Lycée Denis-de-Rougemont
Degré 10

Mathématiques de niveau 1

GEOMETRIE PLANE

Corrigé du test A

Exercice 1

a) La droite passant par A et B est parallèle à $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Elle est donc orthogonale (perpendiculaire) à $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Son équation cartésienne est donc : $x - 2y + c = 0$.

Avec $A(-5\,;-2)$, on a : $-5 - 2(-2) + c = 0 \Rightarrow -5 + 4 + c = 0 \Rightarrow -1 + c = 0 \Rightarrow c = 1$.

Son équation cartésienne est ainsi : $\underline{\underline{x - 2y + 1 = 0}}$.

b) La médiatrice du segment AB est perpendiculaire à $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Son équation cartésienne est donc : $2x + y + c = 0$.

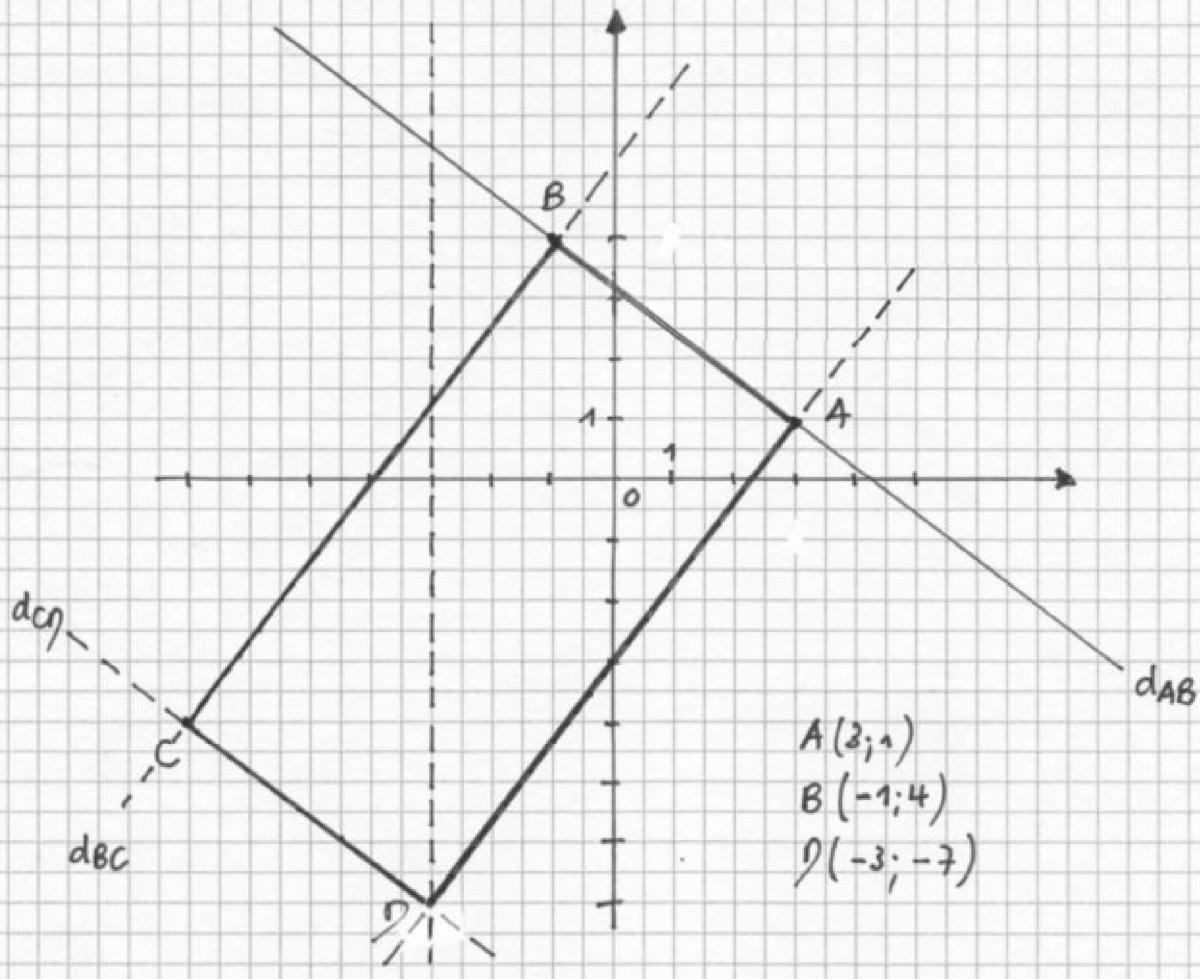
Elle passe par le milieu M de AB : $M = \left(\frac{-5+3}{2}\,;\frac{-2+2}{2}\right) = (-1\,;0)$.

Avec $M(-1\,;0)$, on a : $2\cdot(-1) + 0 + c = 0 \Rightarrow -2 + c = 0 \Rightarrow c = 2$.

Son équation cartésienne est ainsi : $\underline{\underline{2x + y + 2 = 0}}$.

Exercice 2

a)



b) La droite d_{BC} est perpendiculaire à la droite d_{AB}.
Comme $d_{AB}: 3x+4y-13=0$, le vecteur $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ est orthogonal à d_{AB}.
Ainsi le vecteur $\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ est parallèle à d_{AB} et est donc orthogonal à d_{BC}.
L'équation cartésienne de d_{BC} est donc: $4x-3y+c=0$.
Avec $C(-7;-4)$, on a: $4(-7)-3(-4)+c=0 \Rightarrow -28+12+c=0 \Rightarrow c=16$.
Ainsi $d_{BC}: 4x-3y+16=0$.
B est l'intersection de d_{AB} et d_{BC}:

$$\left.\begin{array}{l} d_{AB}: 3x+4y-13=0 \xrightarrow{\cdot 3} 9x+12y-39=0 \\ d_{BC}: 4x-3y+16=0 \xrightarrow{\cdot 4} 16x-12y+64=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 25x+25=0 \Rightarrow x=-1.$$

Avec $x=-1$, $4y=-3x+13=-3(-1)+13=3+13=16 \Rightarrow y=4$.
On a donc $\underline{\underline{B(-1;4)}}$.
La droite d_{CD} est parallèle à $d_{AB}: 3x+4y-13=0$.
On a ainsi: $d_{CD}: 3x+4y+c=0$.
Avec $C(-7;-4)$, on a: $3(-7)+4(-4)+c=0 \Rightarrow -21-16+c=0 \Rightarrow c=37$.
Ainsi $d_{CD}: 3x+4y+37=0$.
L'abscisse de D est $x=-3$.
Avec $x=-3$: $3(-3)+4y+37=0 \Rightarrow -9+4y+37=0 \Rightarrow 4y=-28 \Rightarrow y=-7$.
On a donc $\underline{\underline{D(-3;-7)}}$.

On a: $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\-7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-7\\-4\end{pmatrix}=$
$=\begin{pmatrix}-1-3+7\\4-7+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et, donc, $\underline{\underline{A(3;1)}}$.

<u>Exercice 3</u>

a) h passe par C et est perpendiculaire au segment AB et donc au vecteur $\overrightarrow{AB}$.
On a $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\12\end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.
L'équation cartésienne de h s'écrit donc $3x+4y+c=0$.
Avec $C(-6;1)$, on a: $3\cdot(-6)+4\cdot 1+c=0 \Rightarrow -18+4+c=0 \Rightarrow c=14$.
On a donc h: $\underline{\underline{3x+4y+14=0}}$.

b) I est l'intersection de h et de la droite passant par A et B (d_{AB}).
On sait que d_{AB} est parallèle à $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.
Un vecteur orthogonal à d_{AB} est donc $\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$.
L'équation cartésienne de d_{AB} est donc $4x-3y+C=0$.
Avec $A(-1;-9)$, on a $4\cdot(-1)-3(-9)+c=0 \Rightarrow -4+27+c=0 \Rightarrow c=-23$.

L'équation cartésienne de d_{AB} est ainsi : $d_{AB} : 4x-3y-23=0$.

On doit chercher l'intersection de :

$$\left.\begin{array}{ll} h: & 3x+4y+14=0 \xrightarrow{\cdot 3} 9x+12y+42=0 \\ d_{AB}: & 4x-3y-23=0 \xrightarrow{\cdot 4} 16x-12y-92=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 25x-50=0 \Rightarrow x=2.$$

Avec $x=2$, on a $4y=-3x-14=-3\cdot 2-14=-20 \Rightarrow y=-5$.

Par conséquent, on a : $\underline{\underline{D(2;-5)}}$

c) L'aire du triangle est donnée par $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{CD}\|$.

On a : $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}9\\12\end{pmatrix}$ (voir ci-dessus) ;

$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{9^2+12^2}=\sqrt{81+144}=\sqrt{225}=15$;

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-6\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-6\end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{CD}\|=\sqrt{8^2+(-6)^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$.

Ainsi, l'aire du triangle est : $\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 10=\underline{\underline{75}}$.