Lycée Denis-de-Rougemont
Degré 10

Mathématiques de niveau 1

GEOMETRIE PLANE

Corrigé du TE B

Exercice 1

a) La droite passant par A et B est parallèle à $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Elle est donc orthogonale (perpendiculaire) à $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Son équation cartésienne est donc : $3x - 5y + c = 0$.

Avec $A(-4;-4)$, on a $3\cdot(-4) - 5\cdot(-4) + c = 0 \Rightarrow -12 + 20 + c = 0 \Rightarrow 8 + c = 0$

$\Rightarrow c = -8$.

Son équation est ainsi $\underline{\underline{3x - 5y - 8 = 0.}}$

b) La médiatrice du segment AB est perpendiculaire à $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Son équation cartésienne est donc $5x + 3y + c = 0$.

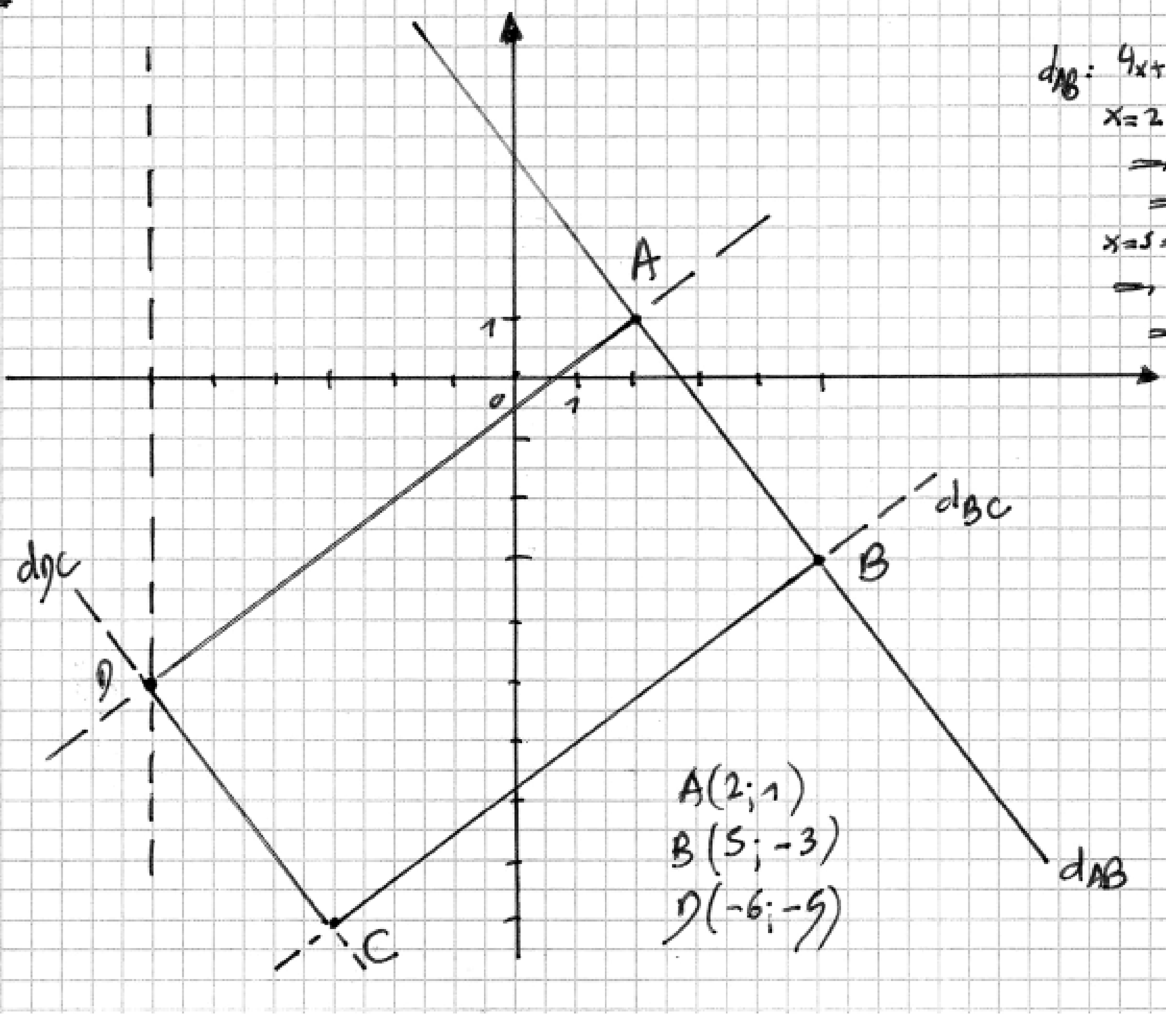
Elle passe par le milieu M de AB : $M = \left(\frac{-4+6}{2} ; \frac{-4+2}{2}\right) = (1;-1)$.

Avec $M(1;-1)$, on a : $5\cdot 1 + 3\cdot(-1) + c = 0 \Rightarrow 5 - 3 + c = 0 \Rightarrow 2 + c = 0 \Rightarrow c = -2$.

Son équation est ainsi : $\underline{\underline{5x + 3y - 2 = 0.}}$

Exercice 2

a)



d_{AB} : $4x + 3y - 11 = 0$

$x = 2 \Rightarrow 8 + 3y - 11 = 0$

$\Rightarrow 3y - 3 = 0$

$\Rightarrow y = 1$

$x = 5 \Rightarrow 20 + 3y - 11 = 0$

$\Rightarrow 3y + 9 = 0$

$\Rightarrow y = -3$

$A(2;1)$

$B(5;-3)$

$D(-6;-5)$

b) La droite d_{BC} est perpendiculaire à la droite d_{AB}.
Comme $d_{AB}: 4x+3y-11=0$, le vecteur $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ est orthogonal à d_{AB}.
Ainsi le vecteur $\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ est parallèle à d_{AB} et est donc orthogonal à d_{BC}.
L'équation cartésienne de d_{BC} est donc : $3x-4y+c=0$.
Avec $C(-3;-9)$, on a $3\cdot(-3)-4\cdot(-9)+c=0 \Rightarrow -9+36+c=0 \Rightarrow c=-27$.
Ainsi $d_{BC}: 3x-4y-27=0$.
B est l'intersection de d_{AB} et d_{BC} :

$$\left.\begin{array}{l} d_{AB}: 4x+3y-11=0 \xrightarrow{\cdot 4} 16x+12y-44=0 \\ d_{BC}: 3x-4y-27=0 \xrightarrow{\cdot 3} 9x-12y-81=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 25x-125=0 \Rightarrow x=5.$$

Avec $x=5$, on a $4\cdot5+3y-11=0 \Rightarrow 3y=11-20=-9 \Rightarrow y=-3$.
On a donc $\underline{\underline{B(5;-3)}}$.

La droite d_{DC} est parallèle à $d_{AB}: 4x+3y-11=0$.
On a ainsi : $d_{DC}: 4x+3y+c=0$.
Avec $C(-3;-9)$, on a : $4\cdot(-3)+3\cdot(-9)+c=0 \Rightarrow c=12+27=39$
Ainsi $d_{DC}: 4x+3y+39=0$
L'abscisse de D est $x=-6$.
Avec $x=-6$, on a $4\cdot(-6)+3y+39=0 \Rightarrow 3y=24-39=-15 \Rightarrow y=-5$
On a donc $\underline{\underline{D(-6;-5)}}$.
On a : $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6\\-5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3\\-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.
Ainsi $\underline{\underline{A(2;1)}}$.

<u>Exercice 3</u>

a) h passe par C et est perpendiculaire au segment AB et donc au vecteur $\overrightarrow{AB}$.
On a $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-8\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\9\end{pmatrix}\parallel\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.
L'équation cartésienne de h s'écrit donc $4x+3y+c=0$.
Avec $C(2;-9)$, on a : $4\cdot2+3\cdot(-9)+c=0 \Rightarrow c=27-8=19$.
On a donc h: $\underline{4x+3y+19=0}$.

b) D est l'intersection de h et de la droite passant par A et B (d_{AB}).
On sait que d_{AB} est parallèle à $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.
Un vecteur orthogonal à d_{AB} est donc $\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$.
L'équation cartésienne de d_{AB} est donc $3x-4y+c=0$.
Avec $A(-8;-4)$, on a $3\cdot(-8)-4\cdot(-4)+c=0 \Rightarrow c=24-16=8$.

L'équation de d_{AB} est ainsi : $3x-4y+8=0$.

On doit chercher l'intersection de :

$$\left.\begin{array}{l} h:\ 4x+3y+19=0 \xrightarrow{\cdot 4} 16x+12y+76=0 \\ d_{AB}:\ 3x-4y+8=0 \xrightarrow{\cdot 3} 9x-12y+24=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 25x+100=0 \Rightarrow x=-4.$$

Avec $x=-4$, on a $4\cdot(-4)+3y+19=0 \Rightarrow 3y=16-19=-3 \Rightarrow y=-1$.

Par conséquent, on a $\underline{\underline{D(-4;-1)}}$.

c) L'aire du triangle est donné par $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{CD}\|$.

On a : $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}12\\9\end{pmatrix}$ (voir a)) ;

$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{12^2+9^2}=\sqrt{144+81}=\sqrt{225}=15$;

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\8\end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{CD}\|=\sqrt{(-6)^2+8^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$.

Ainsi, l'aire du triangle est : $\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 10=\underline{\underline{75.}}$