Géométrie dans l'espace

5.1 Un rappel de géométrie plane

La géométrie plane peut s'étendre à la troisième dimension : l'espace. L'espace est "peuplé", entre autres, de points, de vecteurs, de droites et de plans. L'ensemble des vecteurs de l'espace se note V_3 et est **aussi appelé espace vectoriel de dimension 3.** Commençons par un rappel de V_2, l'ensemble des vecteurs du plan.

5.1.1 Points et vecteurs

Le plan est muni d'un repère $\{0, \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$, formé par l'origine et une paire de vecteurs non parallèles (on dit aussi **linéairement indépendants**), qu'on appelle **vecteurs de base.** Un **vecteur** possède deux **composantes** et s'écrit "en colonne" : Par exemple, $\vec{v} = \binom{-3}{4} = -3\vec{e_1} + 4\vec{e_2}$ (combinaison linéaire des vecteurs de base avec $\vec{e_1} = \binom{1}{0}$ et $\vec{e_2} = \binom{0}{1}$)
Les calculs avec les vecteurs s'opèrent composante par composante. Nous savons tester si deux vecteurs sont parallèles.
Un **point** du plan possède deux coordonnées et s'écrit "ligne" $P(x; y)$. En particulier, l'origine a les coordonnées $(0; 0)$.

5.1.2 Relation de Chasles

Les coordonnées de $P(x; y)$ sont les composantes de $\overrightarrow{OP} = \binom{x}{y}$. La **relation de Chasles**

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

est un outil très utile. A l'aide de cette relation, nous avons pu déterminer **le point milieu d'un segment** et **le centre de gravité d'un triangle.**

5.1.3 Equation d'une droite

Une **droite**, ensemble de points alignés, est définie par deux points ou un point et un vecteur directeur, ou encore un point et un vecteur normal (perpendiculaire). Elle peut être donnée sous **forme paramétrique** ou sous **forme cartésienne**.
Nous savons aussi tester si **un point appartient à une droite** et déterminer la **position relative de deux droites....**

5.1.4 Géométrie métrique plane

Dans un second temps, nous avons étudié la **géométrie métrique plane : norme (longueur)** d'un vecteur, **produit scalaire** entre deux vecteurs, **distance entre deux points, distance entre un point et une droite, angle entre deux vecteurs, ...**

5.2 Points et vecteurs

5.2.1 Notations

Un **point** de l'espace est un triple de nombres réels : $P(x, y; z)$. Les **coordonnées** du point sont : x **l'abscisse**, y **l'ordonnée** et z **la cote.** Un **vecteur** de l'espace se note en **composantes** :$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

5.2.2 Indépendance linéaire

> Deux vecteurs sont **linéairement indépendants** s'ils ne sont pas parallèles, c'est-à-dire s'ils ne sont pas multiples l'un de l'autre. Trois vecteurs (non nuls) sont **linéairement indépendants** si $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ ne sont pas parallèles et $\vec{c} \neq \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ (aucune combinaison linéaire de deux des vecteurs ne "donne" le troisième).

▸ **Exemple :**

Les trois vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants.

Preuve :

$\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas parallèles. En effet

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{2}{3} \\ k_2 = -\frac{1}{2} \\ k_3 = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Comme $k_1 \neq k_2 \neq k_3$, les vecteurs et ne sont pas parallèles.

Vérifions maintenant l'équation suivante : $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$?

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 8 = 2\alpha + 3\beta & (1) \\ 3 = -\alpha + 2\beta & (2) \\ -4 = \alpha + 5\beta & (3) \end{cases}$$

Résolution du système "(1)-(2)" par exemple. On a

$$\begin{array}{r|l} 8 = 2\alpha + 3\beta & \\ 3 = -\alpha + 2\beta & \cdot 2 \\ \hline 8 = 2\alpha + 3\beta & \\ 6 = -2\alpha + 4\beta & + \\ \hline 14 = 7\beta & \beta = 2 \\ 8 = 2\alpha + 3 \cdot 2 & \alpha = 1 \end{array}$$

Test dans l'équation (3) :

$$\alpha + 5\beta = 1 + 5 \cdot 2 = 11 \neq -4$$

Et donc les vecteurs sont **linéairement indépendants.** □

5.2.3 Dépendance linéaire

> Trois vecteurs sont **linéairement dépendants** s'il existe deux nombres $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$ tels que $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$

▸ **Exemple :**

Les trois vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 14 \\ -11.5 \\ 12.5 \end{pmatrix}$ sont linéairement dépendants.

Preuve :

$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$?

$$\begin{pmatrix} 14 \\ -11.5 \\ 12.5 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 14 = -2\alpha + 3\beta & (1) \\ -11.5 = 7\alpha + 2\beta & (2) \\ -12.5 = \alpha + 5\beta & (3) \end{cases}$$

Résolution du système "(1)-(2)" par exemple. On a

$$\begin{array}{r|l} 14 = -2\alpha + 3\beta & \cdot 7 \\ -11.5 = 7\alpha + 2\beta & \cdot 2 \\ \hline 98 = -14\alpha + 21\beta & \\ -23 = 14\alpha + 4\beta & + \\ \hline 75 = 25\beta & \beta = 3 \\ 14 = -2\alpha + 3 \cdot 3 & \alpha = -2.5 \end{array}$$

Test dans l'équation (3) :

$$\alpha + 5\beta = -2.5 + 5 \cdot 3 = 12.5 = 12.5$$

Et donc les vecteurs sont **linéairement dépendants.** □

5.2.4 Base de l'espace

> On appelle **base** de l'espace tout triple de vecteurs linéairement indépendants. On la note par exemple $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

Décomposer le vecteur $\vec{d}$ dans la base $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ signifie l'exprimer comme une combinaison linéaire de $\vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$. Il s'agit donc de trouver les uniques α, β et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

5.2.5 Repère de l'espace

> **Un repère** de l'espace est défini par une base ainsi qu'un point O de l'espace choisi arbitrairement. Un repère se note $\{0, \vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$.

Un repère nous permet de localiser tout point de l'espace à partir de l'origine O. Nous travaillerons souvent avec **le repère orthonormé**$\{0, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$. Dans ce repère, les vecteurs de base sont unitaires et orthogonaux deux à deux. On a alors $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dorénavant, sans le rappeler à chaque occasion, nous travaillons dans un repère de l'espace.

5.2.6 Relation entre les points et les vecteurs

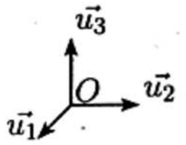
Soit le point $P(x; y; z)$. Alors le vecteur $\overrightarrow{OP}$ est $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot \vec{e_1} + y \cdot \vec{e_2} + z \cdot \vec{e_3}$
La relation de Chasles reste valable :

$$A(a_1, a_2, a_3) \text{ et } B(b_1, b_2, b_3) \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

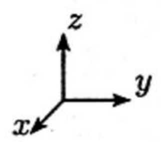
5.3 Représentations géométriques

5.3.1 Dessin du repère

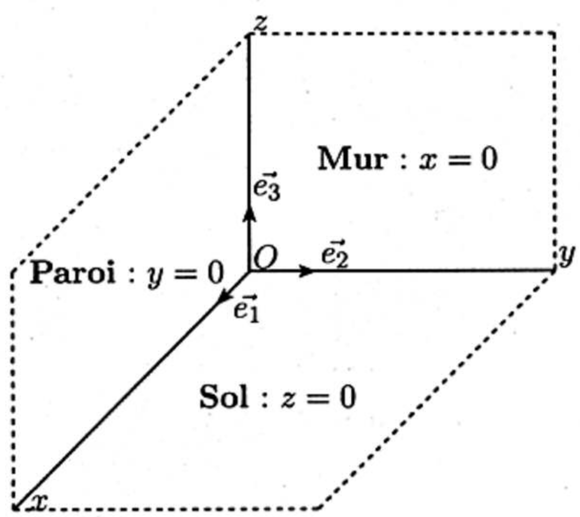
Le repère se dessine et s'oriente souvent ainsi :



ou plus simplement



5.3.2 Plans de référence



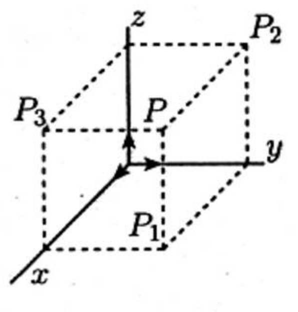
L'ensemble des points ...

a. **d'abscisse nulle** décrit un plan appelé **"mur"**
b. **d'ordonnée nulle** décrit un plan appelé **"paroi"**
c. **de cote nulle** décrit un plan appelé **"sol"**

5.3.3 Dessin d'un point

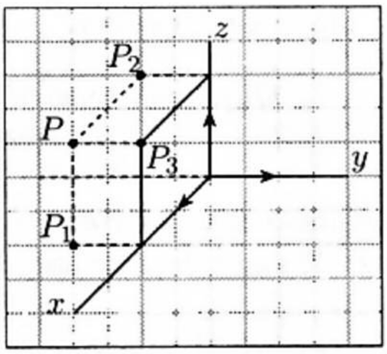
Pour visualiser un point $P(x; y; z)$ de l'espace, nous dessinons ses **projections** sur les plans de référence :

a. **Sur le sol** : $P_{sol}\,(x\,;y\,;0)$ ou $P_1\,(x\,;y\,;0)$
b. **Sur le mur** : $P_{mur}\,(0\,;y\,;z)$ ou $P_2\,(0\,;y\,;z)$
c. **Sur la paroi** : $P_{paroi}\,(x\,;0\,;z)$ ou $P_3\,(x\,;0\,;z)$



Il s'agit en fait des **projections orthogonales**, 'ombres' du point P sur les plans de référence.

► **Exemple :**

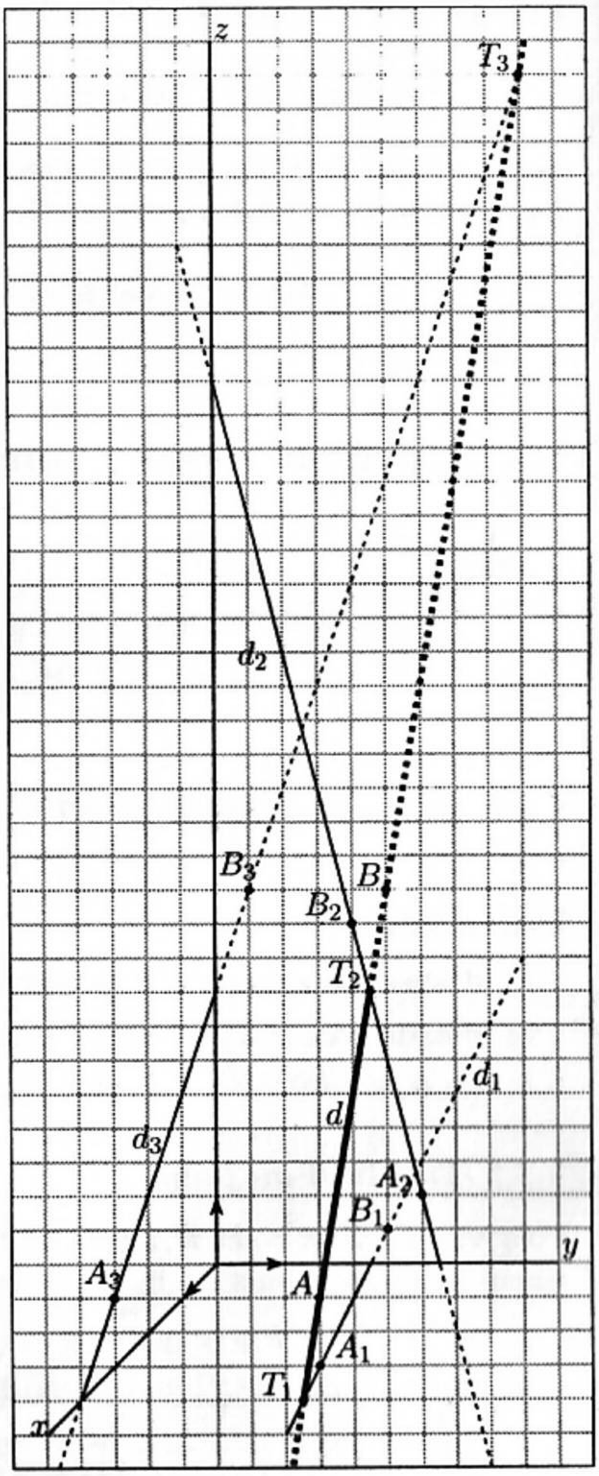


Représenter le point $P(2; -1; 1.5)$.
En complétant avec des parallèles, nous obtenons un parallélépipède en perspective. Les traits de construction placés derrière le mur, derrière la paroi ou sous le sol seront toujours en traitillé.

5.4 La droite

5.4.1 Représentation graphique de la droite

Pour dessiner (et bien visualiser) une droite dans l'espace, il faut également dessiner des projections. En effet, le problème est que nous devons la représenter sur un objet de dimension 2, notre feuille de papier.



Nous allons donc devoir utiliser certains 'artifices' afin de rendre la visualisation plus aisée. Pour commencer nous ne dessinerons que la partie visible de la droite et pour cela nous aurons besoins des **projections** de la droite ainsi que ses **traces**.
Appelons d la droite passant par les points A et$B$. Ses **projections** sont en général des droites. Ce sont en quelques sortes les ombres de la droite sur les plans de référence. La projection de la droite dans le sol se note d_1, celle dans le mur d_2 et celle dans la paroi d_3 . On utilise parfois la notation d',d'' et d'''.
Pour dessiner ces projections, on utilise les projections des points A et$B$. Comme seule la **partie visible** de la droite doit être tracée en trait plein (les parties sous le sol, derrière le mur et à gauche de la paroi sont en traitillé), nous devons connaître les points d'intersections de la droite avec les plans de référence, qu'on appelle **traces**. La trace de la droite dans le sol est T_1, celle dans le mur est T_2 et celle dans la paroi est T_3 . Comme pour les projections, on utilise parfois T',T'' et T'''.

► **Marche à suivre** pour dessiner une droite passant par A et B.

a. Dessiner les projections des points A et B sur les plans de références, c'est-à-dire A_1,A_2 et A_3 ainsi que B_1,B_2 et B_3.

b. La projection de d dans le sol, d_1, passe par A_1 et A_2 , idem pour d_2 et d_3 .

c. Construire les traces. Ces dernières se trouvent à l'intersection de d et de ses projections.

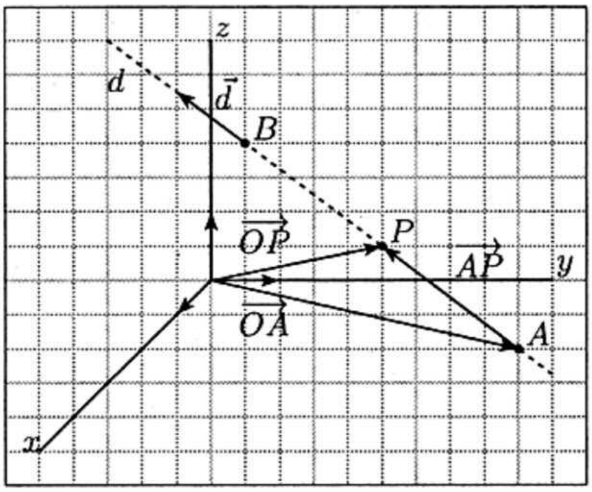
d. Dessiner la partie visible de la droite d.

► **Exemple :**

Dessiner la droite passant par les points $A(3; 3; 1)$ et $B(-1; 2; 5)$.

5.4.2 Equations paramétriques d'une droite

Comme en géométrie plane, une droite d de l'espace peut être donnée soit par deux points A et B soit par un point A et un vecteur $\vec{d}$, qui a la direction de la droite. On l'appelle **vecteur directeur**. Comme $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$ est aussi un vecteur directeur de la droite, les deux données sont similaires.



Soit P un point quelconque de la droite d. Alors $\overrightarrow{AP}$ et $\vec{d}$ sont parallèles. Vectoriellement, cela signifie qu'il existe un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{d}$$

Si $P(x;y;z) \in d$, $A(a_1;a_2;a_3) \in d$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de la droite d, alors on obtient :

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

La droite d est alors définie par des **équations paramétriques** :

$$d : \begin{cases} x = a_1 + \lambda d_1 \\ y = a_2 + \lambda d_2 \\ z = a_3 + \lambda d_3 \end{cases}$$

Attention, dans l'espace, les droites **ne peuvent pas** être données sous forme cartésienne !

5.4.3 Utilisations des équations paramétriques d'une droite

La droite d est donnée par les points $A(3;4;1)$ et $B(-1;2;5)$

a. Ecrire les équations paramétriques de d

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{d}. \text{ Ainsi, } d : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$$

b. Générer un point de d en choisissant une valeur pour λ.

Si $\lambda = -2$, on obtient le point $P(-1;2;5) \in d$

c. Les points $C(7;6;-3)$ et $D(-4,1;7)$ sont-il sur d ?

$$C \in d \text{ car } \begin{cases} 7 = 3 + 2\lambda & \Rightarrow \lambda = 2 \\ 6 = 4 + \lambda & \Rightarrow \lambda = 2 \\ -3 = 1 - 2\lambda & \Rightarrow \lambda = 2 \end{cases} \text{ et } D \notin d \text{ car } \begin{cases} -4 = 3 + 2\lambda & \Rightarrow \lambda = -3.5 \\ 1 = 4 + \lambda & \Rightarrow \lambda = -3 \\ 7 = 1 - 2\lambda & \Rightarrow \lambda = -3 \end{cases}$$

d. Trouver les coordonnées inconnues de $E(4,5;y_E;z_E)$ et $F(x_F;-2.8;z_F)$, 2 points de d.

$$E \in d \Rightarrow \begin{cases} 4.5 = 3 + 2\lambda & \Rightarrow \lambda = 0.75 \\ y_E = 4 + 0.75 & \Rightarrow y_E = 4.75 \\ z_E = 1 - 2(0.75) & \Rightarrow z_E = -0.5 \end{cases}$$

Finalement, on a le point $E(4.5;4.75;-0.5)$.

$$F \in d \Rightarrow \begin{cases} -2.8 = 4 + \lambda & \Rightarrow \lambda = -6.8 \\ x_F = 3 + 2(-6.8) & \Rightarrow x_F = -10.6 \\ z_F = 1 - 2(-6.8) & \Rightarrow z_F = 14.6 \end{cases}$$

Finalement, on a le point $F(-10.6;-2.8;14.6)$.

5.4.4 Calculs des projections et des traces d'une droite

Comme les traces sont les points d'intersection entre la droite et le sol, le mur et la paroi, on a que $T_1(x, y; 0)$, $T_2(0, y; z)$ et $T_3(x, 0; z)$

Pour les projections de la droite d : $\begin{cases} x = a_1 + \lambda d_1 \\ y = a_2 + \lambda d_2 \\ z = a_3 + \lambda d_3 \end{cases}$, on aura :

$$d_1 : \begin{cases} x = a_1 + \lambda d_1 \\ y = a_2 + \lambda d_2 \\ z = 0 \end{cases} \qquad d_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = a_2 + \lambda d_2 \\ z = a_3 + \lambda d_3 \end{cases} \qquad d_1 : \begin{cases} x = a_1 + \lambda d_1 \\ y = 0 \\ z = a_3 + \lambda d_3 \end{cases}$$

► **Exemple :** Soit la droite d : $\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$, on a alors les projections suivantes :

$$d' : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 0 \end{cases} \qquad d'' : \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 + \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases} \qquad d''' : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 0 \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$$

Pour les traces, on effectue les calculs suivants :

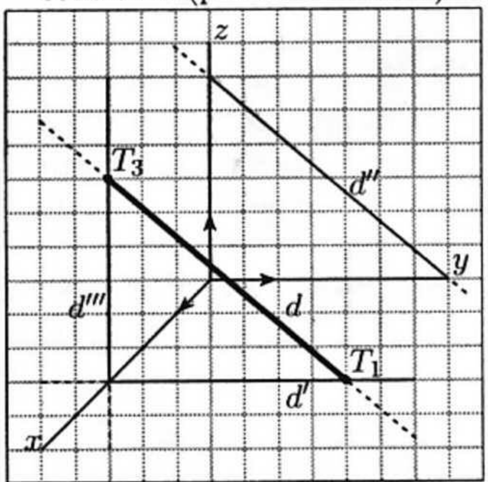
$T_1(x, y; 0)$, dans le sol
$$\begin{cases} z = 1 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0.5 \\ x = 3 + 2(0.5) \Rightarrow 4 \\ y = 4 + 0.5 \Rightarrow 4.5 \end{cases}$$
donc trace $T_1(4; 4.5; 0)$.

$T_2(0, y; z)$, dans le mur
$$\begin{cases} x = 3 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1.5 \\ y = 4 + (-1.5) \Rightarrow 2.5 \\ z = 1 - 2(-1.5) \Rightarrow 4 \end{cases}$$
donc trace $T_2(0; 2.5; 4)$.

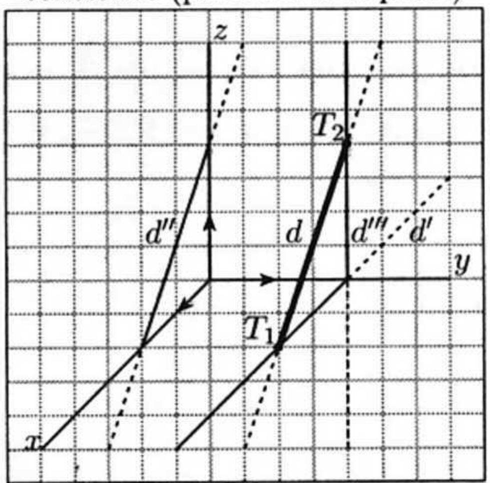
$T_3(x, 0; z)$, dans la paroi
$$\begin{cases} y = 4 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -4 \\ x = 3 + 2(-4) \Rightarrow -5 \\ y = 1 - 2(-4) \Rightarrow 9 \end{cases}$$
donc trace $T_3(-5; 0; 9)$.

5.4.5 Droites particulières

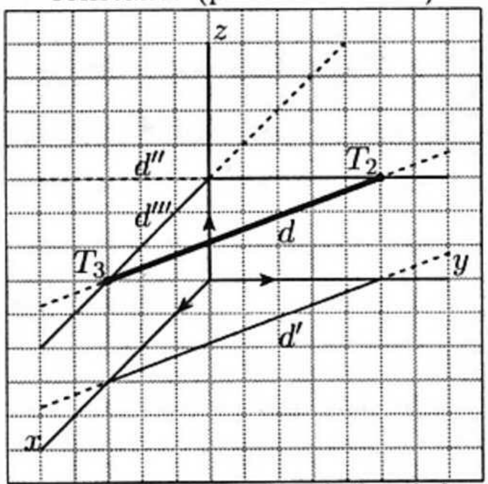
Droite frontale : abscisse constante (parallèle au mur)



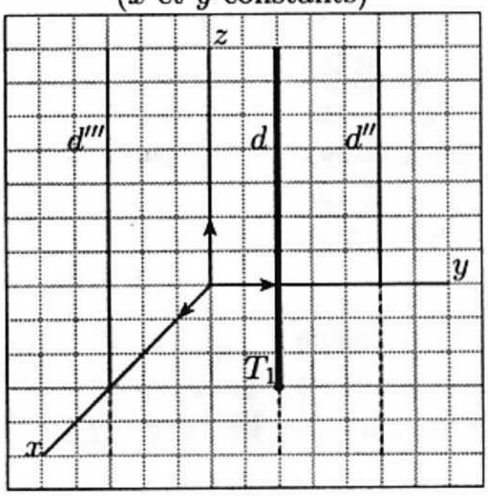
Droite de profil : ordonnée constante (parallèle à la paroi)



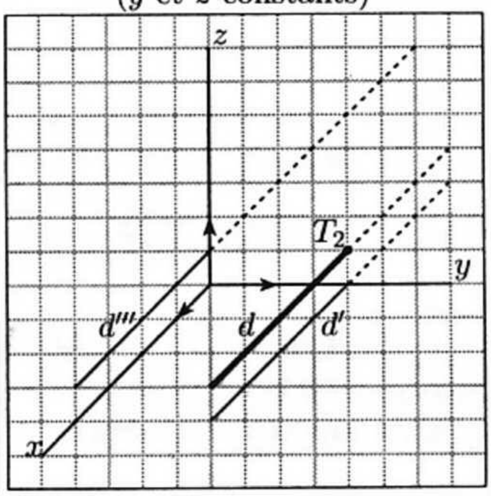
Droite horizontale : cote constante (parallèle au sol)



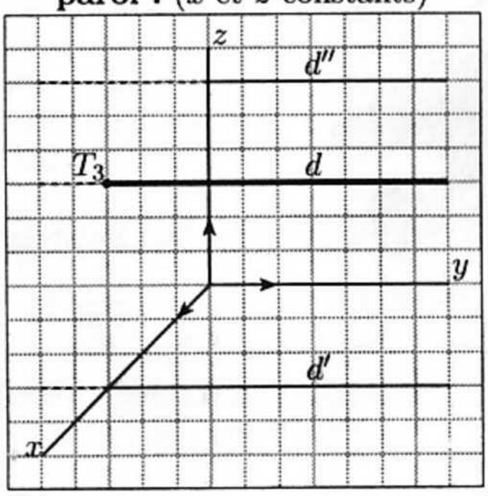
Droite vertical : ⊥ au sol (x et y constants)



Droite de bout : ⊥ au mur (y et z constants)



Droite perpendiculaire à la paroi : (x et z constants)

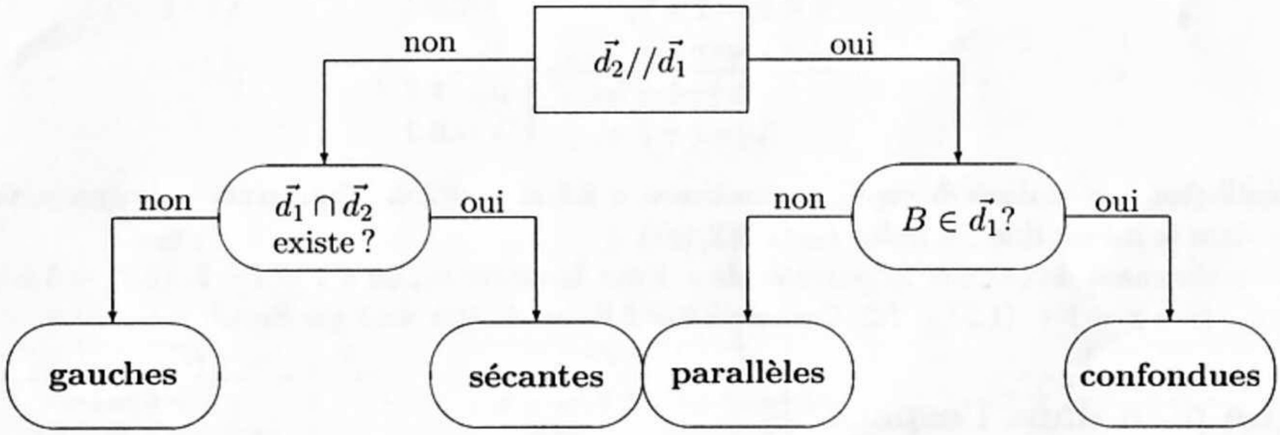


5.4.6 Position relative de deux droites

Dans l'espace, deux droites d_1 et d_2 données chacune par un point et un vecteur directeur (d_1 : passe par A parallèlement à $\vec{d_1}$ et d_2 passe par B parallàlement à $\vec{d_2}$) peuvent être :

a. confondues b. parallèles c. sécantes d. gauches

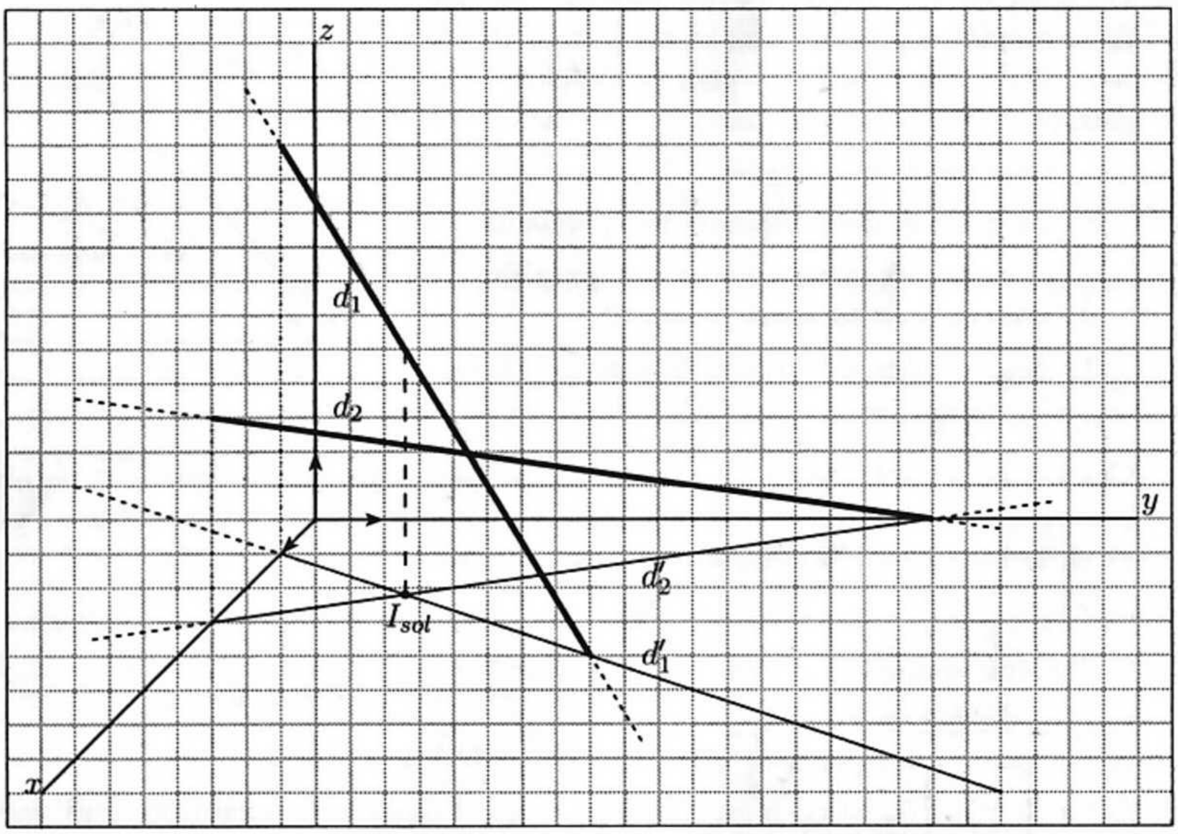
Pour déterminer la position de d_1 et d_2 , suivons l'organigramme suivant :



▶ **Exemple :**

Trouver la position relative des droites d_1 passant par $A(2,2;4)$ et parallèle au vecteur $\vec{d_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et d_2 passant par $B(1,6;1)$ et parallèle au vecteur $\vec{d_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

On peut répondre a cette question par dessin. Par dessin, la position relative est déterminée en comparant les droites et en comparant leurs projections dans le sol. Si les projections dans le sol sont sécantes, les droites sont sécantes ou gauches. Si les droites se coupent à la verticale de l'intersection de leurs projections dans le sol, alors elles sont sécantes. Sur l'exemple, les droites sont non parallèles, ni confondues. Au-dessus de l'intersection des projections dans le sol, il y a d'abord d_2 puis d_1. Donc d_2 est en dessous de d_1 . Les droites sont **gauches**.



On peut aussi résoudre cette question par calcul. Comme $\vec{d_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ n'est pas parallèle à $\vec{d_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, les droites sont sécantes ou gauches.

Recherchons l'intersection en posant $d_1 = d_2$

$$\begin{cases} x = 2+\lambda = 1+\mu & (1) \\ y = 2+2\lambda = 6-3\mu & (2) \\ z = 4-2\lambda = 1+\mu & (3) \end{cases}$$

En résolvant le système formé des équations (1) et (2), on obtient :

$$\begin{array}{rl|l} 2+\lambda= & 1+\mu & \cdot(2) \\ 2+2\lambda= & 6-3\mu & \cdot(-1) \\ \hline 4+2\lambda= & 2+2\mu & \\ -2-2\lambda= & -6+3\mu & + \\ \hline 2= & -4+5\mu & \mu = 1.2 \\ 2.2= & 2+\lambda & \lambda = 0.2 \end{array}$$

En remplaçant λ et μ dans d_1 ou d_2, on trouve $x = 2.2$ et $y = 2.4$. L'intersection des projections des droites dans le sol est donc le point $I_{sol}(2.2; 2.4; 0)$.
Il suffit maintenant de calculer la coordonnée z. Pour la droite d_1, on a $z = 4 - 2 \cdot (0.2) = 3.6$. Pour la droite d_2, on a $z = 1 + \cdot(1.2) = 2.2$. Comme $2.2 \neq 3.6$, les droites sont gauches.

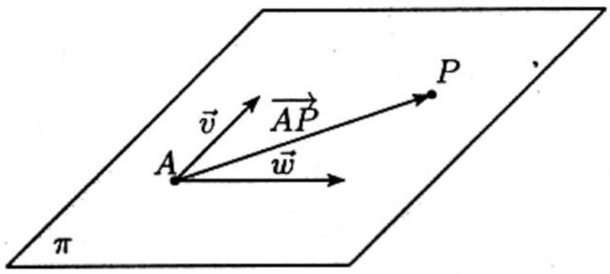
5.5 Le plan dans l'espace

5.5.1 Représentations paramétriques

Un plan est une surface plane et infinie de l'espace. Pour rendre les dessins compréhensibles, on représente souvent des bords imaginaires.

On a vu qu'une droite pouvait être donnée par deux points ou par un point et un vecteur directeur. Qu'en est-il pour un plan de l'espace ? Un plan peut être déterminé par :

a. trois points non alignés
b. un point et deux vecteurs indépendants
c. deux points et un vecteur non parallèle au vecteur liant les deux points
d. deux droites sécantes (différentes)
e. ...



Comme pour la droite en dimension 2, nous allons établir les équations paramétriques du plan. Supposons que le plan π soit déterminé par un point A et deux vecteurs **linéairement indépendants** $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Les points P du plan satisfont alors l'égalité :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w} \\ \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} &= \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w} \\ \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w} \end{aligned}$$

Cette dernière équation n'est rien d'autre que **l'équation paramétrique vectorielle du plan** π.

Si $P(p_1; p_2; p_3)$ et $A(a_1; a_2; a_3) \in \pi$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ des vecteurs non nuls et **linéairement indépendants** qui peuvent être contenus dans π, alors l'équation paramétrique du plan π est donnée par

$$\pi : \begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 + \mu w_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 + \mu w_2 \\ z = a_3 + \lambda v_3 + \mu w_3 \end{cases} \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

5.5.2 Equation cartésienne du plan

Contrairement à la droite, le plan possède une équation cartésienne dans l'espace. Voyons sur un exemple une manière de la déterminer.

▶ **Exemple :**

On considère le plan π passant par les points $A(3;-1;3)$, $B(2;2;-4)$ et $C(6;-2;0)$. Pour trouver des équations paramétriques de ce plan, on a besoin de deux vecteurs linéairement indépendants, par exemple $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$. On en déduit les équations paramétriques de π.

$$\pi : \begin{cases} x{=}3-\lambda+3\mu & (1) \\ y{=}-1+3\lambda-\mu & (2) \\ z{=}3-7\lambda-3\mu & (3) \end{cases}$$

On élimine μ avec les équations (1) et (2)

$$\begin{array}{r|l} x{=}3-\lambda+3\mu & \\ y{=}-1+3\lambda-\mu & \cdot 3 \\ \hline x{=}3-\lambda+3\mu & \\ 3y{=}-3+9\lambda-3\mu & + \\ \hline x+3y{=}8\lambda & (4) \end{array}$$

On élimine μ avec les équations (1) et (3)

$$\begin{array}{r|l} x{=}3-\lambda+3\mu & \\ z{=}3-7\lambda-3\mu & + \\ \hline x+z{=}6-8\lambda & (5) \end{array}$$

On additionne les équations (4) et (5)

$$\begin{array}{r|l} x+3y{=}8\lambda & \\ x+z{=}6-8\lambda & + \\ \hline 2x+3y+z{=}6 & \end{array}$$

Le plan peut donc aussi être décrit par l' **équation cartésienne** suivante : $\pi : 2x+3y+z-6=0$

5.5.3 Trace du plan et intersections du plan avec les axes

Les (points d') intersections du plan π avec les axes se calculent facilement, deux des coordonnées étant nulles. Reprenons le plan $\pi : 2x+3y+z-6=0$, on a alors

a. Pour l'intersection de π avec l'abscisse, $y=0$ et $z=0$ donc $2x-6=0$ et donc $x=3$. On obtient $\pi_x(3;0;0)$

b. Pour l'intersection de π avec l'ordonnée, $x=0$ et $z=0$ donc $3y-6=0$ et donc $y=2$. On obtient $\pi_y(0;2;0)$

c. Pour l'intersection de π avec la cote, $x=0$ et $y=0$ donc $x-6=0$ et donc $x=6$. On obtient $\pi_z(0;0;6)$

Les traces du plan π sont ses intersections avec les plans de référence : sol, mur, paroi. Dans la majorité des cas, ce sont des droites nommées π_1, π_2 et π_3. Ces droites se construisent à l'aide des intersections du plan π et des axes.

Trace dans le sol :

$$\vec{d_s} = \overrightarrow{\pi_x\pi_y} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\pi_1 : \begin{cases} x = 3-3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

Trace dans le mur :

$$\vec{d_m} = \overrightarrow{\pi_y\pi_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\pi_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 2-\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

Trace dans la paroi :

$$\vec{d_p} = \overrightarrow{\pi_x\pi_z} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

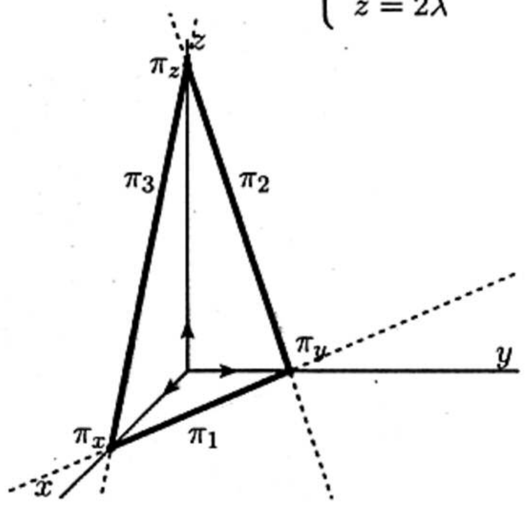
$$\pi_3 : \begin{cases} x = 3-\lambda \\ y = 0 \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

5.5.4 Représentation d'un plan

On représente un plan en dessinant ses traces. On commence par placer les intersections avec les axes, puis on les relie pour construire les traces. Attention aux parties visibles et invisibles du plan !

▶ **Exemple :**

Représenter le plan $\pi : 2x+3y+z-6=0$. Le calcul des intersections avec les axes et des traces a été effectué dans ce qui précède.



5.5.5 Dessin d'un plan passant par trois points A, B et C

Voici les étapes à suivre pour dessiner les traces du plan contenant les points A, B et C, sans le moindre calcul.

a. Placer A, B et C ainsi que leurs projections

b. Considérer la droite d' : passe par A et B
   - a) Dessiner d'
   - b) Dessiner sa projection dans le sol d'_1 : passe par A_1 et B_1
   - c) Eventuellement dessiner sa projection dans le mur d'_2 : passe par A_2 et B_2
   - d) Eventuellement dessiner sa projection dans la paroi d'_3 : passe par A_3 et B_3
   - e) Placer ses traces dans le sol S', mur M', et paroi P'

c. Considérer la droite d'' : passe par A et C (ou B et C) et refaire l'étape précédente. On dispose ainsi des traces de d'' dans le sol S'', le mur M'' et la paroi P''.

d. La trace du plan dans le sol est la droite π' : passe par S' et S''

e. A l'intersection de π' et de l'axe x se trouve le point π_x. A l'intersection de π' et de l'axe y se trouve le point π_y

f. La trace du plan dans le mur est la droite π'' : passe par M' et M''

g. A l'intersection de π'' et de l'axe z se trouve le point π_z

h. La trace du plan dans la paroi est la droite π''' : passe par P' et P''. Vérification : π''' doit passer par π_x et π_z

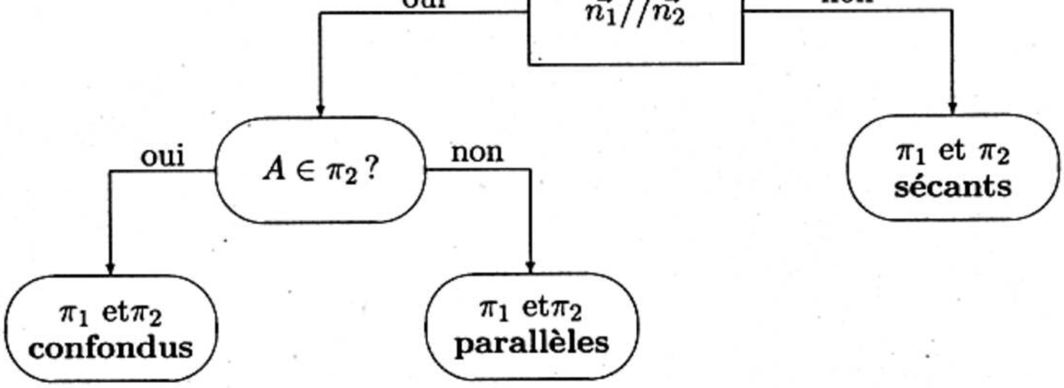
i. En conclusion du dessin, bien distinguer partie visible et invisible.

5.5.6 Intersection de deux plans

Deux plans π et σ sécants se coupent selon une droite. Comment la dessiner ?
Cette droite d'intersection i a pour trace dans le sol $S = \pi' \cap \sigma'$, dans le mur $M = \pi'' \cap \sigma''$ et dans la paroi $P = \pi''' \cap \sigma'''$.

5.5.7 Position relative de deux plans

Dans l'espace, deux plans peuvent être sécants, parallèles ou confondus. On reconnaît facilement deux plans confondus car leurs équations cartésiennes sont multiples l'une de l'autre. Deux plans parallèles ont des équations cartésiennes dont les coefficients sont proportionnels sauf le terme constant. Dans les autres cas, les deux plans sont sécants, ils se coupent selon une droite. Pour trouver une représentation paramétrique de cette dernière, il faut connaître deux de ses points. On détermine ses traces grâce aux traces des plans.
Représentons cela grâce à un organigramme. Soient deux plans $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, et $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. On considère en plus les vecteurs $\vec{n_1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n_2} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$. On trouve un point A de π_1.



La droite i d'intersection passe par l'intersection des traces des deux plans dans le sol, le mur et la paroi. Pour déterminer ces points, on résout des systèmes $2x2$ satisfaisant les conditions d'appartenance au sol, au mur et à la paroi :

$\pi_1 \cap \pi_2$ dans le sol	$\pi_1 \cap \pi_2$ dans le mur	$\pi_1 \cap \pi_2$ dans la paroi
$z = 0$	$x = 0$	$y = 0$
$\begin{array}{r\|c} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 & \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 & z=0 \\ \hline a_1x+b_1y+d_1=0 & \\ a_2x+b_2y+d_2=0 & \end{array}$	$\begin{array}{r\|c} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 & \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 & x=0 \\ \hline b_1y+c_1z+d_1=0 & \\ b_2y+c_2z+d_2=0 & \end{array}$	$\begin{array}{r\|c} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 & \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 & y=0 \\ \hline a_1x+c_1z+d_1=0 & \\ a_2x+c_2z+d_2=0 & \end{array}$

En résolvant ces 3 systèmes, on détermine I_{sol}, I_{mur} et I_{paroi}. On obtient une représentation paramétrique de la droite i en prenant le point I_{sol} et le vecteur $\overrightarrow{I_{sol}I_{mur}}$ par exemple.

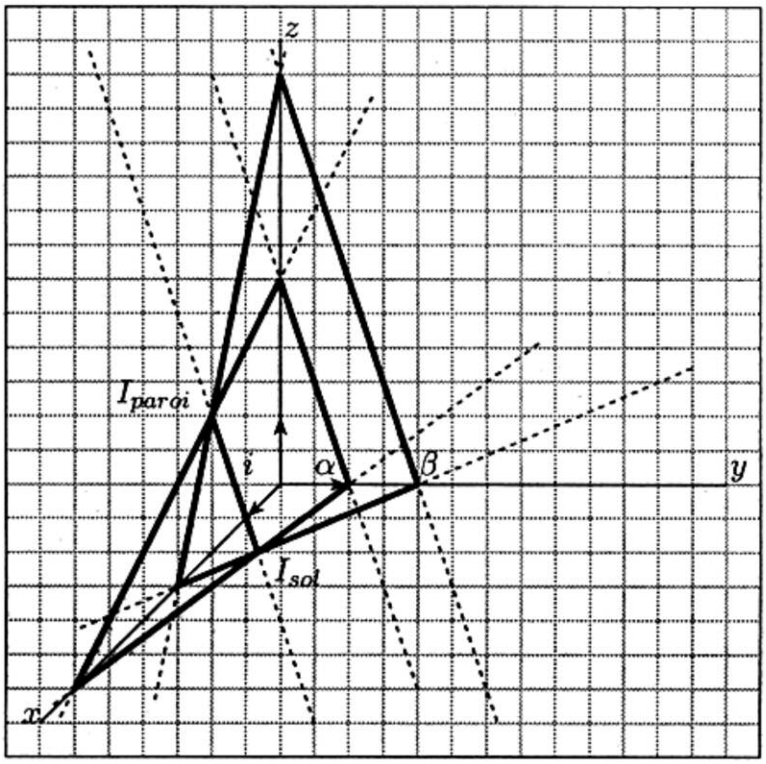
▶ **Exemple :**

On donne 2 plans par des équations cartésiennes :$\alpha : 2x + 3y + z - 6 = 0$ et $\beta : 2x + 12y + 4z - 12 = 0$. Déterminer leur position relative par dessin puis calculer l'éventuelle droite i d'intersection.

Les intersections avec les axes sont :

$$\text{Pour } \alpha : \begin{cases} \alpha_x(3;0;0) \\ \alpha_y(0;2;0) \\ \alpha_z(0;0;6) \end{cases}$$

$$\text{Pour } \beta : \begin{cases} \beta_x(6;0;0) \\ \beta_y(0;1;0) \\ \beta_z(0;0;3) \end{cases}$$



Par calcul, déterminons des équations paramétriques de la droite i d'intersection des deux plans. Pour cela, on cherche les intersections des traces des plans dans le sol, le mur et la paroi. Cela nous mène aux systèmes 2x2 suivants :

$\alpha \cap \beta$ dans le sol	$\alpha \cap \beta$ dans le mur	$\alpha \cap \beta$ dans la paroi
$z = 0$	$x = 0$	$y = 0$
$\begin{array}{r\|l} 2x+3y+z-6=0 & \\ 2x+12y+4z-12=0 & z=0 \\ \hline 2x+3y-6=0 & x=2 \\ 2x+12y-12=0 & y=\frac{2}{3} \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 2x+3y+z-6=0 & \\ 2x+12y+4z-12=0 & x=0 \\ \hline 3y+z-6=0 & y=\text{imp !} \\ 12y+4z-12=0 & z=\text{imp !} \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 2x + 3y + z - 6 = 0 & \\ 2x + 12y + 4z + 12 = 0 & y = 0 \\ \hline 2x + - 6 = 0 & x = 2 \\ 2x + 4z - 12 = 0 & z = 2 \end{array}$
$I_{sol}(2;\frac{2}{3};0)$	I_{mur} n'existe pas traces parallèles au mur	$I_{paroi}(2;0;2)$

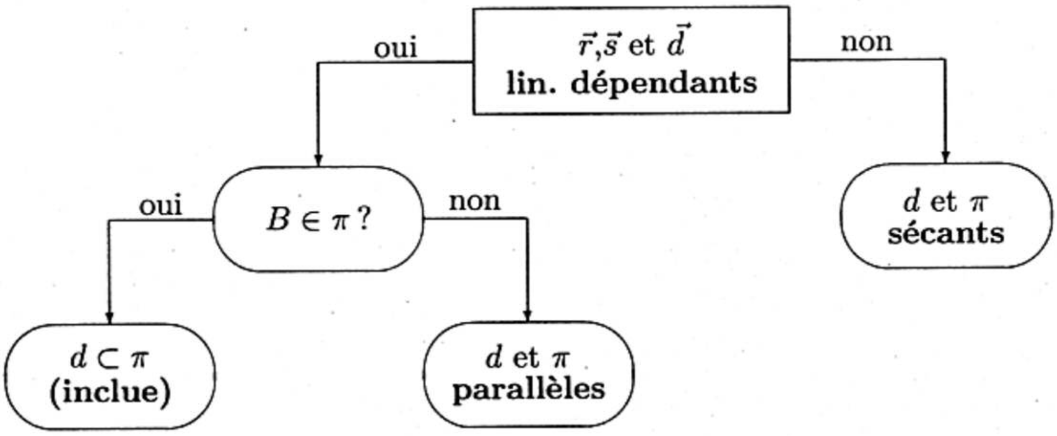
La droite d'intersection i passe par le point $I_{paroi}(2;0;2)$ et est parallèle au vecteur $\overrightarrow{I_{sol}I_{paroi}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{I_{sol}I_{paroi}} // \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$,on a,

$$i : \begin{cases} x = 2 \\ y = -\lambda \\ z = 2 + 3\lambda \end{cases}$$

5.5.8 Position relative d'une droite et d'un plan

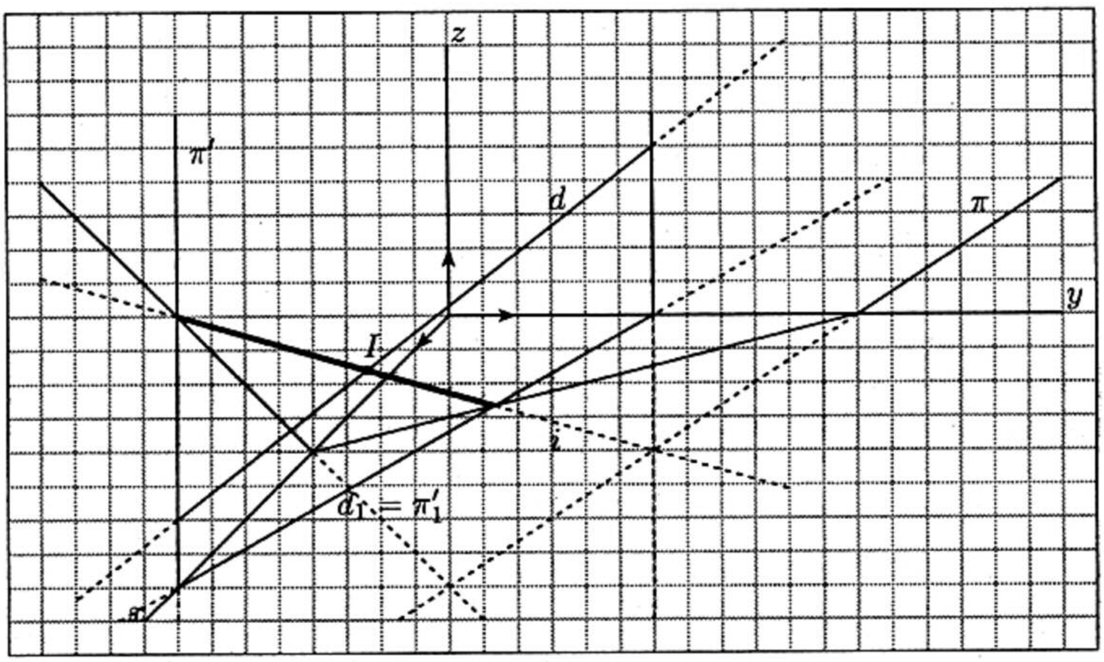
Comme pour la position relative de deux droites ou deux plans, on va suivre l'organigramme ci-dessous pour déterminer la position relative d'une droite et d'un plan. On considère un plan π donné par un point A et deux vecteurs linéairement indépendants $\vec{r}$ et $\vec{s}$ ainsi qu'une droite d donnée par un point B et un vecteur directeur $\vec{d}$.



5.5.9 Point d'intersection entre une droite et un plan

a. **Par dessin**

Pour déterminer le point d'intersection entre un plan π et une droite d, on doit construire le plan vertical π' contenant la droite d. On dessine ensuite la droite i d'intersection entre les deux plans. Le point d'intersection I est le point d'intersection des deux droites.



b. **Par calcul**

- Le plan est donné par une équation cartésienne, la droite par des équations paramétriques. Dans cette situation, on substitue le x, y et z de la droite dans l'équation cartésienne du plan. On obtient alors une équation à une inconnue : le paramètre λ. On substitue la valeur obtenue de λ dans les équations paramétriques de la droite pour obtenir les coordonnées du point d'intersection.

  ▶ **Exemple :**

  Déterminer le point d'intersection entre le plan $\pi : 2x + y + 2z - 6 = 0$ et la droite

$$d : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 4 + 3\lambda \\ z = -\lambda \end{cases} .$$

  On substitue x, y et z de d dans l'équation de π :

$$2(2+\lambda) + (4+3\lambda) + 2(-\lambda) - 6 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = -\frac{2}{3}$$

On remplace la valeur de λ dans d :

$$d:\begin{cases} x = 2 + (-\frac{2}{3}) = \frac{4}{3} \\ y = 4 + 3(-\frac{2}{3}) = 2 \\ z = -(-\frac{2}{3}) = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow I(\frac{4}{3}; 2; \frac{2}{3})$$

- Le plan et la droite sont donnés par des points et des vecteurs directeurs ou par une représentation paramétrique. Dans cette situation, on utilise l'organigramme du chapitre 5.5.8 avant de se lancer dans de longs calculs.

  ▶ **Exemple :**

  Déterminer, s'il existe, le point d'intersection entre le plan donné par π passant par $A(3;0;0)$ et parallèle aux vecteurs $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et la droite d passant par $B(2;4;0)$ et parallèle au vecteur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

  On commence par vérifier si les vecteurs $\vec{r}$, $\vec{s}$ et $\vec{d}$ sont linéairement dépendants ou non.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \lambda - \mu & \Rightarrow 1 \neq -\frac{3}{2} + 1 \\ 3 = -2\lambda & \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{2} \\ -1 = \mu & \end{cases}$$

  Comme la première équation n'est pas satisfaite par la valeur de λ et μ, les vecteurs $\vec{r}$, $\vec{s}$ et $\vec{d}$ sont linéairement indépendants. L'organigramme nous dit qu'il y a un point d'intersection. Pour déterminer ses coordonnées, on cherche tout d'abord l'équation cartésienne du plan π et des équations paramétriques de la droite d. Ensuite on utilise la même méthode que dans le 1^{er} cas.

$$\pi:\begin{cases} x = 3 + \lambda - \mu \\ y = -2\lambda \\ z = \mu \end{cases} \Rightarrow \pi : 2x + y + 2z - 6 = 0 \text{ et } d:\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 4 + 3\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

  On substitue x, y et z de d dans l'équation de π :

$$2(2+\lambda) + (4+3\lambda) + 2(-\lambda) - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}$$

  On remplace la valeur de λ dans d :

$$d:\begin{cases} x = 2 + (-\frac{2}{3}) = \frac{4}{3} \\ y = 4 + 3(-\frac{2}{3}) = 2 \\ z = -(-\frac{2}{3}) = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow I(\frac{4}{3}; 2; \frac{2}{3})$$

5.6 Distance entre 2 points, norme d'un vecteur

Comme l'espace vectoriel de dimension 2 (le plan), l'espace peut être muni d'une mesure de distance entre des points. Nous travaillons dans un repère standard $\{O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$
Soient deux points $A(a_1; a_2; a_3)$ et $B(b_1; b_2; b_3)$. Alors

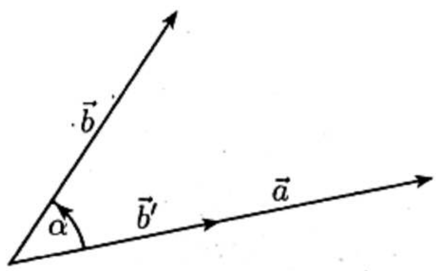
$$\text{dist}(A,B) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

▶ **Exemple :**

$A(-3;5;1)$ et $B(2;-4;8)$. Alors $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\text{dist}(A,B) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{5^2 + (-9)^2 + 7^2} \cong 12,45$

5.7 Produit scalaire

5.7.1 Définition



Comme en géométrie plane, Le produit scalaire entre deux vecteurs est défini de la manière suivante :

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}'\right\| \cdot s$$

avec $\vec{b}'$ la projection orthogonale de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$ et s le signe qui vaut $s = \begin{cases} 1 \text{ si } \alpha \text{ aigu} \\ -1 \text{ si } \alpha \text{ obtus} \end{cases}$

Pour les calculs, on adapte la forme vue en dimension 2 et on obtient le résultat suivant : le produit scalaire entre deux vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 3_2 \end{pmatrix}$ est

$$\boxed{\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$$

► **Propriétés :** Elles sont identiques que dans le plan. Pour rappel, la plus importante est la suivante :

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{a} \perp \vec{b}$$

► **Exemple :**

Soient $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ 2 vecteurs. On peut alors calculer

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = 0 - 3 + 5 = 2 \qquad \|\vec{a}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{30} \qquad \left\|\overrightarrow{b'}\right\| = \frac{|2|}{\sqrt{30}} \cong 0,365$$

5.7.2 Angle entre 2 vecteurs

Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs de l'espace. Alors l'angle entre les deux vecteurs est obtenu à l'aide du produit scalaire, comme vu dans le plan :

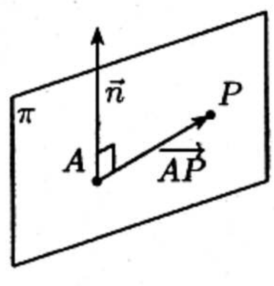
$$\boxed{\vec{a} \bullet \vec{b} = \cos(\varphi) \cdot \|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \Rightarrow \cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\|} \Rightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\|}\right)}$$

► **Exemple :**

Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors on a

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = 2 \qquad \|\vec{a}\| = \sqrt{30} \qquad \left\|\overrightarrow{b}\right\| = \sqrt{10} \qquad \cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{10}\sqrt{30}} \cong 0,12 \qquad \boxed{\varphi \cong 83,37^\circ}$$

5.7.3 Vecteur normal à un plan



Soit un plan π déterminé par un point $A(a_1; a_2; a_3)$, et par $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ un vecteur normal, c'est-à-dire perpendiculaire, au plan. Pour qu'un point $P(x; y; z) \in \pi$, il faut que $\overrightarrow{AP} \bullet \vec{n} = 0$

Ainsi $\begin{pmatrix} x - a_1 \\ y - a_2 \\ z - a_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow n_1 x + n_2 y + n_3 z + k = 0$ avec

$k = -a_1 n_1 - a_2 n_2 - a_3 n_3 = -\overrightarrow{OA} \bullet \vec{n}$

> Les composantes d'un vecteur normal à un plan π se retrouve comme coefficients de l'équation cartésienne du plan.

▶ **Exemple :**

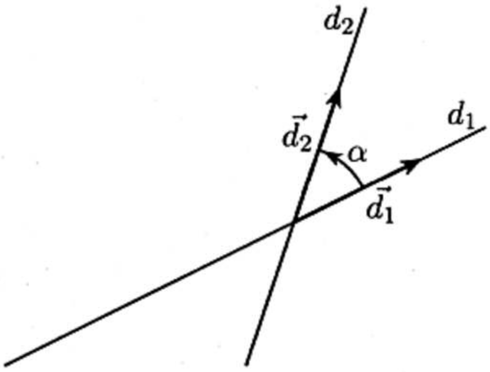
Pour trouver l'équation cartésienne du plan π passant par $A(7;2;-5)$ et perpendiculaire à $\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$, on peut

- soit calculer $\begin{pmatrix}x-7\\y-2\\z+5\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \pi : 3x+2y-z-30=0$
- soit injecter les composantes de $\vec{n}$ comme coefficients de l'équation cartésienne de π, c'est-à-dire $\pi : 3x+2y-z+k=0$ et remplacer $A\in\pi : 3\cdot 7+2\cdot 2-(-5)+k=0 \Rightarrow k=-30$ et donc $\pi : 3x+2y-z-30=0$

5.7.4 Angle entre deux droites

Si les droites sont sécantes alors l'angle aigu entre les deux droites est donné par soit l'angle α entre deux vecteurs directeurs choisis, ou son supplémentaire $\beta = 180° - \alpha$.
Pour obtenir directement l'angle aigu, utiliser

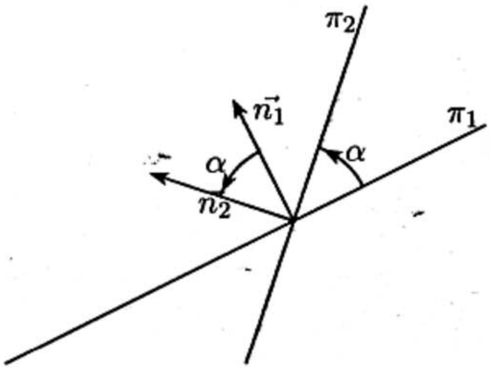
$$\cos(\alpha)=\frac{\left|\vec{d_1}\bullet\vec{d_2}\right|}{\left\|\vec{d_1}\right\|\cdot\left\|\vec{d_2}\right\|}$$



5.7.5 Angle entre deux plans

L'angle entre deux plans sécants π_1 et π_2 est identique à l'angle entre leurs vecteurs normaux $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$. A nouveau il y en a deux : l'angle et son supplémentaire.
Pour obtenir directement l'angle aigu, utiliser

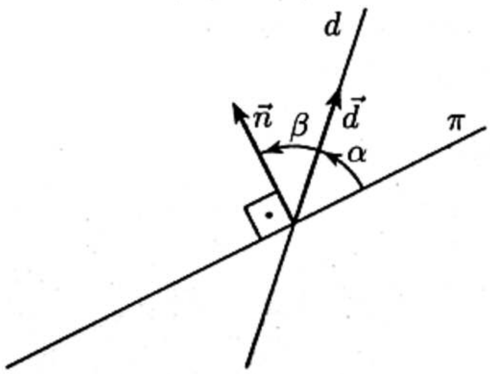
$$\cos(\alpha)=\frac{|\vec{n_1}\bullet\vec{n_2}|}{\|\vec{n_1}\|\cdot\|\vec{n_2}\|}$$



5.7.6 Angle entre une droite et un plan

L'angle α entre un plan π et une droite d sécante au plan s'obtient à l'aide de l'angle β entre un vecteur normal au plan et un vecteur directeur de la droite.
L'angle α est le complémentaire de l'angle aigu entre la droite et le vecteur normal au plan. On a alors $\alpha = 90° - \beta$.

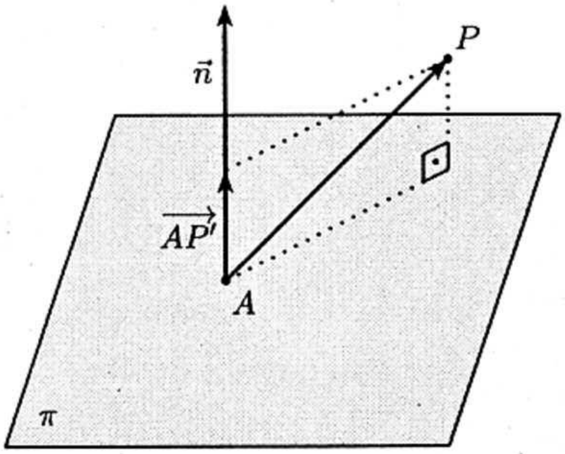
$$\alpha = 90° - \beta = 90° - \cos^{-1}\left(\frac{\left|\vec{n}\bullet\vec{d}\right|}{\|\vec{n}\|\cdot\left\|\vec{d}\right\|}\right)$$



5.7.7 Distance entre un point et un plan

On cherche la distance entre un point P et le plan π. Cette distance est la norme du vecteur $\overrightarrow{AP'}$, soit la norme de la projection de $\overrightarrow{AP}$ sur $\vec{n}$.

$$\text{dist}(P,\pi) = \left\|\overrightarrow{AP'}\right\| = \frac{\left|\overrightarrow{AP}\bullet\vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}$$



Soit $\pi : n_1x+n_2y+n_3z+k=0$ et $P\,(x_p;y_p;z_p)$.
On a alors
$\overrightarrow{AP}\bullet\vec{n} = \begin{pmatrix} x-a_1 \\ y-a_2 \\ z-a_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = n_1x+n_2y+n_3z+k.$

Ainsi on a :

$$\text{dist}(P,\pi) = \frac{|n_1x_p+n_2y_p+n_3z_p+k|}{\|\vec{n}\|}$$

▶ **Exemple :**

Soient $\pi : x+8y-3z+5=0$ et$P(2,-1;3)$. Calculer la distance entre P et π.

$$\text{dist}(P,\pi) = \frac{|1\cdot 2+8\cdot(-1)-3\cdot 3+5|}{\sqrt{74}} = \frac{10}{\sqrt{74}} \simeq 1.16$$

5.8 Produit vectoriel ou produit cross

5.8.1 Définition et propriétés

Considérons le plan π donnée par un point $A(a_1,a_2,a_3)$ et deux vecteurs générateurs $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$. nous allons déterminer l'équation cartésienne générale de π à partir des équations paramétriques de π. On peut écrire π

$$\pi : \begin{cases} x = a_1+\alpha v_1+\beta w_1 \\ y = a_2+\alpha v_2+\beta w_2 \\ z = a_3+\alpha v_3+\beta w_3 \end{cases}$$

On élimine α de deux manières différentes :

$$\begin{array}{rcll} x &=& a_1+\alpha v_1+\beta w_1 & \cdot v_2 \\ y &=& a_2+\alpha v_2+\beta w_2 & \cdot -(v_1) \\ \hline v_2x &=& v_2a_1+\alpha v_1v_2+\beta w_1v_2 & \\ -v_1y &=& -v_1a_2-\alpha v_1v_2-\beta v_1w_2 & + \\ \hline v_2x-v_1y &=& v_2a_1-v_1a_2+\beta w_1v_2-\beta v_1w_2 & \\ \beta &=& \dfrac{v_2x-v_1y-v_2a_1+v_1a_2}{w_1v_2-v_1w_2} & (*) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} x &=& a_1+\alpha v_1+\beta w_1 & \cdot v_3 \\ z &=& a_3+\alpha v_3+\beta w_3 & \cdot -(v_1) \\ \hline v_3x &=& v_3a_1+\alpha v_3v_2+\beta w_1v_3 & \\ -v_1z &=& -v_1a_3-\alpha v_1v_3-\beta v_1w_3 & + \\ \hline v_3x-v_1z &=& v_3a_1-v_1a_3+\beta w_1v_3-\beta v_1w_3 & \\ \beta &=& \dfrac{v_3x-v_1z-v_3a_1+v_1a_3}{w_1v_3-v_1w_3} & (**) \end{array}$$

En posant $(*) = (**)$, on obtient :

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{v_2x-v_1y-v_2a_1+v_1a_2}{w_1v_2-v_1w_2} &=& \dfrac{v_3x-v_1z-v_3a_1+v_1a_3}{w_1v_3-v_1w_3} & \text{Dév.} \\ (v_2x-v_1y-v_2a_1+v_1a_2)\cdot(w_1v_3-v_1w_3) &=& (v_3x-v_1z-v_3a_1+v_1a_3)\cdot(w_1v_2-v_1w_2) & \text{Fac.} \\ v_1w_2v_3x-v_1w_3v_2x-w_1v_3v_1y+v_1^2w_3y+w_1v_2v_1z-v_1^2w_2z &=& v_1d & :v_1 \\ w_2v_3x-w_3v_2x-w_1v_3y+v_1w_3y+w_1v_2z-v_1w_2z &=& d & \text{Fac.} \\ x(w_2v_3-w_3v_2)+y(-w_1v_3+v_1w_3)+z(w_1v_2-v_1w_2)-d &=& 0 & \end{array}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} w_2v_3-w_3v_2 \\ w_3v_1-w_1v_3 \\ w_1v_2-v_1w_2 \end{pmatrix} \perp \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \vec{v}\wedge\vec{w}$$

Dans un repère orthonormé $\{O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$, on appelle **produit vectoriel** des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$, que l'on note $\vec{v} \times \vec{w}$ ou $\vec{v} \wedge \vec{v}$ et que l'on lit $\vec{v}$ "cross" $\vec{w}$ le vecteur $\vec{n}$ défini par

$$\vec{n} = \vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{n} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} v_3 & w_3 \\ v_1 & w_1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix}$$

Par construction, le vecteur $\vec{n}$ est perpendiculaire aux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

► **Propriétés :**

- $\vec{v} \wedge \vec{w} = -(\vec{w} \wedge \vec{v})$ (anticommutativité)
- $(\alpha\vec{v}) \wedge \vec{w} = \alpha \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (linéarité)
- $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$ (distributivité)
- $\vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
- $\vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v} // \vec{w}$ (détecteur de parallélisme)
- $(\vec{v} \wedge \vec{w}) \perp \vec{v}$ et $(\vec{v} \wedge \vec{w}) \perp \vec{w}$

Preuve :

- $\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} v_3w_2 - v_2w_3 \\ v_1w_3 - v_3w_1 \\ v_2w_1 - v_1w_2 \end{pmatrix} = -(\vec{w} \wedge \vec{v})$
- $(\alpha\vec{v}) \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \alpha v_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v_2w_3 - \alpha v_3w_2 \\ \alpha v_3w_1 - \alpha v_1w_3 \\ \alpha v_1w_2 - \alpha v_2w_1 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}$, $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \begin{pmatrix} u_2(v_3+w_3) - u_3(v_2+w_2) \\ u_3(v_1+w_1) - u_1(v_3+w_3) \\ u_1(v_2+w_2) - u_2(v_1+w_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_2w_3 - u_3w_2) \\ u_3w_1 - u_1w_3 \\ u_1w_2 - u_2w_1 \end{pmatrix} = \vec{v} \wedge \vec{w_1} + \vec{v} \wedge \vec{w_2}$
- $\vec{v} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} v_2v_3 - v_3v_2 \\ v_3v_1 - v_1v_3 \\ v_1v_2 - v_2v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$
- $(\Leftarrow)$ $k \cdot \vec{v} \wedge \vec{v} = k \cdot (\vec{v} \wedge \vec{v}) = k \cdot \vec{0} = \vec{0}$

  $(\Rightarrow)$ $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_2b_3 = a_3b_2 \\ a_3b_1 = a_1b_3 \\ a_1b_2 = a_2b_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{a_3}{b_3} \cdot b_1 \\ a_2 = \frac{a_3}{b_3} \cdot b_2 \\ a_3 = \frac{a_3}{b_3} \cdot b_3 \end{cases}$

  Il existe donc $k = \frac{a_3}{b_3}$ tel que $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$ et donc $\vec{a} // \vec{b}$
- Evident, par construction du produit vectoriel.

□

► **Remarque :** Petit truc utile pour se souvenir de la formule :

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = \vec{a} \wedge \vec{b} \\ \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \end{array}$$

$+$ ··· →
$-$ ··· →

► **Exemples :**

a. Déterminer le plan π : par le point $A(0; 11; -8)$, $// \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Un vecteur normal : $\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $\pi : -2x + y + 2z + k = 0$. Avec A on trouve

$$\pi : -2x + y + 2z + 5 = 0$$

b. Sur les vecteurs de base :

$$\vec{e_1} \wedge \vec{e_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \vec{0} \qquad \vec{e_2} \wedge \vec{e_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \vec{0}$$

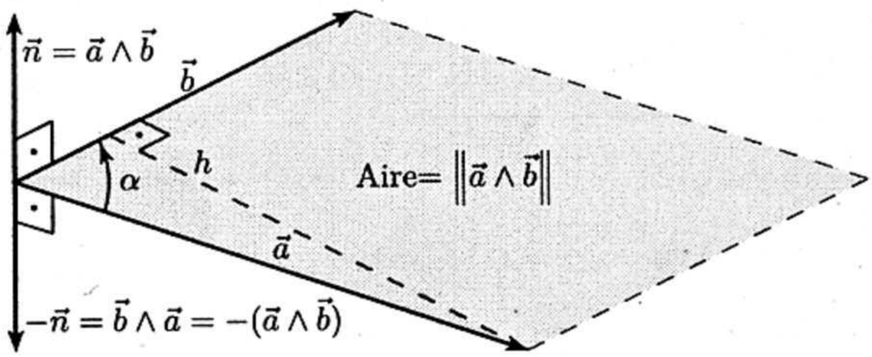
$$\vec{e_1} \wedge \vec{e_2} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \vec{e_3} \qquad \vec{e_2} \wedge \vec{e_3} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \vec{e_1}$$

$$\vec{e_1} \wedge \vec{e_3} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = -\vec{e_2} \qquad \vec{e_3} \wedge \vec{e_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \vec{0}$$

En résumé :

$\wedge$	$\vec{e_1}$	$\vec{e_2}$	$\vec{e_3}$
$\vec{e_1}$	$\vec{0}$	$\vec{e_3}$	$-\vec{e_2}$
$\vec{e_2}$	$-\vec{e_3}$	$\vec{0}$	$\vec{e_1}$
$\vec{e_3}$	$\vec{e_2}$	$-\vec{e_1}$	$\vec{0}$

5.8.2 Interprétation géométrique, aire d'un parallélogramme et d'un triangle



Soit le plan π contenant les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Appelons α l'angle minimal entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Nous savons que $\vec{n}$ est perpendiculaire à π. Nous voudrions maintenant connaître son sens. La rotation du vecteur $\vec{a}$ au vecteur $\vec{b}$ suivant l'angle α fait monter ou descendre un tire-bouchon virtuel. $\vec{n}$ suit le sens du tire-bouchon virtuel. Dans notre exemple, il monte et $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{n}$ est dirigé contre le haut. De la même manière , le sens du vecteur $\vec{n}$ peut être donné par la main **droite**. Il suffit de placer le pouce sur le vecteur $\vec{a}$ et l'index sur le vecteur $\vec{b}$. Alors le sens de $\vec{n}$ est indiqué par le majeur.

De plus,

> **la norme du vecteur $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ représente l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Cette aire vaut $\left\|\vec{a} \wedge \vec{b}\right\| = \|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot \sin(\alpha)$**

Preuve :

On a : $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$ et donc

$$\begin{aligned}\|\vec{n}\|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (-(a_1b_3 - a_3b_1))^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_1^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 - 2a_1a_3b_1b_3 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1a_2b_1b_2 \\ &= a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 - 2a_1a_3b_1b_3 - 2a_2a_3b_2b_3\end{aligned}$$

Si maintenant on calcule l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$ on a :

$$A = \left\|\vec{b}\right\| \cdot h \qquad h = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 - \left\|\vec{a'}\right\|^2} \qquad \left\|\vec{a'}\right\| = \frac{|\vec{a} \bullet \vec{b}|}{\left\|\vec{b}\right\|} \qquad \Rightarrow \qquad \left\|\vec{a'}\right\|^2 = \frac{(\vec{a} \bullet \vec{b})^2}{\left\|\vec{b}\right\|^2}$$

Ainsi $h = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 - \frac{(\vec{a} \bullet \vec{b})^2}{\left\|\vec{b}\right\|^2}} = \frac{\sqrt{\|\vec{a}\|^2 \left\|\vec{b}\right\|^2 - (\vec{a} \bullet \vec{b})^2}}{\left\|\vec{b}\right\|}$

Et $A = \left\|\vec{b}\right\| \cdot h = \left\|\vec{b}\right\| \cdot \frac{\sqrt{\|\vec{a}\|^2 \left\|\vec{b}\right\|^2 - (\vec{a} \bullet \vec{b})^2}}{\left\|\vec{b}\right\|} = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 \left\|\vec{b}\right\|^2 - \left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right)^2}$

Finalement $\boxed{A^2 = \|\vec{a}\|^2 \left\|\vec{b}\right\|^2 - \left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right)^2}$

Donc

$$\begin{aligned}
A^2 =& \|\vec{a}\|^2 \left\|\vec{b}\right\|^2 - \left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right)^2 \\
=& (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
=& a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 - \\
& (a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 + 2a_1a_2b_1b_2 + 2a_1a_3b_1b_3 + 2a_2a_3b_2b_3) \\
=& a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 - 2a_1a_3b_1b_3 - 2a_2a_3b_2b_3
\end{aligned}$$

Ainsi l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$ vaut $\left\|\vec{a} \wedge \vec{b}\right\|$.
De plus,

$$\begin{aligned}
A^2 =& \|\vec{a}\|^2 \left\|\vec{b}\right\|^2 - \left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right)^2 = \|\vec{a}\|^2 \cdot \left\|\vec{b}\right\|^2 - \|\vec{a}\|^2 \cdot \left\|\vec{b}\right\|^2 \cdot \cos^2(\alpha) \\
=& \|\vec{a}\|^2 \cdot \left\|\vec{b}\right\|^2 \cdot (1 - \cos^2(\alpha)) = \|\vec{a}\|^2 \cdot \left\|\vec{b}\right\|^2 \cdot \sin^2(\alpha)
\end{aligned}$$

□

► **Exemple :**

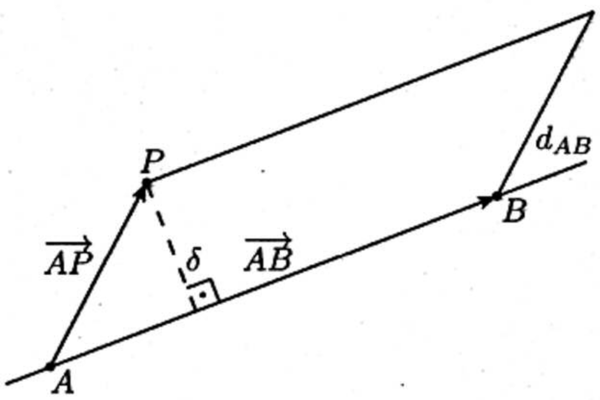
Soient les points $A(4;-1;5)$, $B(12;-5;6)$ et $D(5;0;1)$. Déterminer l'aire du triangle ABD, ainsi que les coordonnées du point C tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{b} = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} 15 \\ 33 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$Aire_{ABD} = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 15 \\ 33 \\ 12 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\sqrt{15^2 + 33^2 + 12^2} \cong 19,1$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 13 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow C(13;-4;2)$$

5.8.3 Distance entre un point et une droite



On considère la droite d_{AB} donnée par les points A et B et on aimerait connaître la distance δ entre un point P et d_{AB}.
On a

$$A_{parallélogramme} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \delta = \left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AP}\right\|$$

et donc

$$\boxed{\delta = \text{dist}(P; d_{AB}) = \frac{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AP}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}}$$

► **Exemple :**

Quelle est la distance entre $P(5;-4;7)$ et la droite $d : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -3 - 5\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$?

$$A(2;-3;0), \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad \left\|\vec{d}\right\| = \sqrt{1 + 25 + 4} = \sqrt{30}$$

$$\overrightarrow{AP} \wedge \vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ 1 \\ -14 \end{pmatrix}, \qquad \left\|\overrightarrow{AP} \times \vec{d}\right\| = \sqrt{33^2 + 1 + 14^2} = \sqrt{1286}$$

$$\text{dist}(P, d) = \frac{\sqrt{1286}}{\sqrt{30}} \cong 6,55$$

5.8.4 Droite d'intersection entre deux plans

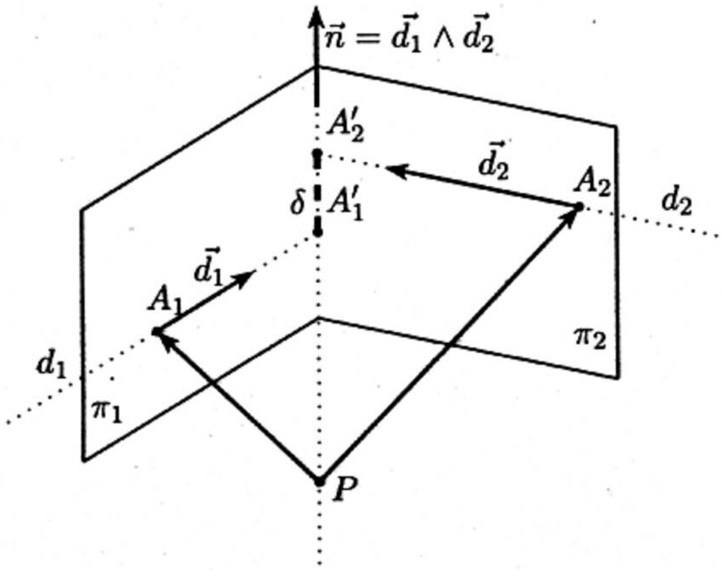
Soit les plans $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ et $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Si elle existe, la droite i d'intersection entre les plans π_1 et π_1 admet comme vecteur directeur le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$. Si $\vec{n} = \vec{0}$, les plans sont parallèles ou confondues.

▶ **Exemple :**

Soient les plans $\pi_1 : 2x + 3y + z - 6 = 0$ et $\pi_2 : 2x + 12y + 4z - 12 = 0$.
On a alors $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et donc la droite d'intersection i est parallèle au vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Pour déterminer l'équation paramétrique de la droite i, il suffit de trouver un point qui est contenu dans les deux plans, par exemple $P(2;0;2)$ et donc

$$i : \begin{cases} x = 2 \\ y = -\lambda \\ z = 2 + 3\lambda \end{cases}$$

5.8.5 Distance entre deux droites non parallèles



Nous cherchons la distance la plus courte δ entre deux droite gauches d_1 et d_2. Choisissons P tel que $\overrightarrow{PA_1} \bullet \vec{n} > 0$ et $\overrightarrow{PA_2} \bullet \vec{n} > 0$. Ce choix existe toujours.
Alors

$$\mathrm{dist}(d_1, \mathrm{d}_2) = \left\| \overrightarrow{A_1'A_2'} \right\| = \left| \left\| \overrightarrow{PA_2'} \right\| - \left\| \overrightarrow{PA_1'} \right\| \right| = \left| \frac{\overrightarrow{PA_2} \bullet \vec{n}}{\|\vec{n}\|} - \frac{\overrightarrow{PA_1} \bullet \vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right|$$

Comme

$$\overrightarrow{PA_2} \bullet \vec{n} - \overrightarrow{PA_1} \bullet \vec{n} = (\overrightarrow{PA_2} - \overrightarrow{PA_1}) \bullet \vec{n} = (\overrightarrow{PA_2} + \overrightarrow{A_1P}) \bullet \vec{n} = \overrightarrow{A_1A_2} \bullet \vec{n}$$

On obtient

$$\boxed{\delta = \mathrm{dist}(d_1,d_2) = \frac{\left|\overrightarrow{A_1A_2} \bullet \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|} = \frac{\left|\overrightarrow{A_1A_2} \bullet \left(\vec{d_1} \wedge \vec{d_2}\right)\right|}{\left\|\vec{d_1} \wedge \vec{d_2}\right\|}}$$

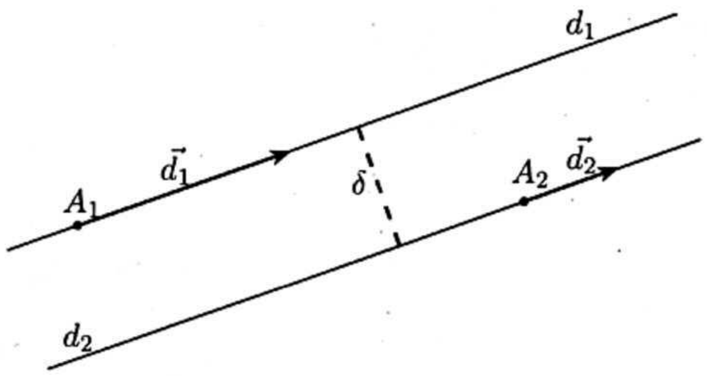
En fait, certains voient peut-être directement que cette distance est la norme de la projection de $\overrightarrow{A_1A_2}$ sur le vecteur $\vec{n} = \vec{d_1} \wedge \vec{d_2}$!
La perpendiculaire commune est de direction $\vec{n}$ et elle contient les points :

$\overrightarrow{A_1'}$: intersection de d_1 avec le plan contenant d_2 et $//\vec{n}$
$\overrightarrow{A_2'}$: intersection de d_2 avec le plan contenant d_1 et $//\vec{n}$

Deux droites (non-parallèles) sont donc sécantes si

$$\delta = \mathrm{dist}(d_1,d_2) = \frac{\overrightarrow{A_1A_2} \bullet \vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{\overrightarrow{A_1A_2} \bullet \left(\vec{d_1} \wedge \vec{d_2}\right)}{\left\|\vec{d_1} \wedge \vec{d_2}\right\|} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{A_1A_2} \bullet \left(\vec{d_1} \wedge \vec{d_2}\right) = 0$$

5.8.6 Distance entre deux droites parallèles



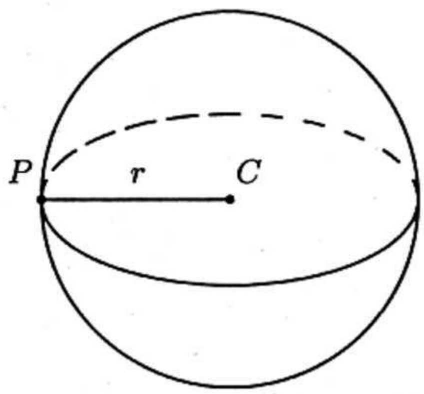
Si les vecteurs directeurs $\overrightarrow{d_1}$ et $\overrightarrow{d_2}$ des deux droites sont parallèles, le vecteur $\overrightarrow{d_1} \wedge \overrightarrow{d_2} = \vec{0}$.
La distance ne peut pas être calculée avec la formule $\text{dist}(d_1, \text{d}_2) = \frac{\overrightarrow{A_1A_2}\bullet\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{\overrightarrow{A_1A_2}\bullet(\overrightarrow{d_1}\times\overrightarrow{d_2})}{\|\overrightarrow{d_1}\times\overrightarrow{d_2}\|}$.
Dans ce cas le calcul de la distance entre deux droites revient à calculer la distance entre une droite et un point.
En effet :

$$\delta = \text{dist}(d_1, d_2) = \text{dist}(d_1, A_2) = \text{dist}(d_2, A_1)$$

5.9 La sphère

5.9.1 Equation d'une sphère

La sphère est la généralisation du cercle plan à l'espace. C'est le lieu géométrique des **points de l'espace équidistants d'un point fixe, le centre.**
Soit $C(c_1; c_2; c_3)$ un point et r une mesure positive. Alors la sphère de centre C et de rayon r admet l'équation cartésienne suivante :



$$P(x; y; z) \in \sigma \; si \; \left\|\overrightarrow{CP}\right\|^2 = \rho^2 \qquad \Rightarrow \qquad (x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 + (z-c_3)^2 = r^2$$

5.9.2 Equation générale

En développant l'équation cartésienne de la sphère, on obtient une expression du type $ax^2 + by^2 + cz^2 + dx + ey + fz + g = 0$ appelée équation générale. Pour passer de l'équation générale à la forme cartésienne (et donc obtenir les coordonnées du centre et la mesure du rayon), il faut "compléter les carrés".

► **Exemple :**

Est-ce-que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 14y - 10z + 39 = 0$ est l'équation d'une sphère ?

$$\underbrace{x^2 - 2x}_{(x-1)^2-1} + \underbrace{y^2 + 14y}_{(y+7)^2-49} + \underbrace{z^2 - 10z}_{(z-5)^2-25} + 39 = 0$$

$$(x-1)^2 - 1 + (y+7)^2 + (z-5)^2 - 36 = 0$$

Sphère de centre $C(1; -7; 5)$ et de rayon $r = 6$.

5.9.3 Position relative entre un point et une sphère

Pour savoir si un point A appartient, est intérieur ou est extérieur à la sphère de centre C et de rayon r, on compare $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|$ et le rayon r. Il est également possible de remplacer les coordonnées du point C dans l'équation de la sphère. Si le résultat est positif, le point est extérieur, s'il est négatif le point est intérieur et enfin si le résultat est zéro, le point est sur la sphère.

5.9.4 Position relative entre une droite et une sphère

Le critère qui permet de connaître la position relative entre une droite d et une sphère de centre C et de rayon r est la comparaison du rayon de la sphère et de la distance entre le centre de la sphère et la droite.

- Si $\text{dist}(C, d) < r$ la droite et la sphère sont sécantes.
- Si $\text{dist}(C, d) = r$ la droite et la sphère sont tangentes.
- Si $\text{dist}(C, d) > r$ la droite et la sphère sont disjointes.

Où se trouve le point de la droite le plus proche du centre de la sphère ?

Sécantes	:point milieu des deux points d'intersection
Tangentes	:point de tangence
Disjointes	:intersection de la droite et du plan perpendiculaire à la droite et passant par le centre de la sphère

5.9.5 Intersection entre une droite et une sphère

Soient $d : \begin{cases} x = a_1 + d_1 \cdot \lambda \\ y = a_2 + d_2 \cdot \lambda \\ z = a_3 + d_3 \cdot \lambda \end{cases}$ et $\sigma : (x - \omega_1)^2 + (y - \omega_2)^2 + (z - \omega_3)^2 = \rho^2$.

Alors l'intersection se calcule par substitution :$(a_1 - d_1\lambda - \omega_1)^2 + (a_2 - d_2\lambda - \omega_2)^2 + (a_3 - d_3\lambda - \omega_3)^2 = \rho^2$

Cette équation quadratique en λ se résout avec la formule du $2^{\text{ème}}$ degré.

- Si le discriminant de cette équation est négatif, la droite et la sphère sont disjointes.
- Si le discriminant de cette équation est nul, la droite et la sphère ont un point de tangence dont les coordonnées sont obtenues en substituant la valeur de λ dans les équations de la droite.
- Si le discriminant de cette équation est positif, la droite et la sphère se coupent en 2 points. Les coordonnées sont obtenues en substituant la valeur de λ dans les équations de la droite.

▶ **Exemple :**

Soient $d : \begin{cases} x = 1 - 4\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$ et $\sigma : (x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 25$

Alors

$$\begin{aligned} (1 - 4\lambda - 3)^2 + (\lambda - 2)^2 + (2\lambda + 1)^2 &= 25 \\ (-4\lambda - 2)^2 + (\lambda - 2)^2 + (2\lambda + 1)^2 &= 25 \\ 16\lambda^2 + 16\lambda + 4 + \lambda^2 - 4\lambda + 4 + 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 &= 25 \\ 21\lambda^2 + 16\lambda - 16 &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 21 \cdot (-16)}}{42} = \frac{-16 \pm 40}{42} = \begin{cases} \lambda_1 = \frac{4}{7} \\ \lambda_2 = -\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow 2 \text{ intersections}$$

Intersections :

$$\lambda_1 = \tfrac{4}{7} \quad \Rightarrow \quad I_1\left(1 - 4 \cdot \tfrac{4}{7}; \tfrac{4}{7}; 2 \cdot \tfrac{4}{7}\right) = \left(\tfrac{-9}{7}; \tfrac{4}{7}; \tfrac{8}{7}\right)$$

$$\lambda_2 = -\tfrac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad I_2\left(1 - 4 \cdot \tfrac{-4}{3}; \tfrac{-4}{3}; 2 \cdot \tfrac{-4}{3}\right) = \left(\tfrac{19}{3}; \tfrac{-4}{3}; \tfrac{-8}{3}\right)$$

5.9.6 Plan tangent à une sphère

Soit σ, une sphère de centre C, de rayon r et $P \in \sigma$. Le plan π tangent à la sphère au point P est défini par un vecteur normal $\vec{n} = \overrightarrow{CP}$ et le point de contact P.

▶ **Exemple :**

Déterminer les plans tangents à $\sigma : x^2 - 1 + (y-1)^2 + (z+4)^2 - 14 = 0$ aux points $T(3;0;?)$.

$$T \in \sigma : 3^2 + (0-1)^2 + (z+4)^2 = 14 \Rightarrow z+4 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -2 \\ z_2 = -6 \end{cases}$$

$$T_1(3,0;-2) \qquad \overrightarrow{CT_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \pi_1 : 3x - y + 2z - 5 = 0$$

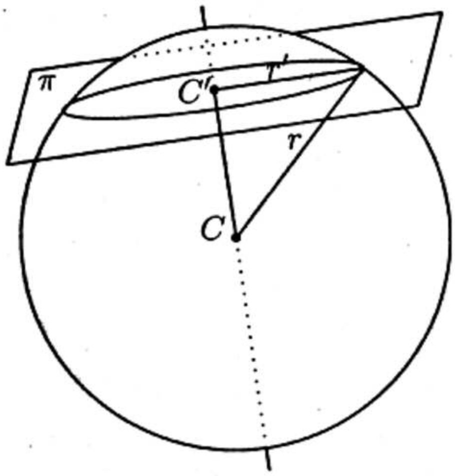
$$T_2(3,0;-6) \qquad \overrightarrow{CT_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \pi_2 : 3x - y - 2z - 21 = 0$$

5.9.7 Position relative entre un plan et une sphère

Le critère qui permet de connaître la position relative entre un plan π et une sphère de centre C et de rayon r est la comparaison du rayon de la sphère et de la distance entre le centre de la sphère et le plan.

- Si $\text{dist}(C,\pi) < r$ le plan et la sphère sont sécants.
- Si $\text{dist}(C,\pi) = r$ le plan et la sphère sont tangents.
- Si $\text{dist}(C,\pi) > r$ la plan et la sphère sont disjoints.

5.9.8 Intersection entre un plan et une sphère



L'intersection d'un plan et une sphère sécants est un **cercle**. Comment en déterminer le rayon r' et le centre C' de ce cercle ?
Le centre C' est l'intersection de π et de la droite perpendiculaire à π passant par le centre C de la sphère.

Le rayon r' du cercle se calcule par Pythagore :

$$r' = \sqrt{r^2 - dist(\pi, C)^2} \text{ où } \text{dist}(\pi,\text{C})^2 = \left\|\overrightarrow{CC'}\right\|$$

▶ **Exemple :**

Montrer que $\pi : 3x - y + 4z - 5 = 0$ et $\sigma : C(7;2;-6)$ $r = 8$ sont sécants, puis déterminer le centre et le rayon du cercle d'intersection.

$$\text{dist}(\pi, \Omega) = \frac{|3 \cdot 7 - 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-6) - 5|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 4^2}} = \frac{10}{\sqrt{26}} \cong 1,96 < 8 \Rightarrow \text{ sécants}$$

$$\text{Droite normale } n \text{ est parallèle à } \vec{n} \text{ et passe par } C \Rightarrow n : \begin{cases} x = 7 + 3\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -6 + 4\lambda \end{cases}$$

Intersection entre π et n :

$$\begin{aligned} 3(7+3\lambda) - (2-\lambda) + 4(-6+4\lambda) - 5 &= 0 \\ 21 + 9\lambda - 2 + \lambda - 24 + 16\lambda - 5 &= 0 \\ 26\lambda - 10 &= 0 \\ \lambda = \tfrac{10}{26} &= \tfrac{5}{13} \end{aligned}$$

$$C' : \begin{cases} x = 7 + 3 \cdot \frac{5}{13} = \frac{106}{13} \\ y = 2 - 3\frac{5}{13} = \frac{21}{13} \\ z = -6 + 4 \cdot \frac{5}{13} = -\frac{58}{13} \end{cases}$$

Centre du cercle $C'(\frac{106}{13}; \frac{21}{13}; -\frac{58}{13})$

Rayon du cercle d'intersection :

$$r' = \sqrt{8^2 - \left(\frac{10}{\sqrt{26}}\right)^2} = \sqrt{64 - \frac{100}{26}} = \sqrt{\frac{782}{13}} \cong 7,75$$

Détermination de C' vectoriellement :

Le point C' se trouve à distance $\text{dist}(\pi, \Omega)$ de C en direction du vecteur $\vec{n}$.
Ainsi $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OC} \pm \text{dist}(\pi, C) \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$. Reste à déterminer si c'est " + " ou " - "!! Si la distance signée entre le plan et le centre de la sphère $\text{distSignée}(\pi, C) = \frac{n_1c_1+n_2c_2+n_3c_3+k}{\|\vec{n}\|}$ est positive, cela signifie que le vecteur $\vec{n}$ pointe en direction de C, donc qu'il est opposé à $\overrightarrow{CC'}$. Il faut alors choisir" - ". Si $\text{distSignée}(\pi, C)$ est négative, il faut choisir " +".
En conclusion :

$$\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OC} - \frac{n_1c_1 + n_2c_2 + n_3c_3 + k}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \vec{n}$$

► **Exemple :**

Reprenons l'exemple précédent.
On a $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\|\vec{n}\| = \sqrt{26}$.

$$\overrightarrow{OC'} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} - \frac{3 \cdot 7 - 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-6) - 5}{26} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{30}{26} \\ \frac{-10}{26} \\ \frac{40}{26} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{212}{26} \\ \frac{42}{26} \\ -\frac{116}{26} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{106}{13} \\ \frac{21}{13} \\ -\frac{58}{13} \end{pmatrix}$$

► **Remarque :** On ne peut pas écrire l'équation cartésienne d'un cercle de l'espace. On indique son centre, son rayon et le plan dans lequel il se trouve.

5.9.9 Autres questions relatives à la sphère

On pourrait par exemple encore s'intéresser à la position relative de deux sphères, leur intersection...

5.10 Déterminants et produit mixte

5.10.1 Déterminant d'ordre 2

On appelle **déterminant d'ordre 2**, le nombre $x_1y_2 - x_2y_1$ que l'on note $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$.

Soient $\vec{a} = \binom{x_1}{y_1}$ et $\vec{b} = \binom{x_2}{y_2}$ deux vecteurs du plan. Alors le déterminant $\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ se note $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1$ et représente l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Preuve :

Ecrivons les deux vecteurs comme des vecteurs de l'espace : $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Alors $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$ et donc Aire$=\|\vec{n}\| = |x_1y_2 - x_2y_1| = \left|\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right|$.
La norme de $\vec{n}$ vallant l'aire du parallélogramme, nous obtenons :
Le signe de $\det(\vec{a}, \vec{b})$ dépend du type de l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$ (cf. règle du tire-bouchon) □

► **Propriétés :**

a. $\det(\vec{a}, \vec{b}) = -\det(\vec{b}, \vec{a})$
b. $\det(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ signifie que les vecteurs sont parallèles (aire nulle)
c. $\det(\vec{a}, x \cdot \vec{b}) = x \cdot \det(\vec{a}, \vec{b})$

5.10.2 Déterminant d'ordre 3

On appelle **déterminant d'ordre 3** le nombre $x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 - x_3y_2z_1$ que l'on note $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$.

Des nombres placés dans un tableau forment une matrice. Ici elle est de taille 3x3. On calcule donc le déterminant d'une matrice.

> Soient $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ trois vecteurs, alors $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$.

On peut mémoriser ce calcul à l'aide des déterminants mineurs. Un déterminant d'ordre 3 peut être calculé à l'aide de 3 déterminants d'ordre 2 en le développant par rapport à une ligne ou une colonne (comportant de préférence beaucoup de coefficients nuls).

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 \cdot \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \cdot \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \cdot \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Le signe attribué à chaque terme est donné par la règle suivante : $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

On peut également utiliser la **règle de Sarrus** pour calculer un déterminant d'ordre 3.

$$\begin{array}{|ccc|cc} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_1 & z_2 \end{array}$$
$$- \quad - \quad - \qquad\qquad + \quad + \quad +$$

et donc

> $$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 - x_3y_2z_1$$

5.10.3 Produit mixte

> On appelle **produit mixte** de trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, et $\vec{c}$, pris dans cet ordre, le nombre réel noté $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]$ défini par $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \vec{a} \bullet \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right)$.

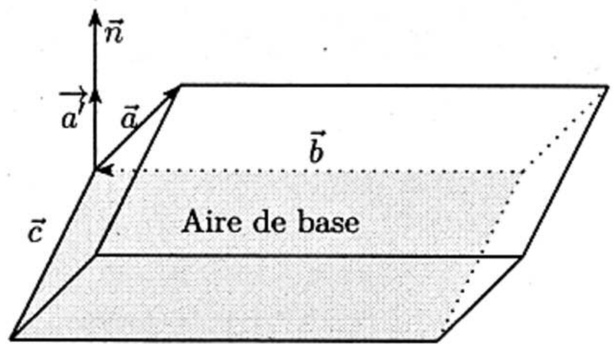
Soient $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ trois vecteurs, alors $\vec{b} \wedge \vec{c} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$

et $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]=\vec{a}\bullet\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\begin{smallmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{smallmatrix}\right)\bullet\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}y_2&y_3\\z_2&z_3\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}x_2&x_3\\z_2&z_3\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}x_2&x_3\\y_2&y_3\end{vmatrix}\end{pmatrix}=x_1\cdot\begin{vmatrix}y_2&y_3\\z_2&z_3\end{vmatrix}-y_1\cdot\begin{vmatrix}x_2&x_3\\z_2&z_3\end{vmatrix}+z_1\cdot\begin{vmatrix}x_2&x_3\\y_2&z_3\end{vmatrix}=\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$

Ainsi le produit mixte n'est rien d'autre que le déterminant !

Interprétation géométrique

Pour rappel, on sait que $|\vec{a}\bullet\vec{n}|=\|\vec{a}'\|\cdot\|\vec{n}\|$
Posons $\vec{n}=\vec{b}\wedge\vec{c}$, alors $\left|\vec{a}\bullet\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right)\right|=|\vec{a}\bullet\vec{n}|=\|\vec{a}'\|\cdot\|\vec{n}\|$, avec $\overrightarrow{a'}$ la projection orthogonale de $\vec{a}$ sur $\vec{n}$.
Comme $\|\vec{n}\|$ vaut l'aire du parallélogramme de base et $\left\|\overrightarrow{a'}\right\|$ est la mesure de la hauteur, on a que
$\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]$ représente le **volume** du parallélépipède construit sur les 3 vecteurs.
En omettant la valeur absolue, le signe du déterminant indique si le sens de $\vec{a}'$ et le même que celui de $\vec{b}\wedge\vec{c}$.



► **Propriétés :**

a. $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]=\left[\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right]=\left[\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right]=-\left[\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right]=-\left[\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right]=-\left[\vec{c},\vec{b},\vec{a}\right]$

b. $\left[\alpha\cdot\vec{a},\beta\cdot\vec{b},\gamma\cdot\vec{c}\right]=\alpha\beta\gamma\cdot\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]\qquad\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$

c. $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]=0$ signifie que les vecteurs sont coplanaires (volume nul)

d. **en particulier :** $\left[\vec{a},\vec{a},\vec{b}\right]=0$!

Notons que le produit mixte a déjà été rencontré dans le calcul de la distance entre deux droites gauches.
Le volume d'un tèdraèdre OABC se calcule par $\frac{1}{6}\cdot\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right]\right|$

► **Exemple :**

Le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $\vec{a}=\left(\begin{smallmatrix}2\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\vec{b}=\left(\begin{smallmatrix}-3\\5\\1\end{smallmatrix}\right)$ et $\vec{c}=\left(\begin{smallmatrix}10\\-2\\-5\end{smallmatrix}\right)$ vaut 51

5.11 La règle de Cramer

5.11.1 La dimension 2

Cet outil permet de résoudre les systèmes linéaires 2x2. Il permet donc également, étant donnés trois vecteurs du plan, de déterminer x et y tels que $x\cdot\vec{a}+y\cdot\vec{b}=\vec{c}$.

Soit le système linéaire : $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$, appelons $\vec{a}=\left(\begin{smallmatrix}a_1\\a_2\end{smallmatrix}\right)$, $\vec{b}=\left(\begin{smallmatrix}b_1\\b_2\end{smallmatrix}\right)$ et $\vec{c}=\left(\begin{smallmatrix}c_1\\c_2\end{smallmatrix}\right)$.

La solution d'un tel système s'obtient par la méthode d'addition : $\begin{cases}a_2\cdot(a_1x+b_1y)=a_2c_1\\-a_1\left(a_2x+b_2y\right)=-a_1c_2\end{cases}$

En additionnant, $(a_2b_1-a_1b_2)\,y=a_2c_1-a_1c_2$ et donc $y=\dfrac{a_2c_1-a_1c_2}{a_2b_1-a_1b_2}=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}=\dfrac{\det\left(\vec{a},\vec{c}\right)}{\det\left(\vec{a},\vec{b}\right)}$

Pour obtenir la valeur de x, on obtient d'abord le système suivant : $\begin{cases}b_2\cdot(a_1x+b_1y)=b_2c_1\\-b_1\left(a_2x+b_2y\right)=-b_1c_2\end{cases}$

En additionnant, $(b_2a_1 - b_1a_2)\,x = b_2c_1 - b_1c_2$ et donc $x = \dfrac{b_2c_1 - b_1c_2}{b_2a_1 - b_1a_2} = \dfrac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \dfrac{\det\left(\vec{c},\vec{b}\right)}{\det\left(\vec{a},\vec{b}\right)}$

On appelle $D = \det(\vec{a},\vec{b})$ le **déterminant principal** du système

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

.

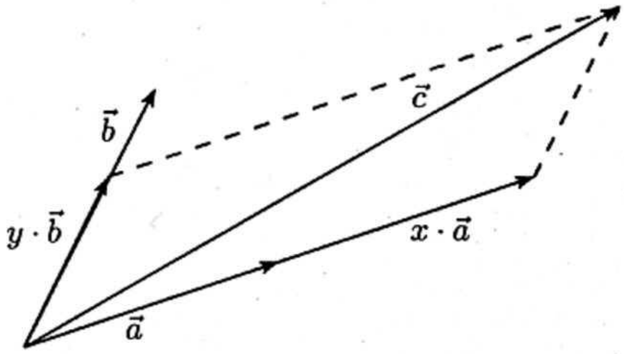
- Si $D = \det(\vec{a},\vec{b}) \neq 0$: le système admet l'**unique solution**

$$x = \frac{\det(\vec{c},\vec{b})}{D} \qquad y = \frac{\det(\vec{a},\vec{c})}{D}$$

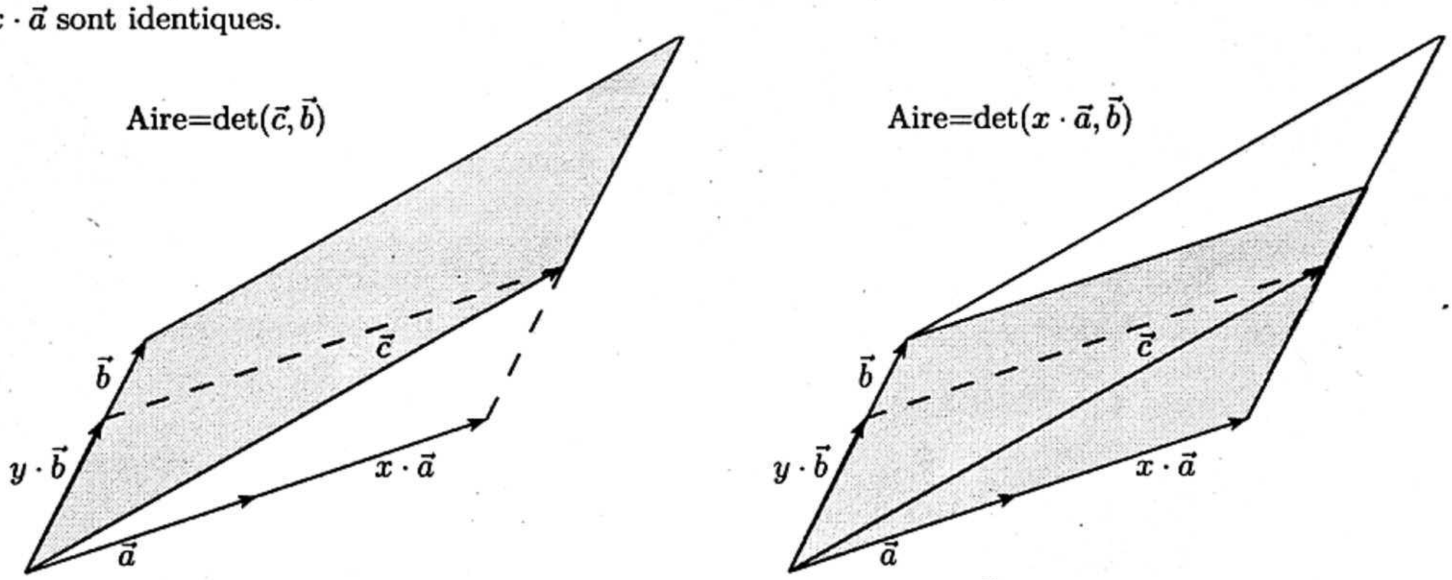
- Si $D = \det(\vec{a},\vec{b}) = 0$:
  - Si $\det(\vec{c},\vec{b}) = 0$ ou $\det(\vec{a},\vec{c}) = 0$, le système a une **infinité de solutions**
  - Si $\det(\vec{c},\vec{b}) \neq 0$ ou $\det(\vec{a},\vec{c}) \neq 0$, le système **n'a pas de solution**

Preuve :

Il s'agit d'une preuve géométrique de la règle de Cramer en dimension 2.
Soient 3 vecteurs $\vec{a}$,$\vec{b}$ et $\vec{c}$ du plan, Quelle combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ donne $\vec{c}$?Autrement dit : Quels x et y sont tels que $x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} = \vec{c}$?



Les aires du parallélogramme formé des vecteurs $\vec{b}$ et $\vec{c}$ et du parallélogramme formé des vecteurs $\vec{b}$ et $x \cdot \vec{a}$ sont identiques.



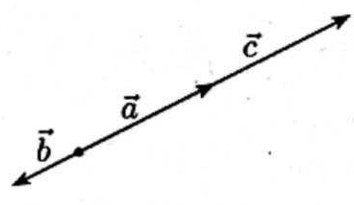
Comme Aire=$\det(\vec{c},\vec{b}) = \det(x \cdot \vec{a},\vec{b}) = x \cdot \det(\vec{a},\vec{b})$, on a $x = \frac{\det(\vec{c},\vec{b})}{\det(\vec{a},\vec{b})}$ comme solution de l'équation $x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} = \vec{c}$. On peut faire un raisonnement identique pour y.

Si l'aire du parallélogramme formé des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et nul, c'est-à-dire $\det(\vec{a},\vec{b}) = 0$, on a $\vec{a}//\vec{b}$. Deux cas sont alors possible.

1er cas : $\vec{c}//\vec{a}$ et b, c'est-à-dire

$$\det(\vec{a},\vec{c}) = \det(\vec{b},\vec{c}) = 0$$

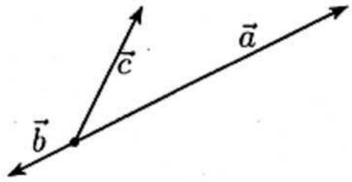
On a une infinité de solutions



$2^{ème}$ cas : $\vec{c}$ n'est pas parallèle au vecteur $\vec{a}$ et au vecteur $\vec{b}$, c'est-à-dire

$$\det(\vec{a},\vec{c}) \neq 0 \text{ et } \det(\vec{b},\vec{c}) \neq 0$$

Il y a aucune solution



□

5.11.2 La dimension 3

Cet outil permet de résoudre les systèmes linéaires 3x3.

Il permet donc également, étant donnés quatre vecteurs de l'espace, disons $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$, de déterminer x, y et z tels que $x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c} = \vec{d}$.

Soit le système linéaire :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Pour obtenir x, il faut multiplier (produit scalaire) $x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c} = \vec{d}$ par un vecteur perpendiculaire **à** $\vec{b}$ et à $\vec{c}$: $\vec{b} \times \vec{c}$:

$$\left(x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c}\right) \bullet \vec{b} \wedge \vec{c} = \vec{d} \bullet \vec{b} \wedge \vec{c}$$

$$x \cdot \vec{a} \bullet \vec{b} \wedge \vec{c} + \vec{y} \cdot \vec{b} \bullet \vec{b} \wedge \vec{c} + \vec{z} \cdot \vec{c} \bullet \vec{b} \wedge \vec{c} = \vec{d} \bullet \vec{b} \wedge \vec{c}$$

$$x \cdot \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] + \vec{y} \cdot \left[\vec{b}, \vec{b}, \vec{c}\right] + z \cdot \left[\vec{c}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \left[\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}\right]$$

$$x \cdot \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \left[\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}\right]$$

$$x = \frac{\left[\vec{d},\vec{b},\vec{c}\right]}{\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]} = \frac{\det(\vec{d},\vec{b},\vec{c})}{\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}$$

Pour obtenir y, il faut multiplier (produit scalaire) $x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c} = \vec{d}$ par un vecteur perpendiculaire à $\vec{a}$ et à $\vec{c}$: $\vec{c} \wedge \vec{a}$:

$$\left(x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c}\right) \bullet \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{d} \bullet \vec{a} \wedge \vec{b}$$

$$\ldots \qquad z = \frac{\left[\vec{d},\vec{a},\vec{b}\right]}{\left[\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right]} = \frac{\det(\vec{d},\vec{a},\vec{b})}{\det(\vec{c},\vec{a},\vec{b})} = \frac{\det(\vec{a},\vec{b},\vec{d})}{\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}$$

Pour obtenir z, il faut multiplier (produit scalaire) $x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c} = \vec{d}$ par un vecteur perpendiculaire à $\vec{a}$ et à $\vec{b}$: $\vec{a} \wedge \vec{b}$:

$$\left(x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c}\right) \bullet \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{d} \bullet \vec{a} \wedge \vec{b}$$

$$\ldots \qquad z = \frac{\left[\vec{d},\vec{a},\vec{b}\right]}{\left[\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right]} = \frac{\det(\vec{d},\vec{a},\vec{b})}{\det(\vec{c},\vec{a},\vec{b})} = \frac{\det(\vec{a},\vec{b},\vec{d})}{\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}$$

On appelle $D = \det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ le **déterminant principal** du système

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

- Si $D = \det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) \neq 0$: le système admet l'**unique solution**

$$x = \frac{\det(\vec{d},\vec{b},\vec{c})}{D} \qquad y = \frac{\det(\vec{a},\vec{d},\vec{c})}{D} \qquad z = \frac{\det(\vec{a},\vec{b},\vec{d})}{D}$$

- Si $D = \det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0$:
  - Si $\det(\vec{d},\vec{b},\vec{c}) = 0$par exemple, le système a une **infinité de solutions**
  - Si $\det(\vec{d},\vec{b},\vec{c}) \neq 0$, le système **n'a pas de solution**

Géométriquement ces calculs reviennent à effectuer des rapports de volumes de parallélépipèdes. Si D=0 les vecteurs $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ sont coplanaires. Dans ce cas si $\vec{d}$ n'est pas dans le même plan, il n'y a pas de solution.