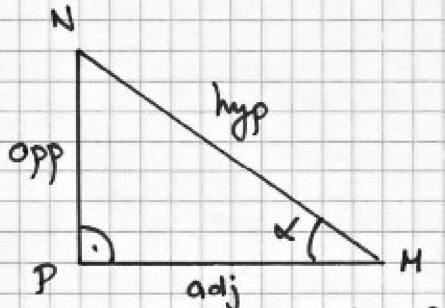
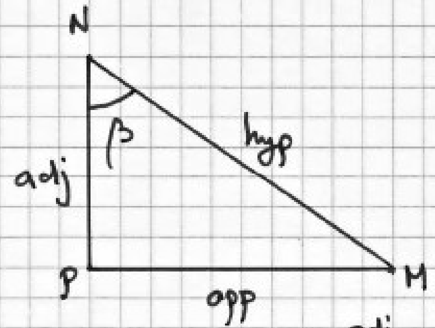
Exercice 41



On a : $\cos(\alpha) = \dfrac{adj}{hyp} = \dfrac{MP}{MN}$

$\sin(\alpha) = \dfrac{opp}{hyp} = \dfrac{NP}{MN}$

$\tan(\alpha) = \dfrac{opp}{adj} = \dfrac{NP}{MP}$



On a : $\cos(\beta) = \dfrac{adj}{hyp} = \dfrac{NP}{MN}$

$\sin(\beta) = \dfrac{opp}{hyp} = \dfrac{MP}{MN}$

$\tan(\beta) = \dfrac{opp}{adj} = \dfrac{MP}{NP}$

Ainsi :

a) $\dfrac{PM}{MN} = \cos(\alpha) = \sin(\beta)$

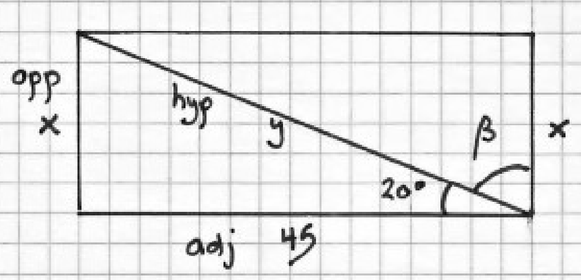
b) $\dfrac{PN}{MN} = \cos(\alpha) = \sin(\alpha)$

c) $\dfrac{PM}{PN} = \tan(\beta)$

d) $\dfrac{PN}{PM} = \tan(\alpha)$.

Exercice 42

a)

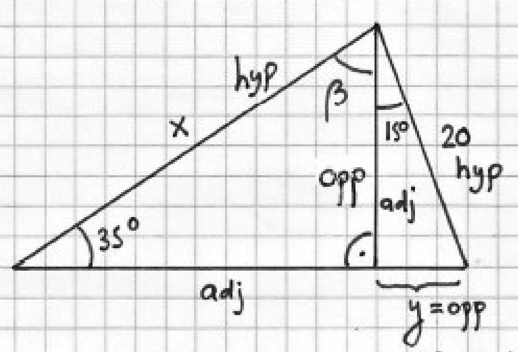


On a : $\tan(20°) = \frac{opp}{adj} = \frac{x}{45} \Rightarrow x = 45 \cdot \tan(20°) \cong \underline{\underline{16,379.}}$

Avec le théorème de Pythagore, on a : $y^2 = x^2 + 45^2 = 16,379^2 + 45^2 =$
$= 268,261 + 2025 = 2293,261$
$\Rightarrow y \cong \underline{\underline{47,888.}}$

Finalement : $\beta = 90° - \alpha = 90° - 20° = \underline{\underline{70°.}}$

b)



Dans le triangle rectangle de droite, on a $\sin(15°) = \frac{opp}{hyp} = \frac{y}{20} \Rightarrow y = 20 \cdot \sin(15°) \cong \underline{\underline{5,176.}}$

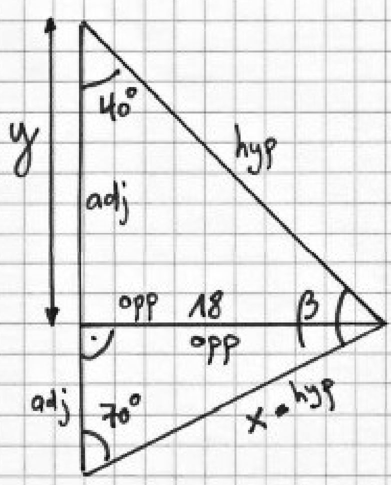
De plus, on a $\cos(15°) = \frac{adj}{hyp} = \frac{adj}{20} \Rightarrow adj = 20 \cdot \cos(15°) \cong 19,319.$

Dans le triangle rectangle de gauche, on a $opp \cong 19,319$ (= adj du triangle rectangle de droite)

et $\sin(35°) = \frac{opp}{hyp} = \frac{19,319}{x} \Rightarrow \sin(35°) \cdot x = 19,319 \Rightarrow x = \frac{19,319}{\sin(35°)} \cong \underline{\underline{33,681.}}$

Finalement $\beta = 180° - 90° - 35° = \underline{\underline{55°.}}$

c)



Dans le triangle rectangle du bas, on a

$\sin(70°) = \frac{opp}{hyp} = \frac{18}{x} \Rightarrow \sin(70°) \cdot x = 18$

$\Rightarrow x = \frac{18}{\sin(70°)} \cong \underline{\underline{19,155.}}$

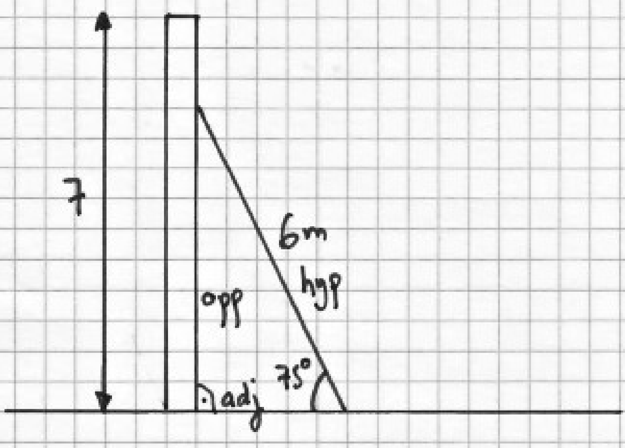
Dans le triangle rectangle du haut, on a

$\tan(40°) = \frac{opp}{adj} = \frac{18}{y} \Rightarrow \tan(40°) \cdot y = 18$

$\Rightarrow y = \frac{18}{\tan(40°)} \cong \underline{\underline{21,452.}}$

Finalement $\beta = 180° - 40° - 70° = \underline{\underline{70°.}}$

Exercice 43



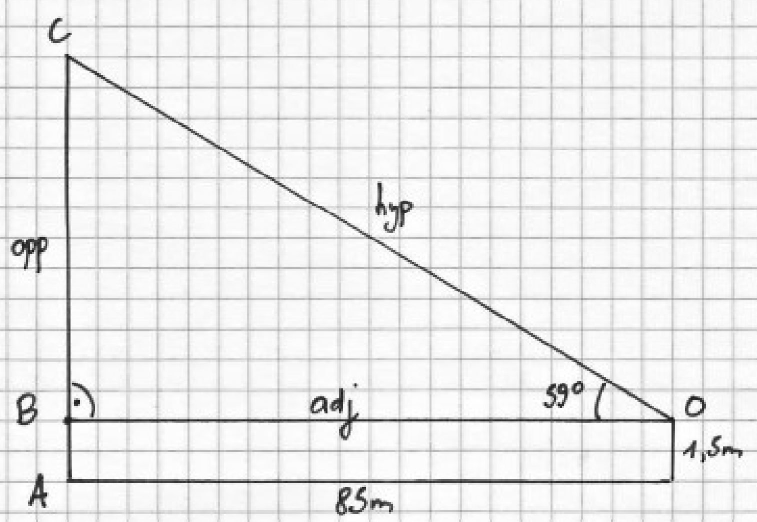
On a $\sin(75°) = \frac{opp}{hyp} = \frac{opp}{6}$

$\Rightarrow opp = 6 \cdot \sin(75°) \cong 5{,}796\text{m}.$

Par conséquent, la distance entre le haut de l'échelle et le haut du mur est

$$7\text{m} - 5{,}796\text{m} = \underline{\underline{1{,}204\text{m}.}}$$

Exercice 44



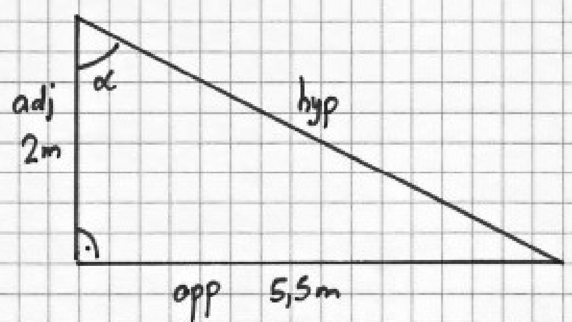
Dans le triangle rectangle, on a $\tan(59°) = \frac{opp}{adj} = \frac{opp}{85} \Rightarrow opp = 85 \cdot \tan(59°) \cong 141,464\,m.$

Ainsi $BC \cong 141,464\,m.$

Comme $AB = 1,5\,m$, on en déduit que la hauteur de la cathédrale est :

$$AC = AB + BC \cong 1,5 + 141,464 = \underline{\underline{142,964\,m.}}$$

Exercice 15



On a $\tan(\alpha) = \frac{opp}{adj} = \frac{5,5}{2} = 2,75 \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(2,75) \cong 70,017°$.

L'angle que fait la direction du Soleil avec la verticale est donc $\underline{\underline{\sim 70,017°}}$.

Exercice 46

On a $\cos x = \frac{3}{5}$.

De plus, on a la relation $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$, relation que l'on écrit $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Avec $\cos x = \frac{3}{5}$, on obtient $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \frac{9}{25} + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

$\Rightarrow \sin x = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm \frac{4}{5}$.

Ainsi, on a 2 possibilités : $\sin x = \frac{4}{5}$ et $\sin x = -\frac{4}{5}$.

On a de plus $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Avec $\sin x = \frac{4}{5}$, on obtient $\tan x = \frac{4/5}{3/5} = \frac{4}{5} : \frac{3}{5} = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$.

Avec $\sin x = -\frac{4}{5}$, on obtient $\tan x = \frac{-4/5}{3/5} = -\frac{4}{5} : \frac{3}{5} = -\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{3} = -\frac{4}{3}$.

Exercice 47

On va utiliser les relations trigonométriques $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

a) $(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x =$

$$= \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} + 2\sin x \cos x = 1 + 2\sin x \cos x . \qquad \text{CQFD.}$$

b) $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x =$

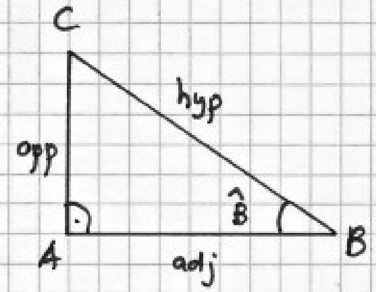
$$= 2\sin^2 x + 2\cos^2 x = 2(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1}) = 2 \cdot 1 = 2 . \qquad \text{CQFD.}$$

c) $$\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \frac{1 - \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2}{1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2} = \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} = 1 = \frac{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} =$$

$$= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} : \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{\cos^2 x}{1} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1} = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad \text{CQFD.}$$

Exercice 48

a) Dans un triangle rectangle ABC rectangle en A, on a :



$\sin \hat{B} = \frac{opp}{hyp}$.

Or, dans tous les cas, on a $opp \leq hyp$.

Ainsi $\sin \hat{B} = \frac{opp}{hyp} \leq \frac{hyp}{hyp} = 1$.

Comme $\frac{24}{19} > 1$, on ne peut donc pas avoir $\sin \hat{B} = \frac{24}{19}$ $\Rightarrow$ FAUX.

b) Dans un triangle rectangle ABC rectangle en A, on a $\tan \hat{B} = \frac{opp}{adj}$.
En prenant $opp = 45$ et $adj = 26$, on a bien $\tan \hat{B} = \frac{45}{26}$ $\Rightarrow$ VRAI.

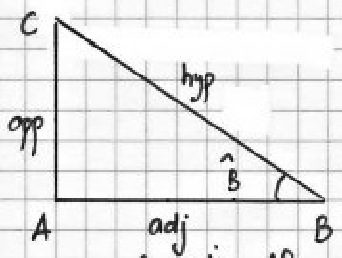
c) Si $\hat{A} = 60°$ et $\hat{B} = 30°$, on a bien $\hat{A} = 2\hat{B}$.

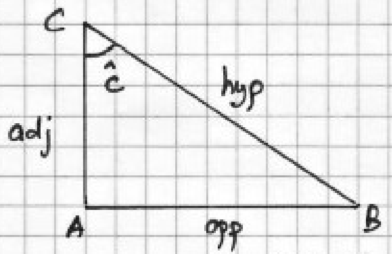
Or, $\cos \hat{A} = \cos 60° = 0,5$ et $\cos \hat{B} = \cos 30° \cong 0,866$ et $\cos \hat{A} \neq 2 \cos \hat{B}$ $\Rightarrow$ FAUX.

d) $\sin 70° \cong 0,940$, $\sin 40° \cong 0,643$ et $\sin 30° = 0,5$.

Ainsi $\sin 40° + \sin 30° \cong 1,143 \neq 0,940$ $\Rightarrow$ FAUX.

e)



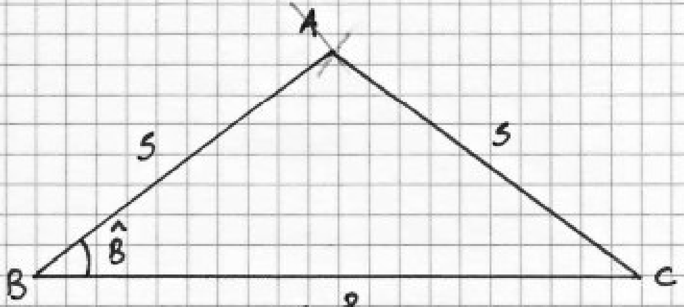


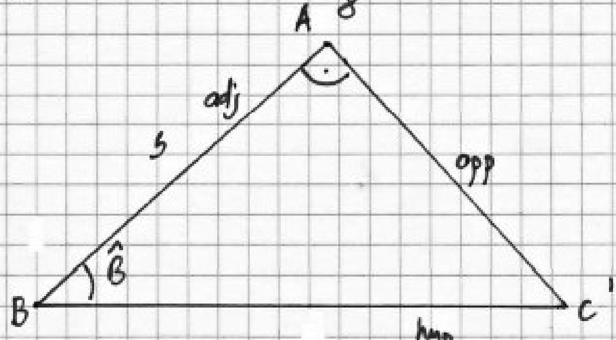
On a $\cos \hat{B} = \frac{adj}{hyp} = \frac{AB}{BC}$.

On a $\sin \hat{C} = \frac{opp}{hyp} = \frac{AB}{BC}$.

On a donc bien $\cos \hat{B} = \sin \hat{C}$ $\Rightarrow$ VRAI.

f)



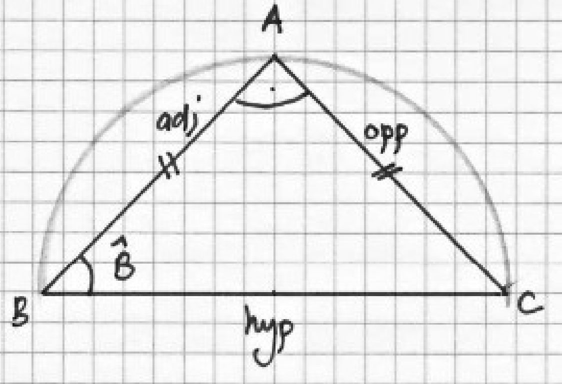


Comme $5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50$ et $8^2 = 64$, le triangle ABC n'est pas rectangle.

Dans le triangle rectangle ABC' ci-contre, on a $\cos \hat{B} = \frac{adj}{hyp} = \frac{5}{BC'}$.

Comme $BC' \neq 8$, on a alors $\cos \hat{B} \neq \frac{5}{8}$ $\Rightarrow$ FAUX.

g)

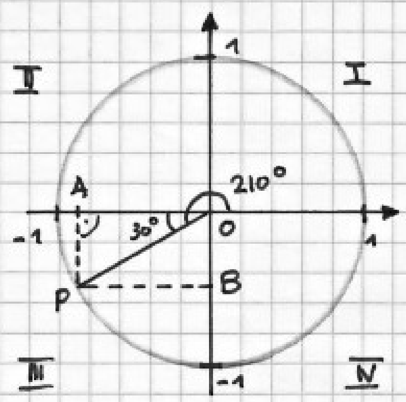


Le triangle ABC est isocèle : $AB = AC$.
En outre, comme BC est un diamètre du cercle, l'angle inscrit $\hat{A}$ doit être un angle droit (cercle de Thalès).
Ainsi le triangle ABC est rectangle en A.
On a alors $\tan \hat{B} = \frac{opp}{adj} = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{AC} = 1$

$\Longrightarrow$ VRAI.

Exercice 49

$\frac{7\pi}{6}$: $\pi \longleftrightarrow 180° \Rightarrow \frac{\pi}{6} \longleftrightarrow 30° \Rightarrow \frac{7\pi}{6} \longleftrightarrow 210°$.



Le triangle AOP est la moitié d'un triangle équilatéral (comme $\hat{O} = 30°$, on a $\hat{P} = 60°$).

Ainsi $AP = \frac{1}{2} OP$.

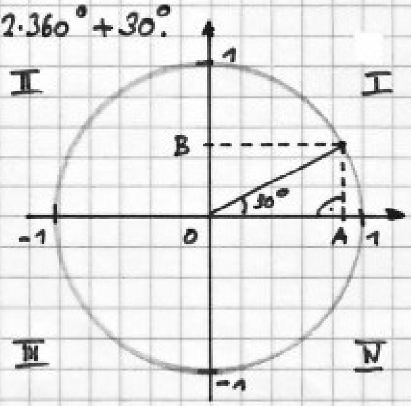
Avec $OP = 1$ (rayon du cercle trigonométrique), on a $AP = \frac{1}{2}$.

En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle AOP, on a :

$OP^2 = OA^2 + AP^2 \Rightarrow 1^2 = OA^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow 1 = OA^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow OA^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow OA = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Comme P est dans le quadrant III, on en déduit que $\sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ et $\cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\frac{25\pi}{6}$: $\pi \longleftrightarrow 180° \Rightarrow \frac{\pi}{6} \longleftrightarrow 30° \Rightarrow \frac{25\pi}{6} \longleftrightarrow 750° \Rightarrow \frac{25\pi}{6} \longleftrightarrow 2 \cdot 360° + 30°$.



La situation est exactement la même que pour $\frac{7\pi}{6}$ mais dans le quadrant I (symétrie centrale par rapport à ci-dessus).

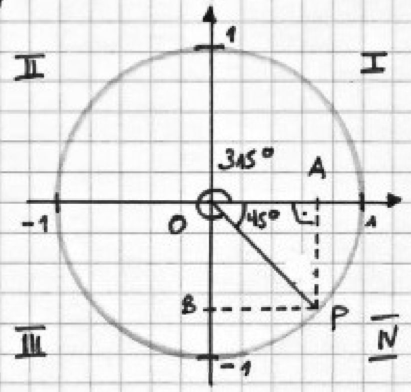
On en déduit que $\sin \frac{25\pi}{6} = \frac{1}{2}$ et $\cos \frac{25\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$-\frac{53\pi}{6}$: $\pi \longleftrightarrow 180° \Rightarrow \frac{\pi}{6} \longleftrightarrow 30° \Rightarrow -\frac{53\pi}{6} \longleftrightarrow -1590° \Rightarrow -\frac{53\pi}{6} \longleftrightarrow -5 \cdot 360° + 210°$.

On obtient donc exactement la même situation que pour $\frac{7\pi}{6}$.

Ainsi $\sin\left(-\frac{53\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ et $\cos\left(-\frac{53\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$-\frac{57\pi}{4}$: $\pi \longleftrightarrow 180° \Rightarrow \frac{\pi}{4} \longleftrightarrow 45° \Rightarrow -\frac{57\pi}{4} \longleftrightarrow -2565° \Rightarrow -\frac{57\pi}{4} \longleftrightarrow -8 \cdot 360° + 315°$.



Le triangle AOP est rectangle et isocèle (puisque $\hat{O} = \hat{P} = 45°$).

Ainsi $OA = AP$.

En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle AOP et puisque $OP = 1$, on a :

$OP^2 = OA^2 + AP^2 \Rightarrow 1^2 = OA^2 + OA^2$

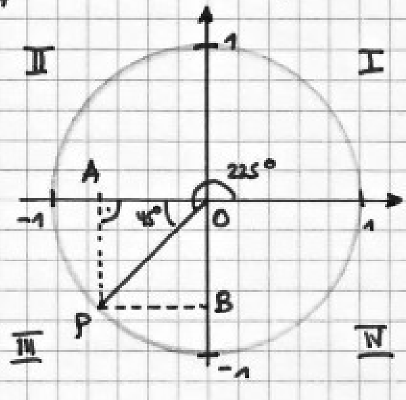
$\Rightarrow 1 = 2OA^2 \Rightarrow OA^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow OA = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Comme P est dans le quadrant IV, on en déduit que $\sin\left(-\frac{57\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\left(-\frac{57\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\frac{981\pi}{4}$: $\pi \longleftrightarrow 180° \Rightarrow \frac{\pi}{4} \longleftrightarrow 45° \Rightarrow \frac{981\pi}{4} \longleftrightarrow 44'145° \Rightarrow \frac{981\pi}{4} \longleftrightarrow 122 \cdot 360° + 225°$.

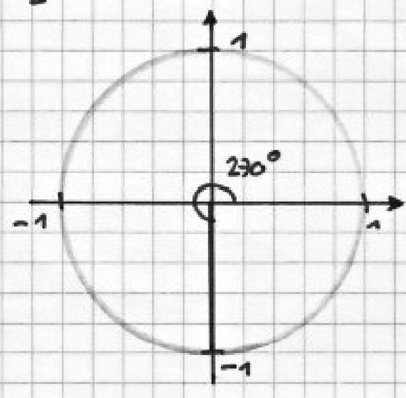
La situation est exactement la même que pour $-\frac{57\pi}{4}$ mais dans le quadrant $\underline{\text{III}}$ (symétrie d'axe vertical).

On en déduit que $\sin\frac{981\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\frac{981\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



$-\frac{29\pi}{2}$: $\pi \longleftrightarrow 180° \Rightarrow \frac{\pi}{2} \longleftrightarrow 90° \Rightarrow -\frac{29\pi}{2} \longleftrightarrow -2610° \Rightarrow -\frac{29\pi}{2} \longleftrightarrow -8 \cdot 360° + 270°$

On a alors clairement $\sin\left(-\frac{29\pi}{2}\right) = -1$ et $\cos\left(-\frac{29\pi}{2}\right) = 0$.

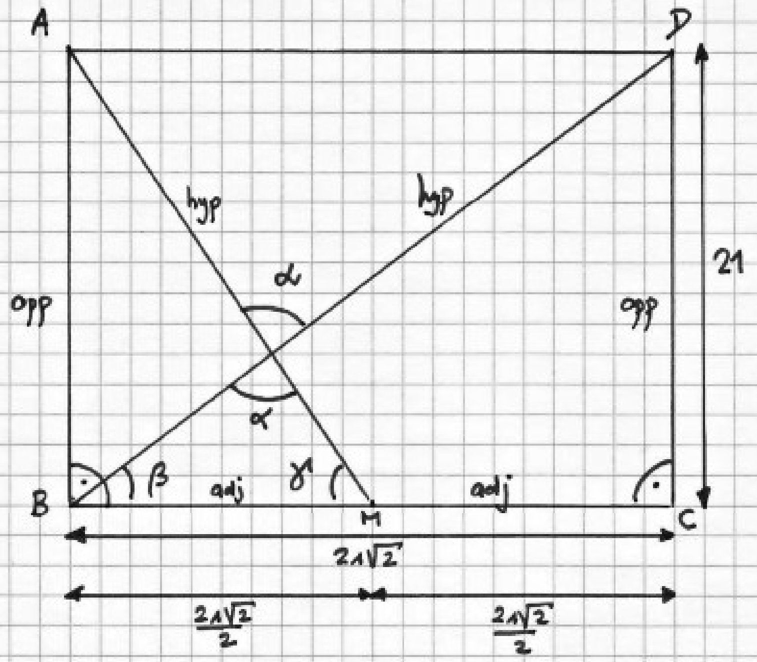


$\frac{23\pi}{4}$: $\pi \longleftrightarrow 180° \Rightarrow \frac{\pi}{4} \longleftrightarrow 45° \Rightarrow \frac{23\pi}{4} \longleftrightarrow 1035° \Rightarrow \frac{23\pi}{4} \longleftrightarrow 2 \cdot 360° + 315°$.

On est donc exactement dans la même situation que pour $-\frac{57\pi}{4}$.

Ainsi $\sin\frac{23\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\frac{23\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 50



Dans le triangle rectangle ABM, on a $\tan\gamma = \frac{opp}{adj} = \frac{21}{\frac{21\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1 : \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$

$\Longrightarrow \gamma = \tan^{-1}(\sqrt{2}) \cong 54{,}736°$.

Dans le triangle rectangle BCD, on a $\tan\beta = \frac{opp}{adj} = \frac{21}{21\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \beta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 35{,}265$.

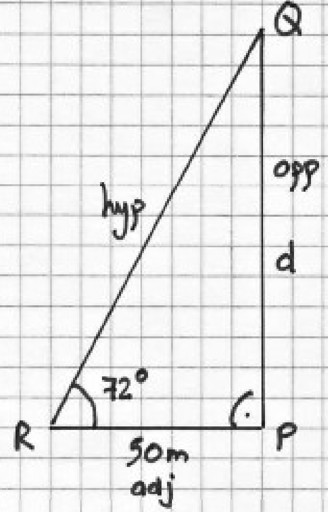
On aura alors $\alpha = 180° - \beta - \gamma$.

D'où $\alpha = 180° - \tan^{-1}(\sqrt{2}) - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 90°$ très précisément.

Donc <u>l'angle α est droit.</u>

Exercice 51

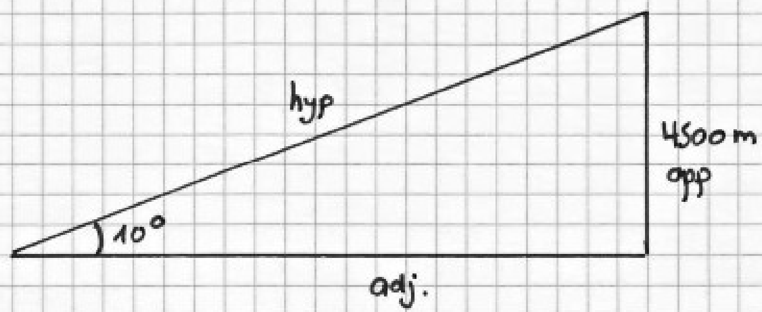
On a la situation suivante (vue du dessus) :



On a $\tan(72°) = \frac{opp}{adj} = \frac{d}{50} \Rightarrow d = 50 \cdot \tan(72°) = \underline{\underline{153,884 \text{ m.}}}$

Exercice 52

On a la situation suivante:



On va commencer par calculer hyp.

On a $\sin 10° = \frac{opp}{hyp} = \frac{4500}{hyp} \Rightarrow hyp \cdot \sin 10° = 4500 \Rightarrow hyp = \frac{4500}{\sin 10°} \cong 25'914,47 m.$

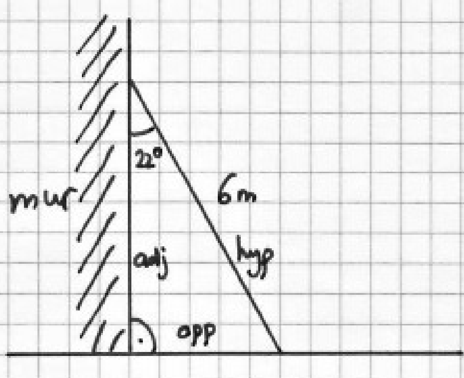
L'avion vole à 75m/s. Il effectue donc 75m en 1s et ainsi 1m en $\frac{1}{75} s = 0,01\overline{3} s$.

Pour effectuer les 25'914,47m, il mettra donc $25'914,47 \cdot 0,01\overline{3} = 345,53 s =$

$= 300 s + 45,53 s = 5 min + 45,53 s = \underline{\underline{5 min\ 45,53 s}}.$

Exercice 53

a) On a la situation suivante:



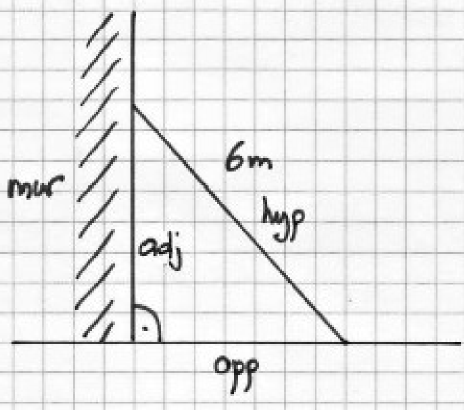
On a $\sin 22° = \frac{opp}{hyp} = \frac{opp}{6} \Longrightarrow opp = 6 \cdot \sin 22° \cong 2{,}248\,m.$

La distance entre le pied de l'échelle et le mur est de $\underline{\underline{2{,}248\,m.}}$

b) On calcule tout d'abord le "adj" dans la situation de la partie a).

On a $\cos 22° = \frac{adj}{hyp} = \frac{adj}{6} \Longrightarrow adj = 6 \cdot \cos 22° \cong 5{,}563\,m.$

La nouvelle situation est:



Le nouveau "opp" vaut l'ancien + 1m $= 2{,}248 + 1 = 3{,}348.$

Par le théorème de Pythagore, on aura, dans ce nouveau triangle rectangle:

$hyp^2 = opp^2 + adj^2 \Longrightarrow adj^2 = hyp^2 - opp^2 = 6^2 - 3{,}348^2 \cong 36 - 10{,}547 = 25{,}453$

$\Longrightarrow adj \cong 5{,}045\,m.$

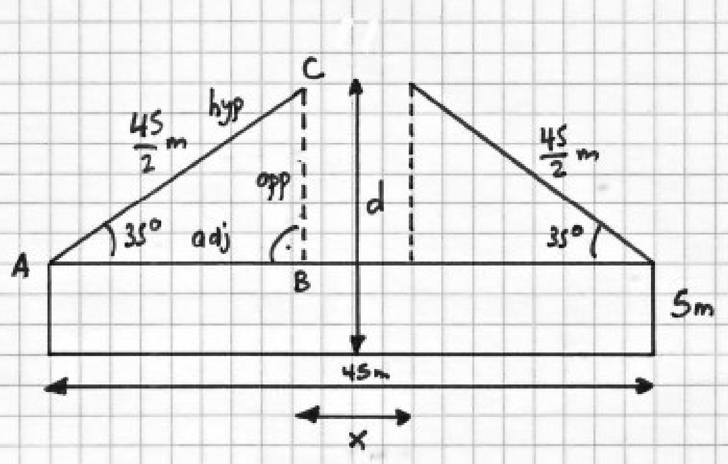
La distance cherchée est la différence entre l'ancien "adj" et le nouveau "adj":

$5{,}563 - 5{,}045 \cong 0{,}518\,m = 51{,}8\,cm.$

Ainsi le point d'appui va descendre de $\underline{51{,}8\,cm.}$

Exercice 54

On a la situation suivante:



a) Dans le triangle rectangle ABC, on a $\sin 35° = \frac{opp}{hyp} = \frac{opp}{45/2} \Longrightarrow opp = \frac{45}{2} \cdot \sin 35° \cong 12{,}905\,m$

Ainsi $d = opp + 5 \cong 12{,}905 + 5 = \underline{\underline{17{,}905\,m}}$.

b) Calculons "adj" dans le triangle rectangle ABC, on a $\cos 35° = \frac{adj}{hyp} = \frac{adj}{45/2}$

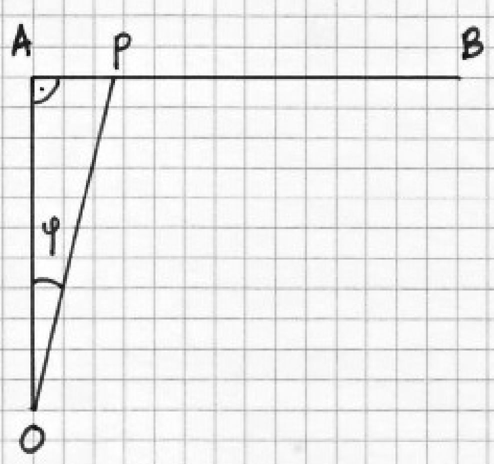
$\Longrightarrow adj = \frac{45}{2} \cdot \cos 35° \cong 18{,}431\,m$.

On a alors $x = 45m - 2 \cdot 18{,}431\,m = 8{,}138\,m$.

La distance entre les extrémités est donc de $\underline{\underline{8{,}138\,m}}$.

Exercice 55

On a la situation suivante:



Il faut que le canard et la balle tirée arrivent au point P au même moment.

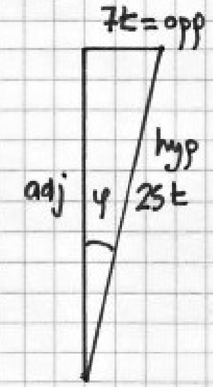
Le canard se déplace à 7 cm/s, c'est-à-dire 7 cm en 1s.

Ainsi en t secondes, le canard aura effectué $7t$ cm.

La balle se déplace à 25 cm/s, c'est-à-dire 25 cm en 1s.

Ainsi en t secondes, la balle aura effectué $25t$ cm.

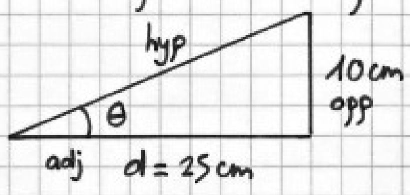
On doit donc avoir la situation suivante:



On a alors $\sin\varphi = \frac{opp}{hyp} = \frac{7t}{25t} = \frac{7}{25} \Longrightarrow \varphi = \sin^{-1}\left(\frac{7}{25}\right) = \underline{\underline{16,26°}}$.

Exercice 56

Commençons par calculer la diagonale de la base du parallélipipède rectangle (nommée d).
Par le théorème de Pythagore, on a $d^2 = 20^2 + 15^2 = 625 \Rightarrow d = 25cm$.
On a alors la situation suivante (coupe verticale du parallélipipède rectangle) :

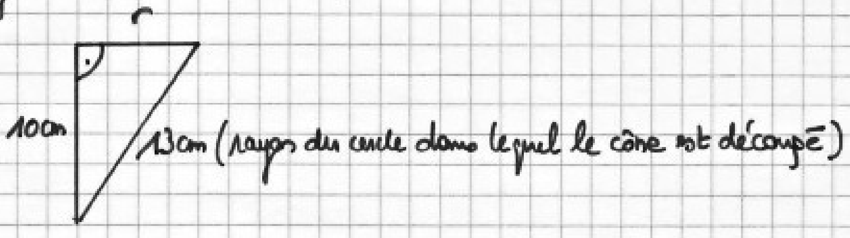


On a : $\tan\theta = \frac{opp}{adj} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = \underline{21,801°}$.

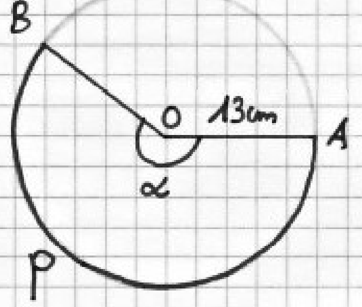
On peut aussi calculer la diagonale du parallélipipède rectangle, autrement dit le "hyp" du triangle rectangle ci-dessus.
On a $hyp^2 = 25^2 + 10^2 = 725 \Rightarrow hyp \cong 26,926$ cm.
La diagonale de la boîte est donc de $\underline{26,926 \text{ cm}}$.

<u>Exercice 57</u>

On va commencer par calculer le rayon de la base du cône, nommé r.
On a la situation suivante :



Avec le théorème de Pythagore, on a $13^2 = 10^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = 13^2 - 10^2 = 69 \Rightarrow r = \sqrt{69}$.
Ainsi le périmètre de la base du cône est $p = 2\pi r = 2\pi\sqrt{69}$.
Le périmètre de la base du cône correspond à la longueur de l'arc de cercle découpé pour former le cône :



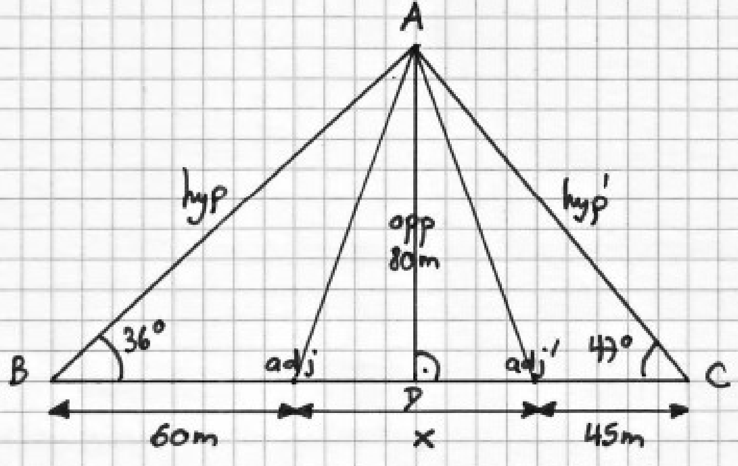
Le périmètre de ce cercle entier est $2\pi \cdot 13 = 26\pi$ cm.
Il correspond à un angle au centre de $360°$.
On a donc les équivalences

$$26\pi \longleftrightarrow 360°$$
$$1 \longleftrightarrow \frac{360°}{26\pi} = \frac{180°}{13\pi}$$
$$p \longleftrightarrow \frac{180°}{13\pi} \cdot p.$$

Ainsi, on a $\alpha = \frac{180°}{13\pi} \cdot p = \frac{180°}{13\pi} \cdot 2\pi\sqrt{69} = \frac{360°}{13}\sqrt{69} \cong \underline{\underline{230°}}$.

Exercice 58

On a la situation suivante:



Dans le triangle ABD, on a $\tan 36° = \frac{opp}{adj} = \frac{80}{adj} \Longrightarrow adj \cdot \tan 36° = 80$

$\Longrightarrow adj = \frac{80}{\tan 36°} \cong 110,11\,m.$

Dans le triangle ADC, on a $\tan 47° = \frac{opp}{adj'} = \frac{80}{adj'} \Longrightarrow adj' \cdot \tan 47° = 80$

$\Longrightarrow adj' = \frac{80}{\tan 47°} \cong 74,60\,m.$

On a alors $BC = BD + DC = adj + adj' \cong 184,71\,m.$

Par conséquent $x = 184,71 - 60 - 45 = 79,71\,m.$

La longueur du tunnel est donc de $\underline{\underline{79,71\,m.}}$

Exercice 59

a) $(1+\cos 2\theta)(1-\cos 2\theta) = 1^2 - \cos^2 2\theta = 1-\cos^2 2\theta$.

On a $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, d'où $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$.

Ainsi $1-\cos^2 2\theta = \sin^2 2\theta$.

On a donc bien $(1+\cos 2\theta)(1-\cos 2\theta) = \sin^2 2\theta$. CQFD.

b) $\cos^2(2\theta) - \sin^2(2\theta) = \cos^2(2\theta) - (1-\cos^2(2\theta))$ (voir a)).

Ainsi $\cos^2(2\theta) - \sin^2(2\theta) = \cos^2(2\theta) - 1 + \cos^2(2\theta) = 2\cos^2(2\theta) - 1$ CQFD.

c) On a, similairement à ce qui a été fait en a), $\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1-\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

On a alors $1-2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1-2\left(1-\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = 1-2+2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) =$

$= 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1$. CQFD.

d) Comme $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, on a :

$$(1-\sin^2\theta)(1+\tan^2\theta) = (1-\sin^2\theta)\left(1+\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2\right) = (1-\sin^2\theta)\left(1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right) =$$

$$= 1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - \sin^2\theta - \frac{\sin^4\theta}{\cos^2\theta} = \underbrace{1-\sin^2\theta}_{\cos^2\theta} + \frac{\sin^2\theta - \sin^4\theta}{\cos^2\theta} =$$

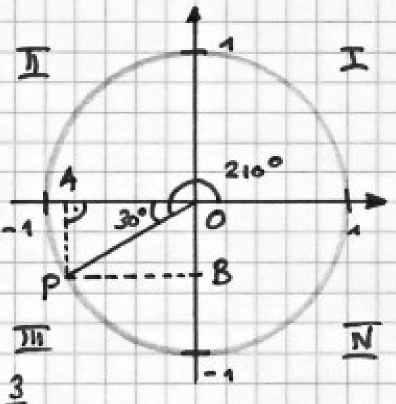
puisque $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$$= \cos^2\theta + \frac{\sin^2\theta\overbrace{(1-\sin^2\theta)}^{\cos^2\theta}}{\cos^2\theta} = \cos^2\theta + \frac{\sin^2\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$ CQFD

e) $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\cos\theta} = \tan\theta + 1$. CQFD.

Exercice 60

a) On a $\pi \longleftrightarrow 180° \Longrightarrow \frac{\pi}{6} \longleftrightarrow 30° \Longrightarrow \frac{7\pi}{6} \longleftrightarrow 210°$.



Le triangle AOP est la moitié d'un triangle équilatéral.

Comme $OP = 1$ (cercle trigonométrique), on a $AP = \frac{1}{2}$.

Par le théorème de Pythagore, on a

$OP^2 = AP^2 + OA^2 \Longrightarrow OA^2 = OP^2 - AP^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\Longrightarrow OA = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

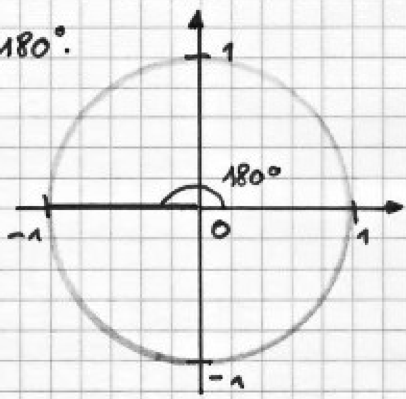
Comme P est dans le quadrant III, on obtient $\cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

On a alors $\tan\frac{7\pi}{6} = \frac{\sin\frac{7\pi}{6}}{\cos\frac{7\pi}{6}} = \frac{-1/2}{-\sqrt{3}/2} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) On a $\pi \longleftrightarrow 180° \Longrightarrow 3\pi \longleftrightarrow 540° \Longrightarrow 3\pi \longleftrightarrow 360° + 180°$.

On a alors clairement $\cos 3\pi = -1$ et $\sin 3\pi = 0$.

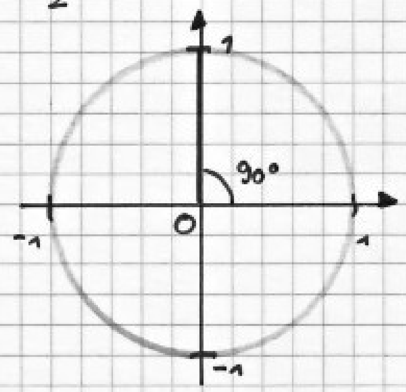
De plus $\tan 3\pi = \frac{\sin 3\pi}{\cos 3\pi} = \frac{0}{-1} = 0$.



c) On a $\pi \longleftrightarrow 180° \Longrightarrow \frac{\pi}{2} \longleftrightarrow 90° \Longrightarrow \frac{5\pi}{2} \longleftrightarrow 450° \Longrightarrow \frac{5\pi}{2} \longleftrightarrow 360° + 90°$.

On a alors clairement $\cos\frac{5\pi}{2} = 0$ et $\sin\frac{5\pi}{2} = 1$.

De plus $\tan\frac{5\pi}{2} = \frac{\sin\frac{5\pi}{2}}{\cos\frac{5\pi}{2}} =$ "$\frac{1}{0}$" n'existe pas.



Exercice 61

Les coordonnées de tout point P correspond à un angle θ sur le cercle trigonométrique sont

$$P(\cos\theta ; \sin\theta).$$

a) $\pi \longleftrightarrow 180° \Longrightarrow -\pi \longleftrightarrow -180° \Longrightarrow -\pi \longleftrightarrow -360° + 180°$

$\Longrightarrow \cos(-\pi) = -1$ et $\sin(-\pi) = 0 \Longrightarrow \underline{\underline{P(-1 ; 0)}}.$

b) $\pi \longleftrightarrow 180° \Longrightarrow 6\pi \longleftrightarrow 1080° \Longrightarrow 6\pi \longleftrightarrow 3 \cdot 360° + 0°$

$\Longrightarrow \cos(6\pi) = 1$ et $\sin(6\pi) = 0 \Longrightarrow \underline{\underline{P(1 ; 0)}}.$

c) $\pi \longleftrightarrow 180° \Longrightarrow \frac{\pi}{2} \longleftrightarrow 90° \Longrightarrow \frac{5\pi}{2} \longleftrightarrow 450° \Longrightarrow \frac{5\pi}{2} \longleftrightarrow 360° + 90°$

$\Longrightarrow \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 1 \Longrightarrow \underline{\underline{P(0 ; 1)}}.$

d) $\pi \longleftrightarrow 180° \Longrightarrow \frac{\pi}{2} \longleftrightarrow 90° \Longrightarrow -\frac{\pi}{2} \longleftrightarrow -90° \Longrightarrow -\frac{\pi}{2} \longleftrightarrow -360° + 270°$

$\Longrightarrow \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \Longrightarrow \underline{\underline{P(0 ; -1)}}.$

e) $\pi \longleftrightarrow 180° \Longrightarrow \frac{\pi}{4} \longleftrightarrow 45° \Longrightarrow \frac{3\pi}{4} \longleftrightarrow 135°.$

On a alors $\underline{\underline{P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}$ (voir ci-contre).

f) $\pi \longleftrightarrow 180° \Longrightarrow \frac{\pi}{4} \longleftrightarrow 45° \Longrightarrow -\frac{7\pi}{4} \longleftrightarrow -315°$

$\Longrightarrow -\frac{7\pi}{4} \longleftrightarrow -360° + 45°.$

On a alors $\underline{\underline{P\left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}$ (voir ci-contre).

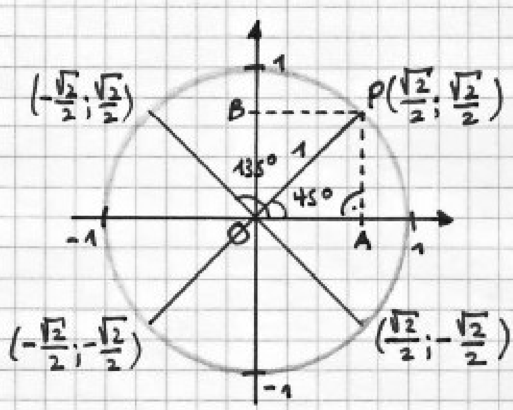
g) $\pi \longleftrightarrow 180° \Longrightarrow \frac{\pi}{4} \longleftrightarrow 45° \Longrightarrow \frac{7\pi}{4} \longleftrightarrow 315°.$

On a alors $\underline{\underline{P\left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}$ (voir ci-contre).

h) $\pi \longleftrightarrow 180° \Longrightarrow \frac{\pi}{4} \longleftrightarrow 45° \Longrightarrow -\frac{3\pi}{4} \longleftrightarrow -135°$

$\Longrightarrow -\frac{3\pi}{4} \longleftrightarrow -360° + 215°.$

On a alors $\underline{\underline{P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} ; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}$ (voir ci-contre).



Le triangle ABO est isocèle rectangle $(OA = AB)$. On a

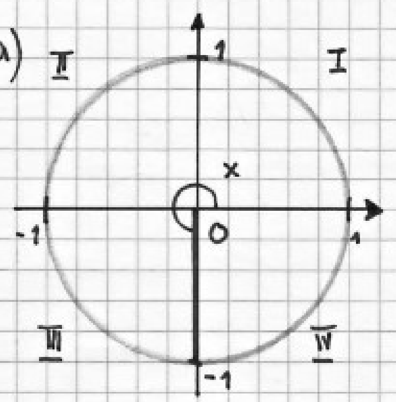
$OP^2 = OA^2 + OB^2 = OA^2 + OA^2$

$\Longrightarrow 1^2 = 2OA^2 \Longrightarrow OA^2 = \frac{1}{2}$

$\Longrightarrow OA = AB = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 62

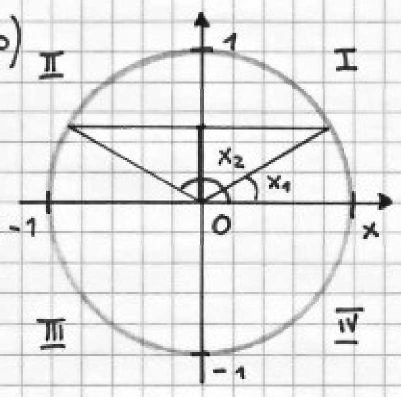
a)



On a $x = 270° = \dfrac{3\pi}{2}$.

x se trouve entre les quadrants III et IV.

b)



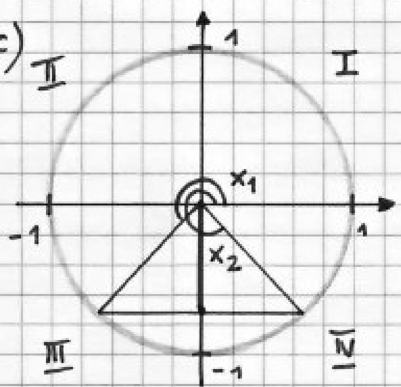
A la calculatrice, on a $x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30° = \frac{\pi}{6}$.

On a ainsi 2 solutions:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} \quad \text{et} \quad x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

x_1 se trouve dans le quadrant I et x_2 dans le quadrant II.

c)



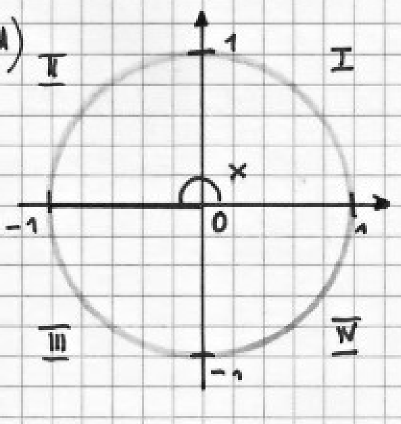
A la calculatrice, on a $x = \sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -45° = -\frac{\pi}{4}$.

On a ainsi 2 solutions:

$$x_1 = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}.$$

x_1 se trouve dans le quadrant III et x_2 dans le quadrant IV.

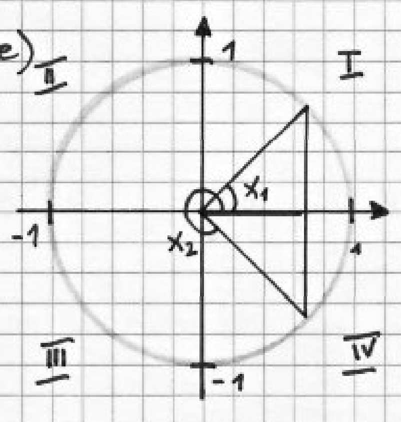
d)



On a $x = 180° = \pi$.

x se trouve entre les quadrants II et III.

e)



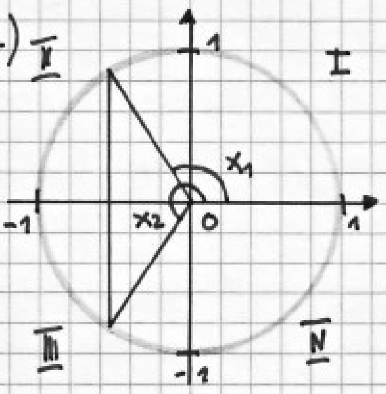
A la calculatrice, on a $x = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45° = \frac{\pi}{4}$.

On a ainsi 2 solutions:

$$x_1 = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}.$$

x_1 se trouve dans le quadrant I et x_2 dans le quadrant IV.

f)



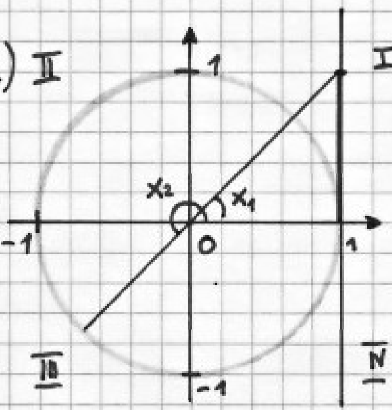
A la calculatrice, $x = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120° = \frac{2\pi}{3}$.

On a ainsi 2 solutions :

$$x_1 = \underline{\underline{\frac{2\pi}{3}}} \quad \text{et} \quad x_2 = 2\pi - \frac{2\pi}{3} = \underline{\underline{\frac{4\pi}{3}}}.$$

x_1 se trouve dans le quadrant II et x_2 dans le quadrant III.

g)



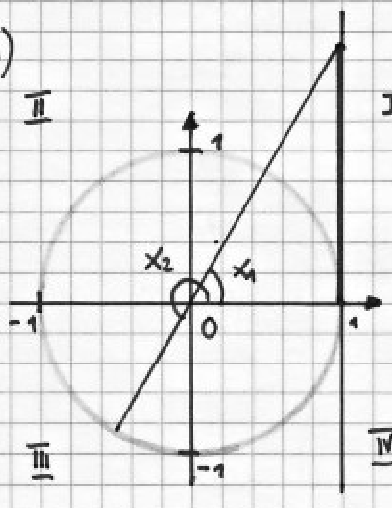
A la calculatrice, $x = \tan^{-1}(1) = 45° = \frac{\pi}{4}$.

On a ainsi 2 solutions :

$$x_1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}} \quad \text{et} \quad x_2 = \pi + \frac{\pi}{4} = \underline{\underline{\frac{5\pi}{4}}}.$$

x_1 est dans le quadrant I et x_2 dans le quadrant III.

h)



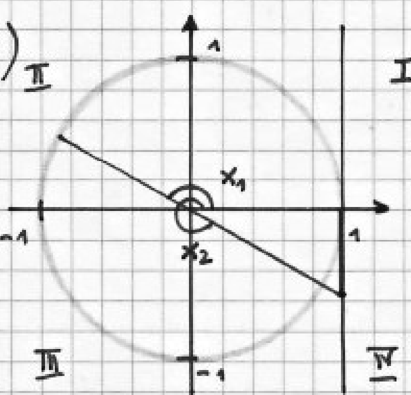
A la calculatrice, $x = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = 60° = \frac{\pi}{3}$.

On a ainsi 2 solutions :

$$x_1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{3}}} \quad \text{et} \quad x_2 = \pi + \frac{\pi}{3} = \underline{\underline{\frac{4\pi}{3}}}.$$

x_1 est dans le quadrant I et x_2 est dans le quadrant III.

i)



A la calculatrice, $x = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -30° = \frac{\pi}{6}$

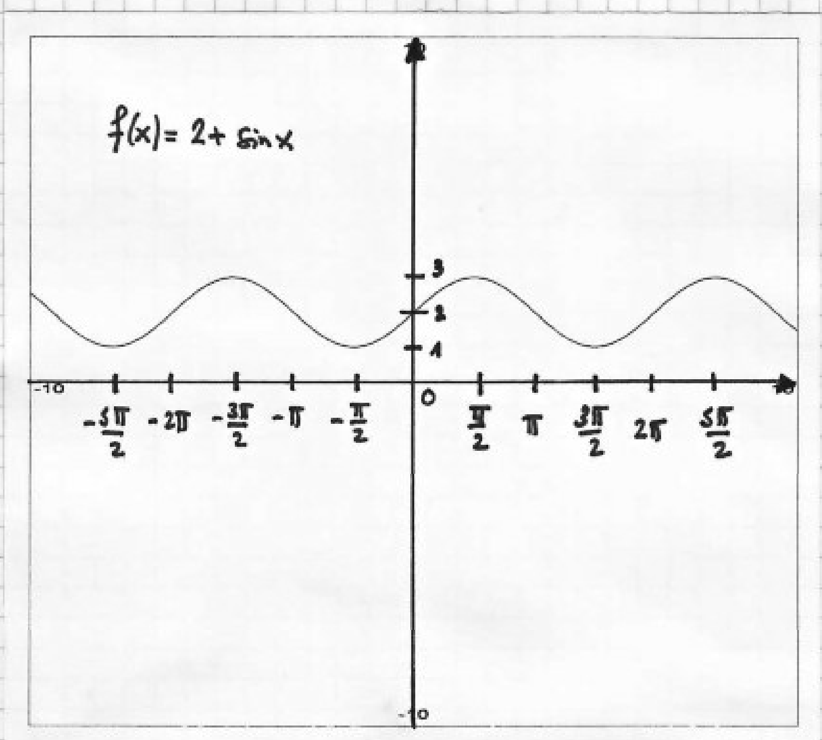
On a ainsi 2 solutions :

$$x_1 = \pi - \frac{\pi}{6} = \underline{\underline{\frac{5\pi}{6}}} \quad \text{et} \quad x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \underline{\underline{\frac{11\pi}{6}}}.$$

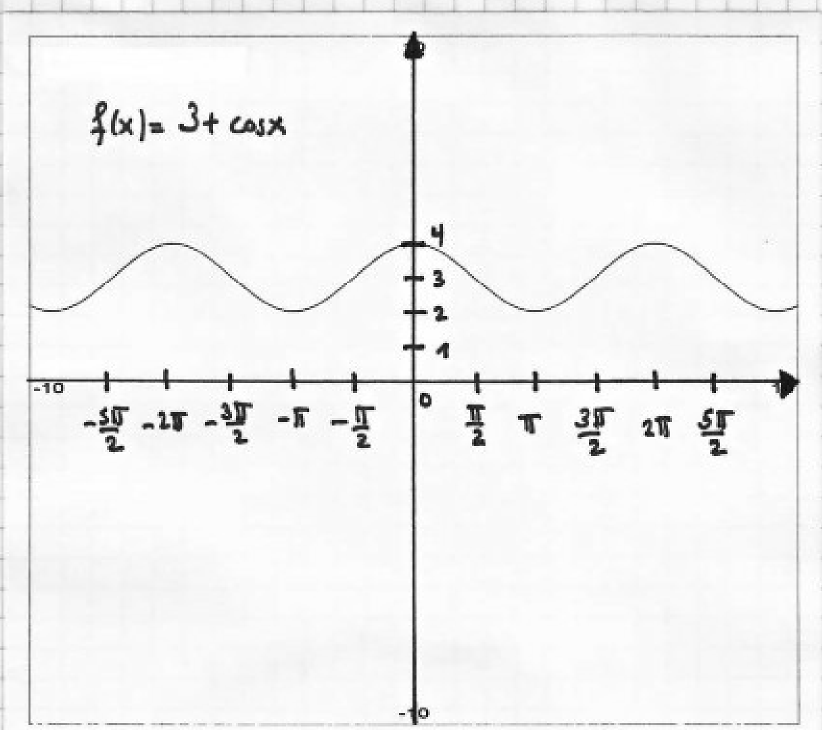
x_1 est dans le quadrant II et x_2 dans le quadrant IV.

Exercice 63.

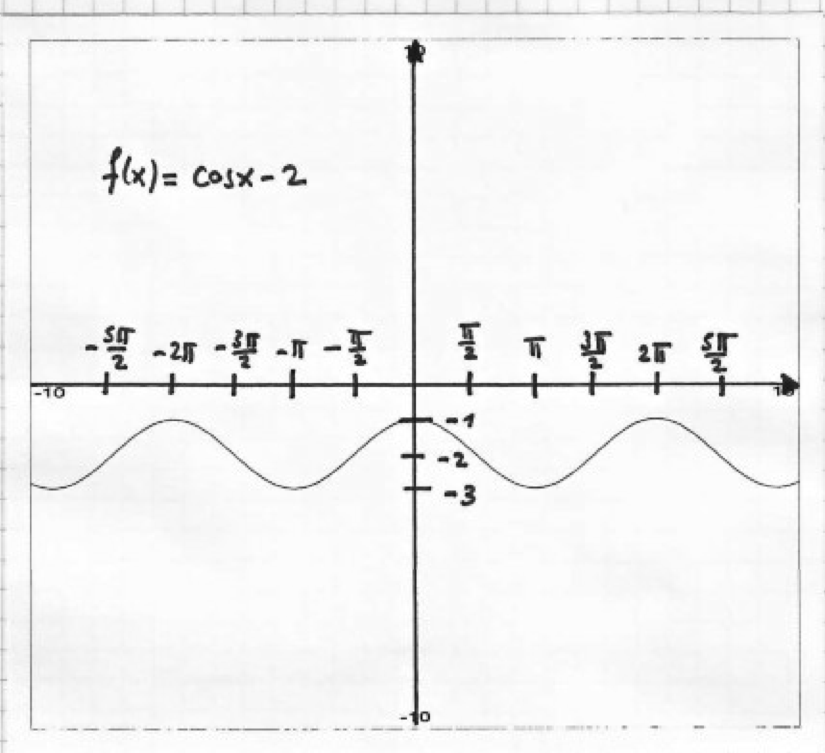
a)



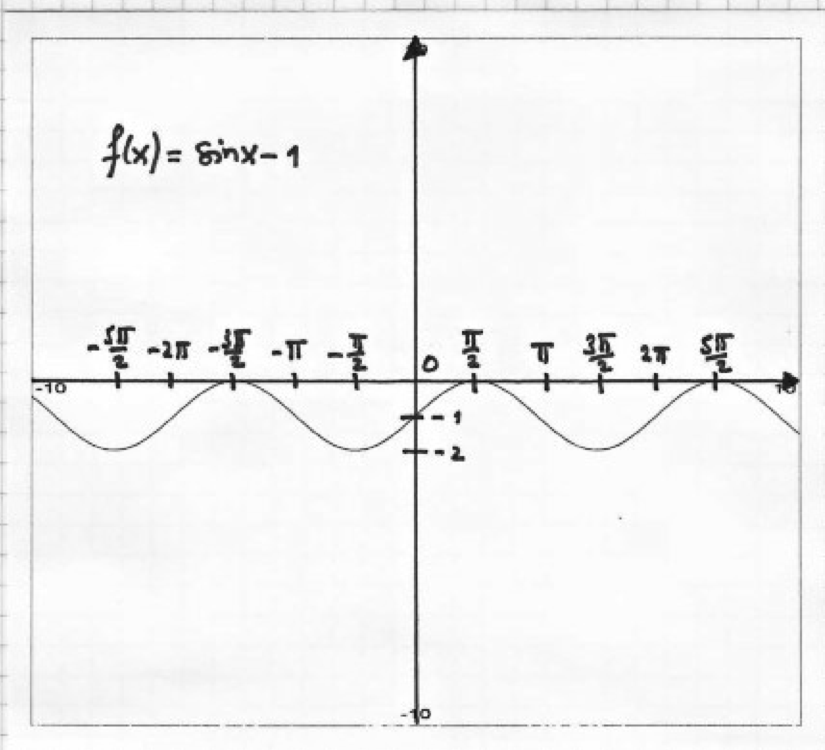
b)



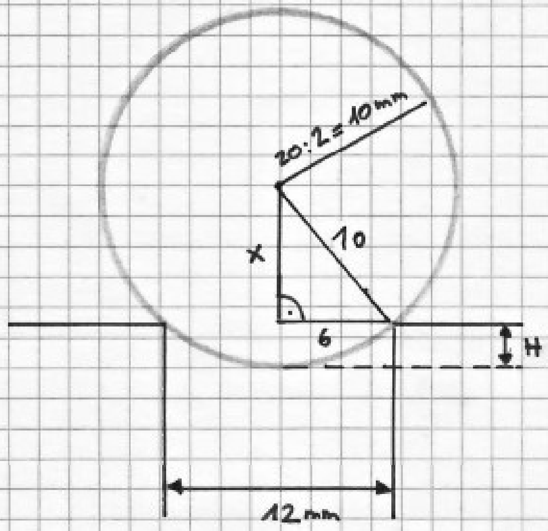
c)


$f(x) = \cos x - 2$
$-\frac{5\pi}{2}$
-2π
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
$\frac{5\pi}{2}$
-10
10
-1
-2
-3
-10

d)


$f(x) = \sin x - 1$
$-\frac{5\pi}{2}$
-2π
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
$\frac{5\pi}{2}$
-10
10
-1
-2
-10

Exercice 64

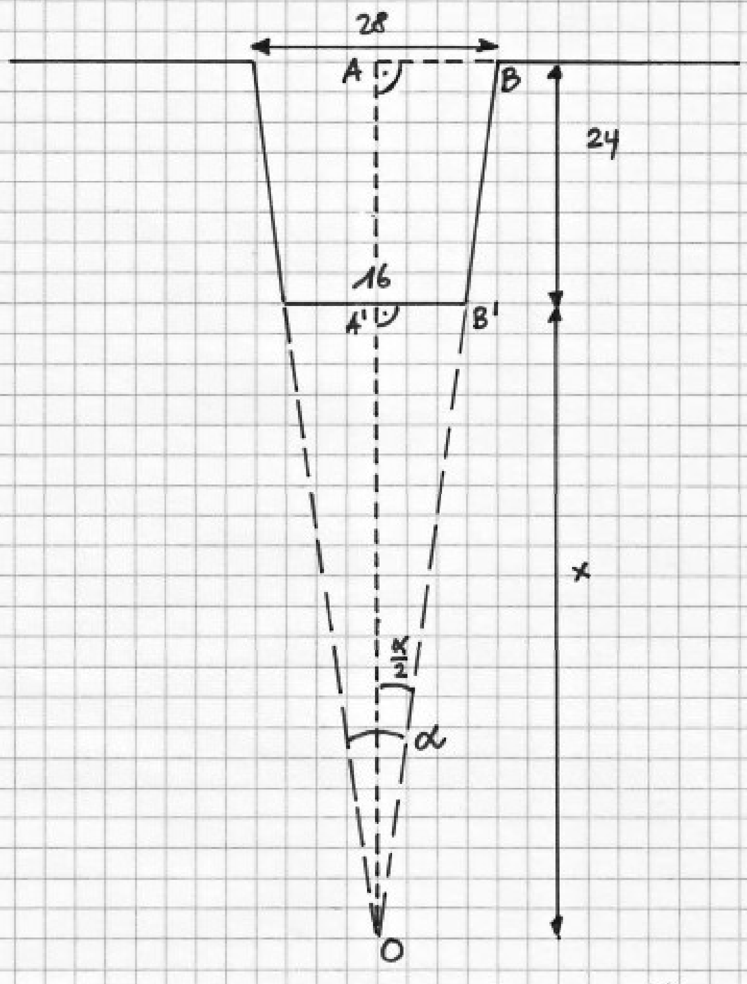


Par le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle, on a $10^2 = x^2 + 6^2 \Rightarrow x^2 = 10^2 - 6^2 = 64$

$\Rightarrow x = 8$ mm.

On a alors $H = 10 - x = 10 - 8 = \underline{\underline{2 \text{ mm}}}$.

Exercice 65



Dans le triangle rectangle OAB, on a $OA = x+24$, $AB = \frac{28}{2} = 14$ et $\widehat{AOB} = \frac{\alpha}{2}$.

On a alors $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{opp}{adj} = \frac{AB}{OA} = \frac{14}{x+24}$.

Dans le triangle rectangle OA'B', on a $OA' = x$, $A'B' = \frac{16}{2} = 8$ et $\widehat{A'OB'} = \frac{\alpha}{2}$.

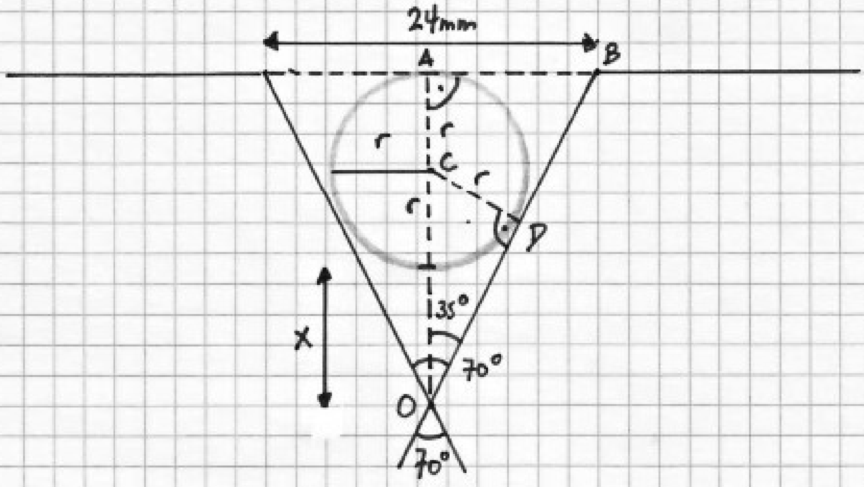
On a alors $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{opp}{adj} = \frac{A'B'}{OA'} = \frac{8}{x}$.

On en déduit que : $\frac{8}{x} = \frac{14}{x+24} \Rightarrow 8(x+24) = 14x \Rightarrow 8x + 192 = 14x \Rightarrow 6x = 192$

$\Rightarrow x = 32$.

On a alors que $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 14{,}036° \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 28{,}072°}}$.

Exercice 66



Dans le triangle rectangle OAB, on a $OA = 2r+x$, $AB = \frac{24}{2} = 12$ et $\widehat{AOB} = \frac{70°}{2} = 35°$.

On a alors $\tan(35°) = \frac{opp}{adj} = \frac{AB}{OA} = \frac{12}{2r+x} \Rightarrow (2r+x)\tan(35°) = 12 \Rightarrow 2r+x = \frac{12}{\tan(35°)}$

$\Rightarrow x = \frac{12}{\tan(35°)} - 2r.$

Dans le triangle rectangle OCD, on a $OC = r+x$, $CD = r$ et $\widehat{COD} = 35°$.

On a alors $\sin(35°) = \frac{CD}{OC} = \frac{r}{r+x} \Rightarrow (r+x)\sin(35°) = r \Rightarrow r+x = \frac{r}{\sin(35°)}$

$\Rightarrow x = \frac{r}{\sin(35°)} - r.$

On en déduit que $\frac{12}{\tan(35°)} - 2r = \frac{r}{\sin(35°)} - r \Rightarrow \frac{r}{\sin(35°)} + r = \frac{12}{\tan(35°)}$

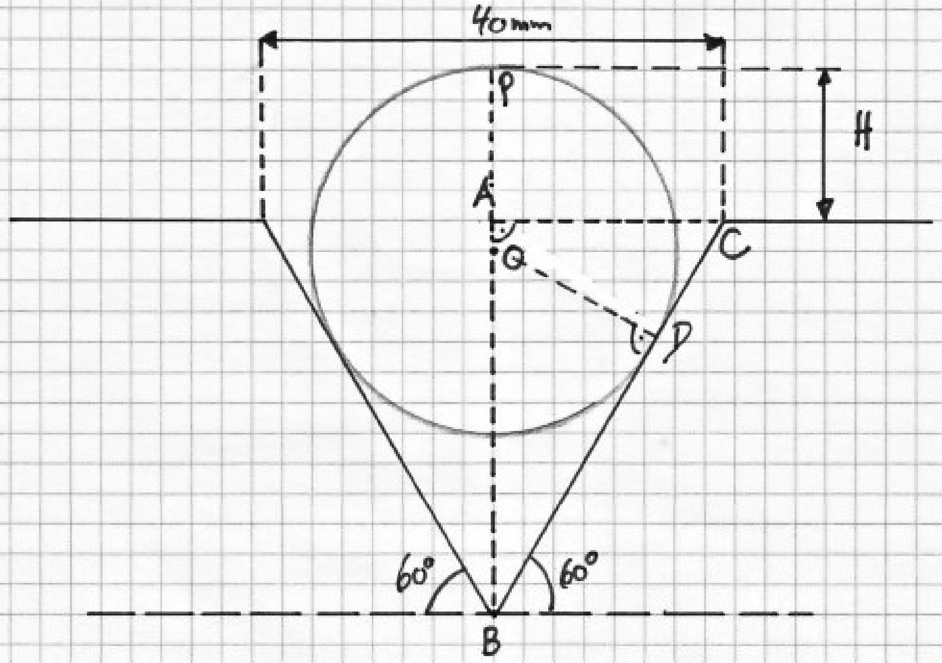
$\Rightarrow r\left(\frac{1}{\sin(35°)} + 1\right) = \frac{12}{\tan(35°)} \Rightarrow r \cdot \frac{1+\sin(35°)}{\sin(35°)} = \frac{12}{\frac{\sin(35°)}{\cos(35°)}}$

$\Rightarrow r \cdot \frac{1+\sin(35°)}{\sin(35°)} = \frac{12\cos(35°)}{\sin(35°)} \Rightarrow r(1+\sin(35°)) = 12\cos(35°)$

$\Rightarrow r = \frac{12\cos(35°)}{1+\sin(35°)} \cong 6,247$ mm.

Ainsi le diamètre de la pièce est $\sim 2 \cdot 6,247 = \underline{\underline{12,494 \text{ mm}}}$

Exercice 67



Dans le triangle rectangle ABC, on a $AC = \frac{40}{2} = 20mm$ et $\widehat{ABC} = \frac{180° - 60° - 60°}{2} = 30°$.

On a ainsi $\tan(30°) = \frac{opp}{adj} = \frac{AC}{AB} = \frac{20}{AB} \Rightarrow \tan(30°) \cdot AB = 20 \Rightarrow AB = \frac{20}{\tan(30°)}$.

Comme $\tan(30°) = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, on obtient $AB = \frac{20}{1/\sqrt{3}} = 20\sqrt{3}$ mm.

Dans le triangle rectangle AOD, on a OD = rayon de la pige = 14mm et $\widehat{OBD} = \widehat{ABC} = 30°$.

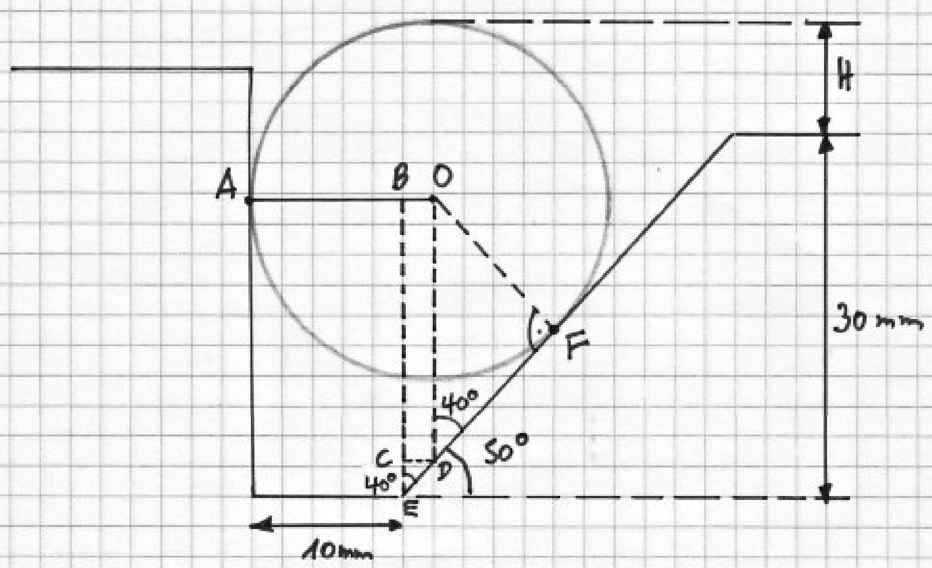
On a ainsi $\sin(30°) = \frac{opp}{hyp} = \frac{14}{OB} \Rightarrow OB \cdot \sin(30°) = 14 \Rightarrow OB = \frac{14}{\sin(30°)}$.

Comme $\sin(30°) = 0{,}5$, on obtient $OB = \frac{14}{0{,}5} = 28$ mm.

On a finalement : $H = BP - AB$ avec $BP = OP + OB$ où OP est le rayon de la pige.
Avec $AB = 20\sqrt{3}$, $OP = 14$ et $OB = 28$, on obtient $BP = 14 + 28 = 42$ et

$H = 42 - 20\sqrt{3} \cong \underline{\underline{7{,}359 \text{ mm}}}$.

Exercice 68



On a : $AB = 10\,mm$, $AO = FO =$ rayon de la pige $= \frac{25}{2} = 12,5\,mm$.

Ainsi : $BO = AO - AB = 12,5 - 10 = 2,5\,mm$ et donc $CD = 2,5\,mm$.

Dans le triangle rectangle CDE, on a $\tan(40°) = \frac{opp}{adj} = \frac{CD}{CE} = \frac{2,5}{CE}$

$\Rightarrow CE \cdot \tan(40°) = 2,5 \Rightarrow CE = \frac{2,5}{\tan(40°)}$.

Dans le triangle rectangle ODF, on a $\sin(40°) = \frac{opp}{hyp} = \frac{OF}{OD} = \frac{12,5}{OD}$

$\Rightarrow OD \cdot \sin(40°) = 12,5 \Rightarrow OD = \frac{12,5}{\sin(40°)}$.

Comme $BC = OD$, on obtient $BC = \frac{12,5}{\sin(40°)}$.

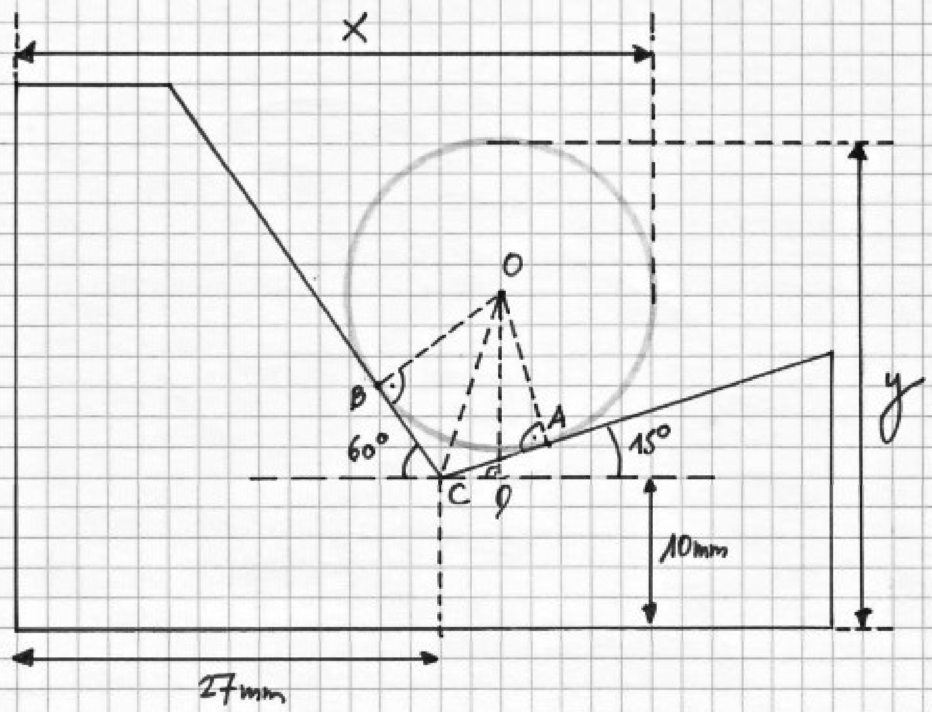
On a alors $BE = BC + CE = \frac{12,5}{\sin(40°)} + \frac{2,5}{\tan(40°)}$.

Comme $H + 30 = BE +$ rayon de la pige, on obtient :

$H = BE +$ rayon de la pige $- 30 = \frac{12,5}{\sin(40°)} + \frac{2,5}{\tan(40°)} + 12,5 - 30 =$

$= \frac{12,5}{\sin(40°)} + \frac{2,5}{\tan(40°)} - 17,5 \simeq \underline{4,926\,mm}$.

Exercice 69.



Dans le triangle OAC, on a OA = rayon de la pige = $\frac{11}{2} = 5{,}5$ mm et $\widehat{OCA} = \frac{1}{2}\widehat{BCA}$ (puisque O étant à la même distance des côtés OA et OB, il doit faire partie de la bissectrice de l'angle $\widehat{BCA}$).

Comme $\widehat{BCA} = 180° - 60° - 15° = 105°$, on obtient $\widehat{OCA} = \frac{105°}{2} = 52{,}5°$.

Dans le triangle rectangle OAC, on a alors $\sin(52{,}5°) = \frac{opp}{hyp} = \frac{OA}{OC} = \frac{5{,}5}{OC}$

$\Rightarrow OC \cdot \sin(52{,}5°) = 5{,}5 \Rightarrow OC = \frac{5{,}5}{\sin(52{,}5°)}$.

Dans le triangle rectangle OCD, on a $\widehat{OCD} = \widehat{OCA} + 15° = 52{,}5° + 15° = 67{,}5°$.

Ainsi $\sin(67{,}5°) = \frac{opp}{hyp} = \frac{OD}{OC} \Rightarrow OD = OC \cdot \sin(67{,}5°) = \frac{5{,}5}{\sin(52{,}5°)} \cdot \sin(67{,}5°) =$

$= \frac{5{,}5 \sin(67{,}5°)}{\sin(52{,}5°)}$.

On a alors $y = 10 + OD +$ rayon de la pige $= 10 + \frac{5{,}5\sin(67{,}5°)}{\sin(52{,}5°)} + 5{,}5 \cong \underline{\underline{21{,}905 \text{ mm}}}$.

De plus $x = 27 + CD +$ rayon de la pige.

Dans le triangle rectangle OCD, on a $OC = \frac{5{,}5}{\sin(52{,}5°)}$ et $\widehat{OCD} = 67{,}5°$.

On a alors $\cos(67{,}5°) = \frac{adj}{hyp} = \frac{CD}{OC} \Rightarrow CD = OC \cdot \cos(67{,}5°) = \frac{5{,}5}{\sin(52{,}5°)} \cdot \cos(67{,}5°) =$

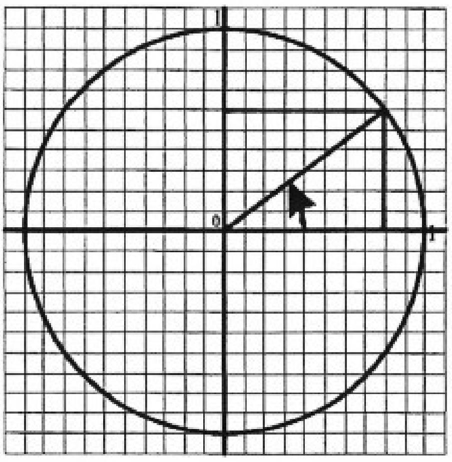
$= \frac{5{,}5\cos(67{,}5°)}{\sin(52{,}5°)}$.

Ainsi $x = 27 + \frac{5{,}5\cos(67{,}5°)}{\sin(52{,}5°)} + 5{,}5 \cong \underline{\underline{35{,}153 \text{ mm}}}$.

Exercice 70 :

Donner le cosinus et le sinus des angles dessinés suivants :

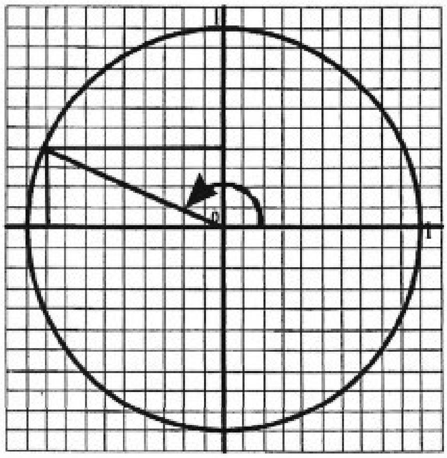
a)



$\cos = 0{,}8$

$\sin = 0{,}6$

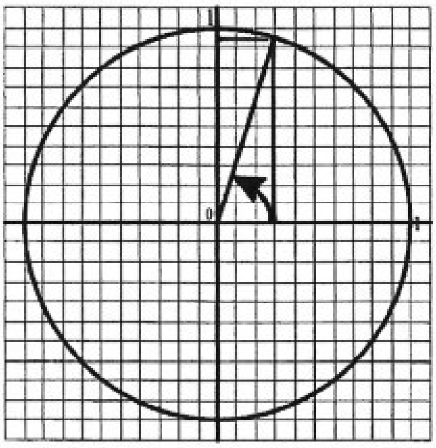
b)



$\cos = -0{,}9$

$\sin = 0{,}4$

c)



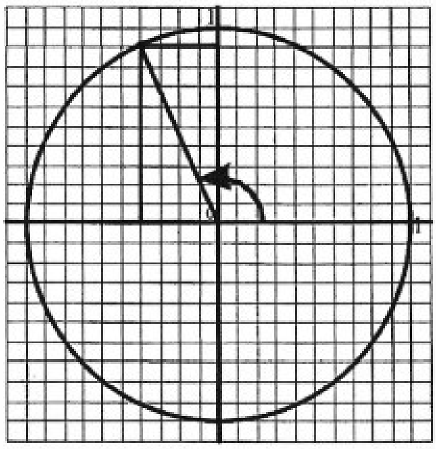
$\cos = 0{,}3$

$\sin = \sqrt{1-\cos^2} =$

$= \sqrt{1-0{,}3^2} =$

$\cong 0{,}95$

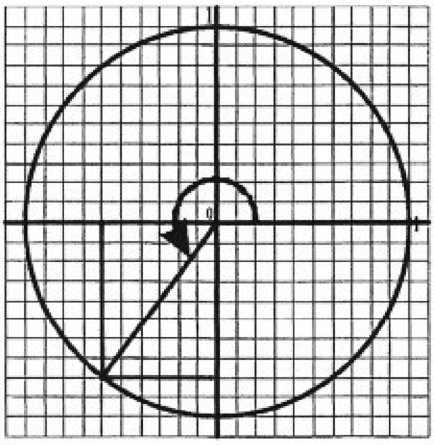
d)



$\cos = -0{,}4$

$\sin = 0{,}9$

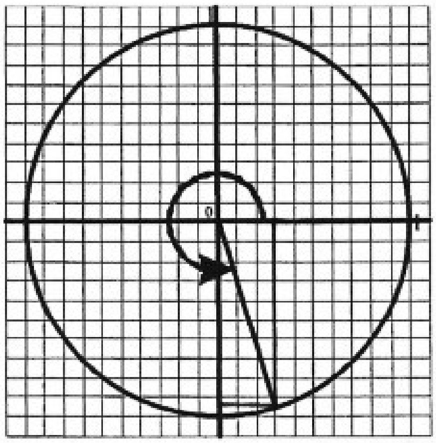
e)



$\cos = -0{,}6$

$\sin = -0{,}8$

f)

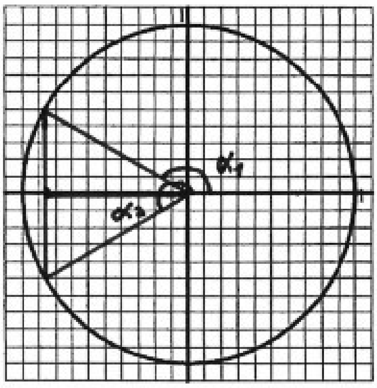


$\cos = 0{,}3$

$\sin = -0{,}95$

Exercice 71 : $\pi \leftrightarrow 180°$

a) Dessiner les angles tels que $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et calculer ces angles en degrés et en radians :

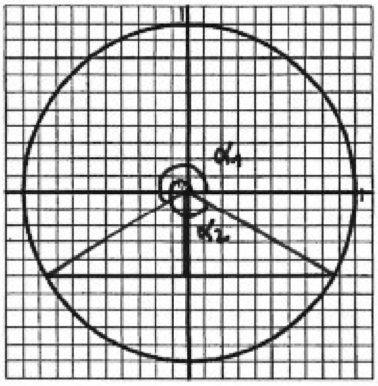


Calculatrice : $\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 150°$

$\Rightarrow \alpha_1 = 150° = \frac{5\pi}{6}$

$\alpha_2 = 360° - 150° = 210° = \frac{7\pi}{6}$

b) Dessiner les angles tels que $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$ et calculer ces angles en degrés et en radians :

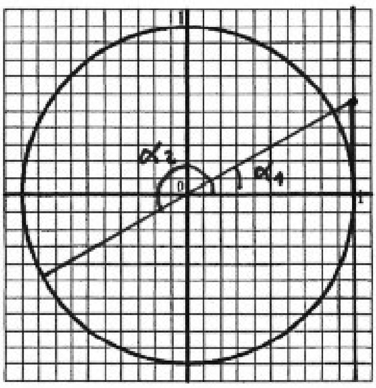


Calculatrice : $\alpha = \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -30°$

$\Rightarrow \alpha_1 = 180° + 30° = 210° = \frac{7\pi}{6}$

$\alpha_2 = 360° - 30° = 330° = \frac{11\pi}{6}$

c) Dessiner les angles tels que $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et calculer ces angles en degrés et en radians :



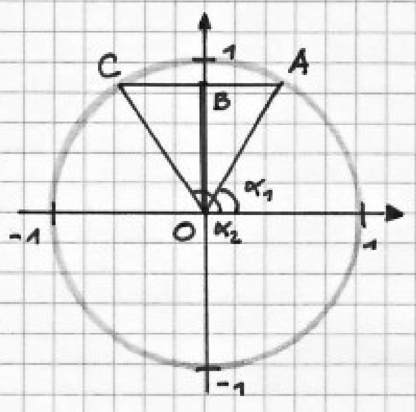
Calculatrice : $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30°$

$\Rightarrow \alpha_1 = 30° = \frac{\pi}{6}$

$\alpha_2 = 180° + 30° = 210° = \frac{7\pi}{6}$

Exercice 72

a) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$:



Le triangle ABC est un triangle équilatéral de hauteur $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (en effet, dans le triangle rectangle ABO, on a $AO = 1$, $AB = \frac{1}{2}$, et, par le théorème de Pythagore, $AO^2 = AB^2 + BO^2$
$\Rightarrow BO^2 = AO^2 - AB^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ et
$BO = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$).

Ainsi $\widehat{OAC} = \widehat{ACO} = \widehat{COA} = 60°$ et $\widehat{BOA} = \frac{1}{2}\widehat{COA} = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°$.

Ainsi $\alpha_1 = 90° - 30° = 60°$ + le nb de tours que l'on veut dans un sens ou dans l'autre.

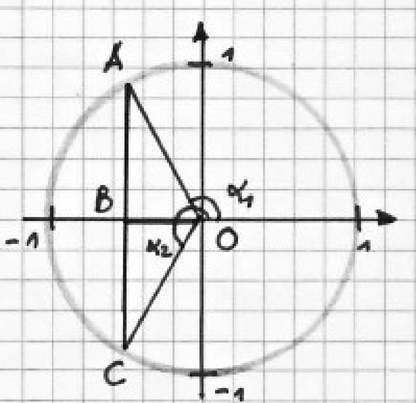
Le nombre de tours dans un sens ou dans l'autre peut être exprimé par $k \cdot 360°$, $k \in \mathbb{Z}$, ou $k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (puisque $2\pi \leftrightarrow 360°$).

Donc $\alpha_1 = 60° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

De plus $\alpha_2 = 90° + 30° = 120° + k \cdot 360° = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Les solutions de $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sont donc : $\alpha_1 = 60° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et
$\alpha_2 = 120° + k \cdot 360° = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$:

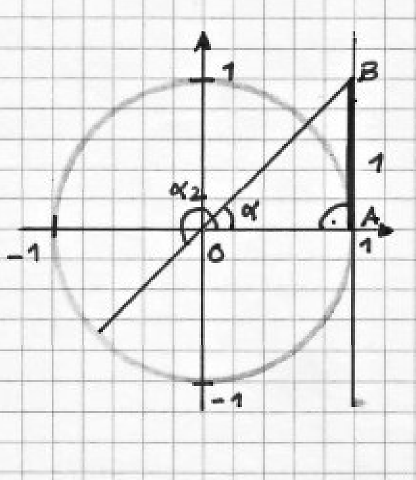


Comme $AO = 1$ et $BO = \frac{1}{2}$, le triangle ABO est la moitié d'un triangle équilatéral. On a alors $\widehat{AOB} = 60°$ et $\alpha_1 = 180° - 60° = 120°$.

On a en outre $\alpha_2 = 180° + 60° = 240°$.

Les solutions de $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ sont donc :

$\alpha_1 = 120° + k \cdot 360° = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et
$\alpha_2 = 240° + k \cdot 360° = \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



c) $\tan\alpha = 1$:

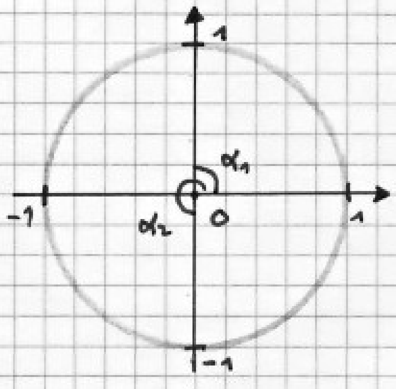
Comme $OA = AB = 1$, le triangle OAB est isocèle rectangle. On a alors $\alpha_1 = 45°$ et $\alpha_2 = 180° + 45°$
$= 225°$.

Les solutions de $\tan\alpha = 1$ sont donc $\alpha_1 = 45^\circ + k\cdot 360^\circ = \frac{\pi}{4} + k\cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et

$\alpha_2 = 225^\circ + k\cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{4} + k\cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

ce que l'on peut résumer en $\underline{\underline{\alpha = 45^\circ + k\cdot 180^\circ = \frac{\pi}{4} + k\cdot\pi,\ k \in \mathbb{Z}}}$.

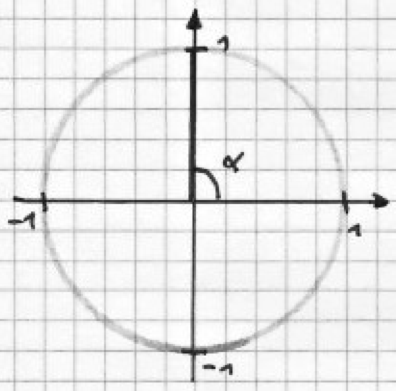
d) $\cos\alpha = 0$:



Les solutions de $\cos\alpha = 0$ sont clairement:

$$\underline{\underline{\alpha = 90^\circ + k\cdot 180^\circ = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi,\ k \in \mathbb{Z}}}.$$

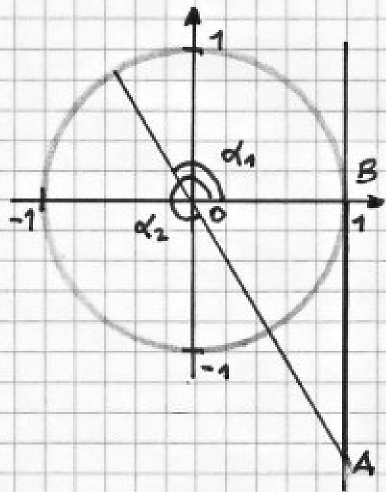
e) $\sin\alpha = 1$:



Les solutions de $\sin\alpha = 1$ sont clairement:

$$\underline{\underline{\alpha = 90^\circ + k\cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}}}.$$

f) $\tan\alpha = -\sqrt{3}$



Dans le triangle OAB, on a $OB = 1$ et $OA = \sqrt{3}$.

Par le théorème de Pythagore, on a:

$OA^2 = OB^2 + AB^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 1 + 3 = 4$

$\Rightarrow OA = 2$.

Ainsi le triangle rectangle OAB est la moitié d'un triangle équilatéral et on a $\widehat{AOB} = 60^\circ$.

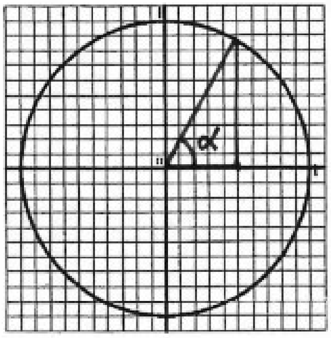
On a alors $\alpha_1 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ et $\alpha_2 = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$.

Les solutions de $\tan\alpha = -\sqrt{3}$ sont donc $\underline{\underline{\alpha = 120^\circ + k\cdot 180^\circ = \frac{2\pi}{3} + k\cdot\pi,\ k \in \mathbb{Z}}}$.

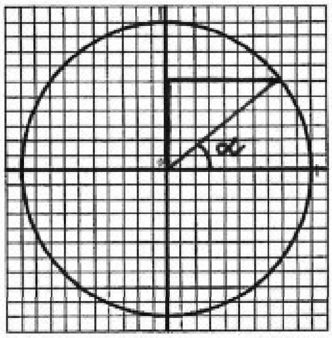
Exercice 73 :

Dessiner les angles α sur le cercle trigonométrique tels que :

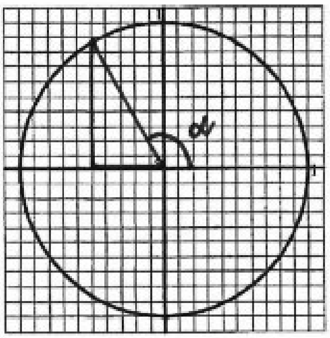
a) $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\alpha > 0$



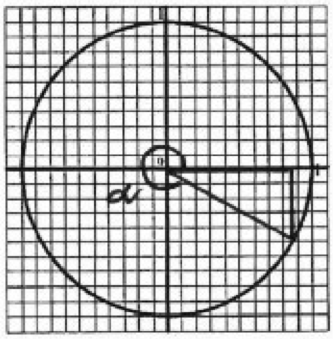
b) $\cos\alpha > 0$ et $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0,707$



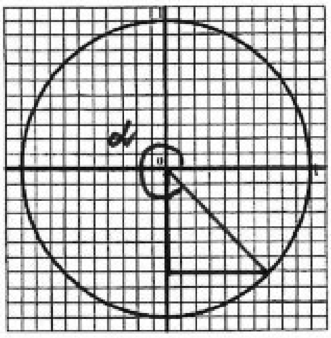
c) $\cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin\alpha > 0$



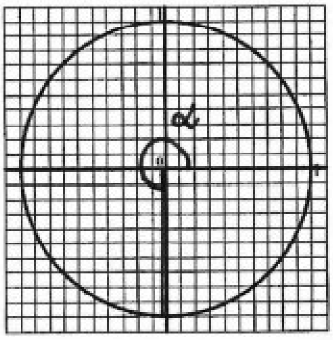
d) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0,867$ et $\sin\alpha < 0$



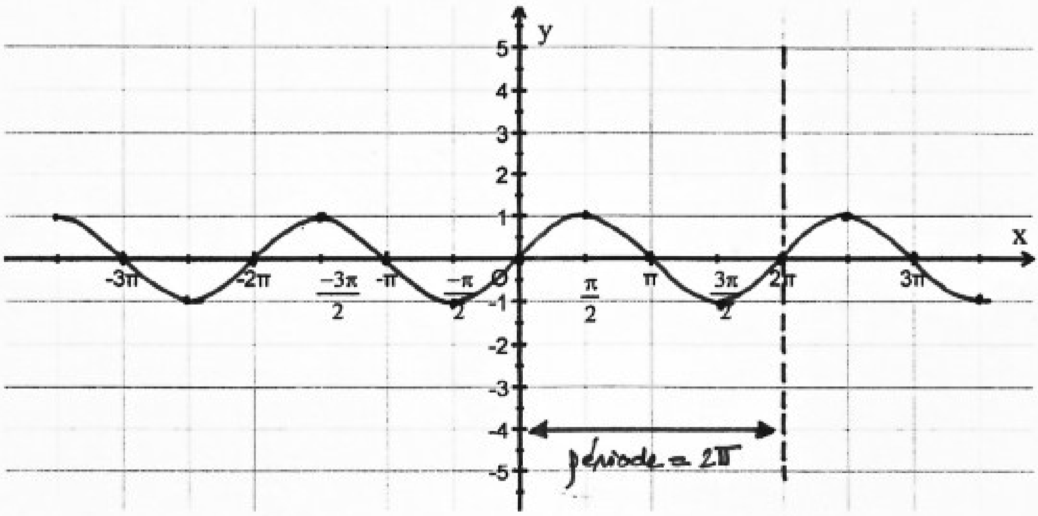
e) $\cos\alpha > 0$ et $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



f) $\cos\alpha = 0$ et $\sin\alpha < 0$



a) Dessiner la fonction $f(x)=\sin(x)$ et donner la période :



b)) Dessiner la fonction $f(x)=\cos(x)$ et donner la période