GEOMETRIE PLANE

Corrigé du test B

Exercice 1

Les bissectrices de a et b sont l'ensemble des points $P(x;y)$ tels que $d(P;a) = d(P;b)$.

$$d(P;a) = \frac{|3x+4y-3|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|3x+4y-3|}{5}.$$

$$d(P;b) = \frac{|8x-15y+2|}{\sqrt{8^2+(-15)^2}} = \frac{|8x-15y+2|}{17}.$$

$$d(P;a) = d(P;b) \Longrightarrow \frac{|3x+4y-3|}{5} = \frac{|8x-15y+2|}{17}.$$

① $\frac{3x+4y-3}{5} = \frac{8x-15y+2}{17} \Longrightarrow 51x+68y-51 = 40x-75y+10$

$\Longrightarrow 11x+143y-61 = 0.$

② $\frac{3x+4y-3}{5} = -\frac{8x-15y+2}{17} \Longrightarrow 51x+68y-51 = -40x+75y-10$

$\Longrightarrow 91x-7y-41 = 0.$

Les bissectrices sont donc: $\underline{\underline{11x+143y-61=0 \text{ et } 91x-7y-41=0.}}$

Exercice 2

a) Le cercle est centré en M, milieu de AB, et son rayon est $\|\overrightarrow{AM}\|$.

On a: $M = \left(\frac{-2+8}{2} ; \frac{1+7}{2}\right) = (3;4)$;

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{AM}\| = \sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}.$

L'équation du cercle est donc: $(x-3)^2+(y-4)^2 = (\sqrt{34})^2$, i.e.

$\underline{\underline{(x-3)^2+(y-4)^2-34=0.}}$

b) La tangente au cercle en A passe par A et est perpendiculaire à $\overrightarrow{AM}$.

On a $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ (voir ci-dessus).

L'équation de la tangente s'écrit donc: $5x+3y+c=0$.

Avec $A(-2;1)$, on a: $5\cdot(-2)+3\cdot 1+c=0 \Longrightarrow -10+3+c=0 \Longrightarrow c=7.$

L'équation de la tangente est donc: $\underline{\underline{5x+3y+7=0.}}$

Exercice 3

a) On a : $d(A;d) = \dfrac{|3.(-3)+4.3-8|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \dfrac{|-9+12-8|}{5} = \dfrac{|-5|}{5} = \dfrac{5}{5} = 1$;

$d(B;d) = \dfrac{|3.3+4.7-8|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \dfrac{|9+28-8|}{5} = \dfrac{29}{5} > 1$.

C'est donc A qui est le plus proche de d.

b) Le centre du cercle est sur la droite d, mais aussi sur la médiatrice m du segment AB.

On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

L'équation de m s'écrit donc : $3x + 2y + c = 0$.

m passe par M le milieu du segment AB.

On a $M = \left(\frac{-3+3}{2} ; \frac{3+7}{2}\right) = (0 ; 5)$.

Avec $M(0;5)$, on a : $3.0 + 2.5 + c = 0 \Longrightarrow 10 + c = 0 \Longrightarrow c = -10$.

Ainsi l'équation de m est : $3x + 2y - 10 = 0$.

Le centre du cercle est l'intersection de d et m :

$\left.\begin{array}{l} d:\ 3x+4y-8=0 \\ m:\ 3x+2y-10=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{-} 2y + 2 = 0 \Longrightarrow y = -1$.

Avec $y = -1$, $3x = 8 - 4y = 8 - 4(-1) = 8 + 4 = 12 \Longrightarrow x = 4$.

Le centre du cercle est donc $K(4 ; -1)$.

Le rayon du cercle est $r = \|\overrightarrow{KA}\| = \|\overrightarrow{KB}\|$.

On a : $\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OK} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{KA}\| = \sqrt{(-7)^2 + 4^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65}$;

$\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OK} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{KB}\| = \sqrt{(-1)^2 + 8^2} = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}$.

Le rayon est donc $r = \sqrt{65}$.

L'équation du cercle est donc $(x-4)^2 + (y+1)^2 = (\sqrt{65})^2$, i.e.

$(x-4)^2 + (y+1)^2 - 65 = 0$.