection, le plus simple est d'en trouver 2 points, i.e. trouver 2 solutions au système $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$.

Par exemple, on peut prendre $x=0$ et résoudre le système de 2 équations à 2 inconnues restant, ce qui nous donne un 1er point, puis prendre $y=0$ et résoudre le système de 2 équations à 2 inconnues restant, ce qui nous donne un 2e point.
Trouver les équations paramétriques de la droite d'intersection des deux plans revient à trouver les équations de la droite passant par 2 points connus (les 2 points que l'on vient de trouver).

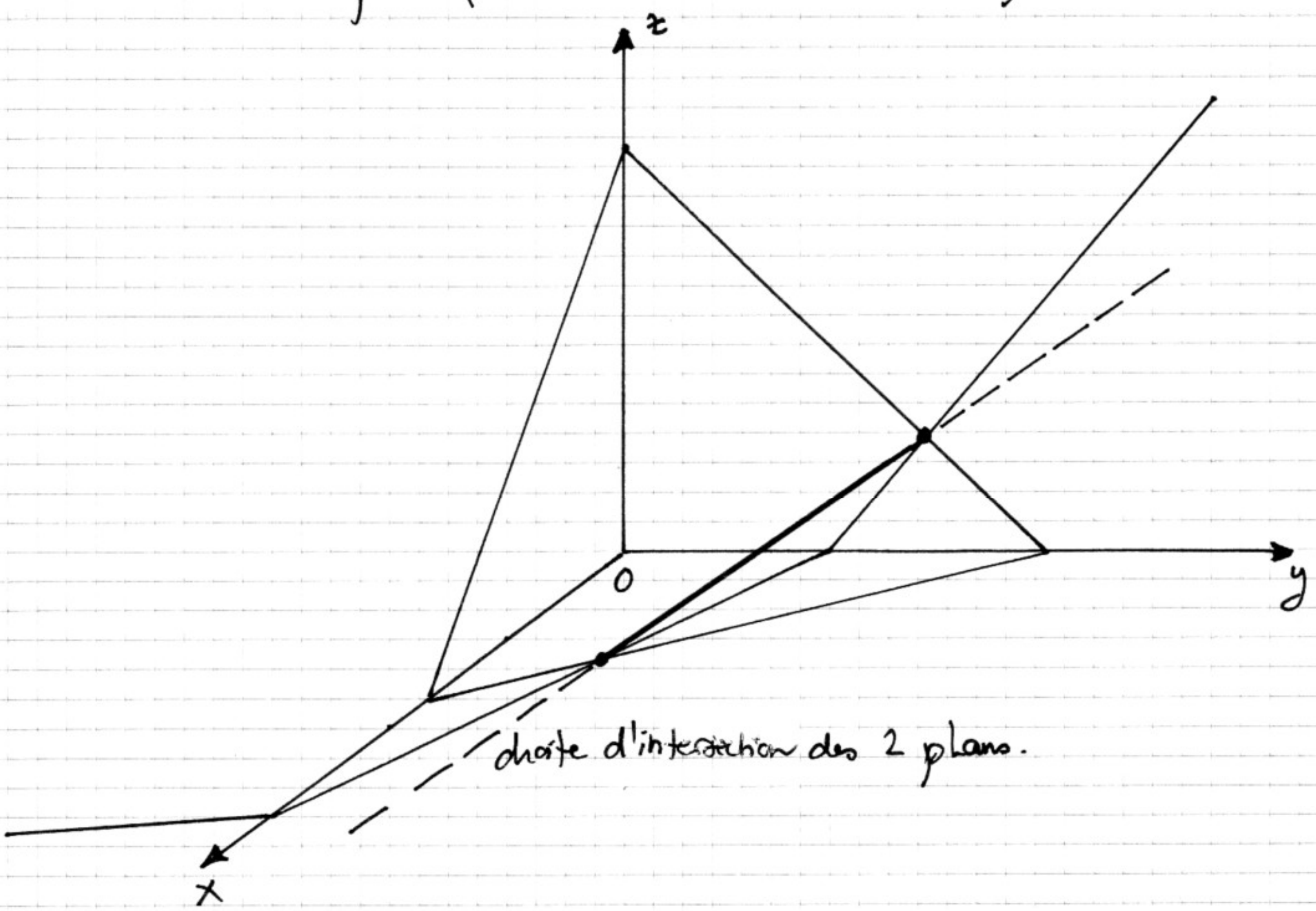
On peut aussi trouver géométriquement la droite d'intersection de deux plans, comme on le verra plus loin.

Lorsqu'on veut <u>dessiner un plan dans un système d'axes</u>, on commence par trouver les <u>intersections du plan avec les axes de référence</u>, puis, en les reliant par paires, on trouve ce qu'on appelle les <u>traces du plan.</u>

Illustrons ceci par un exemple : soit le plan donné par l'équation cartésienne $2x+y-3z=6$.
On cherche les intersections avec les axes :
intersection avec l'axe x : on pose $y=z=0$;
on trouve $2x=6$, i.e. $x=3$;
ainsi $I_x(3;0;0)$.
intersection avec l'axe y : on pose $x=z=0$;
on trouve $y=6$;
ainsi $I_y(0;6;0)$.
intersection avec l'axe z : on pose $x=y=0$;
on trouve $-3z=6$, i.e. $z=-2$;
ainsi $I_z(0;0;-2)$.
Dans un système d'axes, on obtient :



Lorsqu'on cherche à dessiner l'intersection de deux plans, il suffit de relier les intersections des traces dans le sol, des traces dans le mur et des traces dans la paroi (ou au moins deux d'entre elles) :



On doit souvent chercher à calculer la <u>distance d'un point à un plan.</u>

Si le plan est donné par l'équation $ax + by + cz + d = 0$ et le point par $(x_0 ; y_0 ; z_0)$, alors la distance du point au plan est donnée par : $$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Si on doit calculer <u>l'angle entre une droite et un plan</u>, on calcule tout d'abord l'angle entre un vecteur directeur de la droite et un vecteur normal du plan, puis on trouve l'angle entre la droite et le plan en soustrayant l'angle trouvé à $90°$:
si le vecteur directeur de la droite est $\vec{d}$ et le vecteur normale au plan est $\vec{n}$, alors l'angle entre la droite et le plan est donné par : $$90° - \cos^{-1}\left(\frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{d}\| \cdot \|\vec{n}\|}\right).$$

Si on doit calculer <u>l'angle aigu entre deux plans</u> (comme pour les droites, il existe un angle aigu et un angle obtus entre 2 plans), cet angle sera égal à l'angle entre 2 normales à chaque plan :
si $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont des normales au plan, alors l'angle entre les deux plans sera donné par : $$\cos^{-1}\left(\frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{\|\vec{n_1}\| \cdot \|\vec{n_2}\|}\right).$$

Un autre objet que l'on étudie dans l'espace est la <u>sphère.</u>

Une sphère est caractérisées par un centre et un rayon.
Si le centre est $K(x_0 ; y_0 ; z_0)$ et le rayon r, <u>l'équation de la sphère</u> est : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$.

Ainsi, si le centre de la sphère est $(1 ; -2 ; 3)$ et le rayon 6, l'équation de la sphère est $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 36$ $(= 6^2)$.
Inversement, si l'équation de la sphère est :
$(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 25$,
son centre est $(-3 ; 2 ; 4)$ et son rayon est 5 $(5^2 = 25)$.

Si l'équation de la sphère n'est pas donné sous la forme ci-dessus, on doit transformer l'équation donnée pour qu'elle soit de la bonne forme.

Par exemple, si on nous donne l'équation suivante :

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y+8z-43=0 \qquad \text{réorganisation des termes}$$
$$x^2-2x+y^2-4y+z^2+8z-43=0 \qquad \text{ajouter et soustraire des nombres}$$
$$x^2-2x+1-1+y^2-4y+4-4+z^2+8z+16-16-43=0 \qquad \text{identités remarquables}$$
$$(x-1)^2-1+(y-2)^2-4+(z+4)^2-16-43=0 \qquad \text{réduction}$$
$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+4)^2-64=0 \qquad +64$$
$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=64$$

L'équation $x^2+y^2+z^2-2x-4y+8z-43=0$ est donc l'équation d'une sphère de centre $(1;2;-4)$ et de rayon 8.

On s'intéresse parfois à la position relative d'une droite et d'une sphère.
On a alors 3 possibilités :

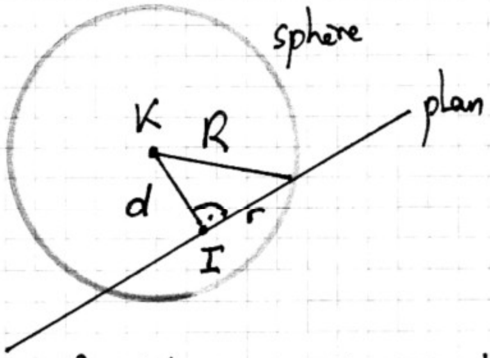
1) Si la distance du centre de la sphère à la droite est strictement inférieure au rayon de la sphère, la droite coupe la sphère en deux points ;
2) Si la distance du centre de la sphère à la droite est égale au rayon de la sphère, la droite est tangente à la sphère (il n'y a qu'une intersection entre la droite et la sphère) ;
3) Si la distance du centre de la sphère à la droite est strictement supérieure au rayon de la sphère, la droite ne coupe pas la sphère.

Pour déterminer le ou les points d'intersections d'une droite et d'une sphère, on substitue les équations paramétriques de la droite dans l'équation de la sphère, ce qui nous donne une équation du 2^e degré avec le paramètre de la droite ; on la résoud, puis on introduit la ou les solutions dans les équations paramétriques de la droite pour obtenir les coordonnées du ou des points d'intersection.

Si on s'intéresse à la position relative d'un plan et d'une sphère, on a aussi 3 possibilités :

1) Si la distance du centre de la sphère au plan est strictement inférieure au rayon de la sphère, le plan coupe la sphère selon un cercle ;
2) Si la distance du centre de la sphère au plan est égale au rayon de la sphère, le plan est tangent à la sphère (il y a un seul point de contact) ;
3) Si la distance du centre de la sphère au plan est strictement supérieure au rayon de la sphère, le plan ne coupe pas la sphère.

Dans le cas 1), on sera intéressé à trouver les coordonnées du centre du cercle d'intersection et son rayon.
Soit I le centre du cercle d'intersection et r son rayon.
Soit K le centre de la sphère et R son rayon.
Le vecteur $\overrightarrow{IK}$ est perpendiculaire au plan.
Connaissant l'équation cartésienne du plan, on peut trouver un vecteur normal au plan et prendre ce vecteur pour $\overrightarrow{IK}$.
On peut alors écrire les équations paramétriques de la droite passant par I et K (on connaît K et $\overrightarrow{IK}$).
En les substituant dans l'équation du plan, on en déduira les coordonnées de I (I est l'intersection de la droite passant par I et K et du plan).
Pour trouver le rayon r du cercle d'intersection, on utilise le théorème de Pythagore :



on calcule d, la distance de K au plan ;
avec le théorème de Pythagore, on aura : $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

Dans le cas 2), on est intéressé à trouver les coordonnées du point de contact de la sphère et du plan.
Soit K le centre de la sphère et T le point de contact.
Le vecteur $\overrightarrow{KT}$ est perpendiculaire au plan.
Connaissant l'équation cartésienne du plan, on peut trouver un vecteur normal au plan et prendre ce vecteur pour $\overrightarrow{KT}$.
On peut alors écrire les équations paramétriques de la droite passant par K et T (on connaît K et $\overrightarrow{KT}$).
En les substituant dans l'équation du plan, on en déduira les coordonnées de T (T est l'intersection du plan et de la droite passant par K et T.