GEOMETRIE PLANE

Corrigé du test A

Exercice 1

On a le cercle $c: x^2-6x+y^2+4y-12=0$

a) Comme $x^2-6x+9=(x-3)^2$, on a $x^2-6x=(x-3)^2-9$.

Comme $y^2+4y+4=(y+2)^2$, on a $y^2+4y=(y+2)^2-4$.

L'équation de c s'écrit donc $(x-3)^2-9+(y+2)^2-4-12=0 \Rightarrow (x-3)^2+(y+2)^2=25=5^2$.

Le centre du cercle est donc $M(3;-2)$ et son rayon vaut 5.

b) L'axe des ordonnées est la droite $x=0$.

Avec $x=0$ dans l'équation de c, on trouve $(y+2)^2=5^2 \Rightarrow y+2=\pm 5 \Rightarrow y=-7$ et $y=3$.

Les coordonnées de c avec l'axe des ordonnées sont donc $(0;-7)$ et $(0;3)$.

c) Avec $x-y-4=0$, on a $x=y+4$.

Par substitution dans l'équation de c, on a :

$(y+4-3)^2+(y+2)^2=25 \Rightarrow (y+1)^2+(y+2)^2=25 \Rightarrow y^2+2y+1+y^2+4y+4-25=0$

$\Rightarrow 2y^2+6y-20=0 \Rightarrow y^2+3y-10=0$

$$\Rightarrow y=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{2}=\frac{-3\pm 7}{2}=\begin{cases}2\\-5\end{cases}$$

Avec $y=2$, on a $x=y+4=2+4=6$.

Avec $y=-5$, on a $x=y+4=-5+4=-1$.

Les coordonnées des points d'intersection de c avec la droite $x-y-4=0$ sont donc

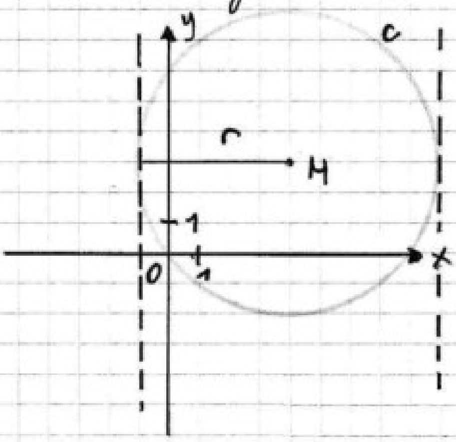
$(6;2)$ et $(-1;-5)$.

Exercice 2

On a le cercle c : $(x-4)^2+(y-3)^2=25=5^2$.

Son centre est donc $M(4;3)$ et son rayon est $r=5$.

Géométriquement, on a :



a) L'axe des ordonnées a pour équation $x=0$.
Les tangentes au cercle c parallèles à la droite $x=0$ seront de la forme $x=c$.
Puisque le centre du cercle est $M(4;3)$ et son rayon $r=5$, les tangentes seront
$x=4-5=1$ et $x=4+5=9$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{x=1 \text{ et } x=9}}$.

b) Les points d'abscisse 1 sont les points $A(1;y)$. En posant $x=1$ dans l'équation de c, on obtient $(1-4)^2+(y-3)^2=25 \Rightarrow 3^2+(y-3)^2=25 \Rightarrow (y-3)^2=16$
$\Rightarrow y-3=\pm 4 \Rightarrow y=7$ et $y=-1$.
Les points d'abscisse 1 du cercle sont donc $\underline{\underline{A(1;7) \text{ et } B(1;-1)}}$.

c) En A : la tangente est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{MA}$; on a $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}=$
$=\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$; ainsi l'équation de la tangente est $-3x+4y+c=0$;
avec $A(1;7)$, on obtient, par substitution, $-3\cdot1+4\cdot7+c=0 \Rightarrow 25+c=0$
$\Rightarrow c=-25$; l'équation de la tangente au cercle en A est donc $\underline{\underline{-3x+4y-25=0}}$
ou $\underline{\underline{3x-4y+25=0}}$.

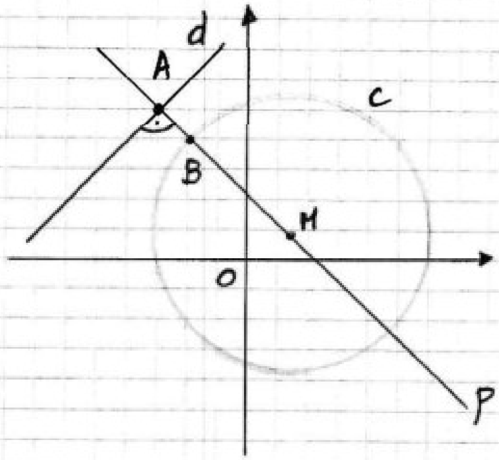
En B : la tangente est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{MB}$; on a $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}=$
$=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$; ainsi l'équation de la tangente est
$3x+4y+c=0$; avec $B(1;-1)$, on obtient, par substitution, $3\cdot1+4\cdot(-1)+c=0$
$\Rightarrow 3-4+c=0 \Rightarrow c=1$; l'équation de la tangente au cercle en B est donc
$\underline{\underline{3x+4y+1=0}}$.

Exercice 3

On a la droite d: $3x-4y+68=0$ et le cercle c: $(x-5)^2+(y-2)^2=169=13^2$.
Le centre du cercle est $M(5;2)$ et son rayon est $r=13$.

a) Calculons la distance du centre du cercle à la droite d.
On a $\text{dist}(M;d)=\dfrac{|3\cdot5-4\cdot2+68|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{|15-8+68|}{\sqrt{9+16}}=\dfrac{75}{\sqrt{25}}=\dfrac{75}{5}=15.$
Comme $\text{dist}(M;d)=15>r=13$, on en déduit que la droite ne coupe pas le cercle ni n'est tangente à celui-ci.

b) On a la situation suivante (schématique):



Le point A de la droite qui est le plus proche du cercle sera l'intersection de d avec la droite p perpendiculaire à d et passant par M, centre du cercle.
De l'équation de d: $3x-4y+68=0$, on déduit que $\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ est perpendiculaire à d. Ainsi le vecteur $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ est parallèle à d. Ce dernier est donc perpendiculaire à p.
L'équation de p s'écrit ainsi $4x+3y+c=0$.
Comme p passe par $M(5;2)$, par substitution, on trouve $4\cdot5+3\cdot2+c=0$
$\Rightarrow 26+c=0 \Rightarrow c=-26$.
L'équation de p est donc $4x+3y-26=0$.
A est l'intersection de d et p. On doit donc résoudre le système $\begin{cases}3x-4y+68=0\\4x+3y-26=0.\end{cases}$

$$3x-4y+68=0 \xrightarrow{\cdot3} 9x-12y+204=0$$
$$4x+3y-26=0 \xrightarrow{\cdot4} 16x+12y-104=0 \quad +$$
$$25x+100=0 \Rightarrow 25x=-100 \Rightarrow x=-4.$$

Avec $x=-4$ dans $3x-4y+68=0$, on obtient $-12-4y+68=0 \Rightarrow 4y=56 \Rightarrow y=14$.
Ainsi les coordonnées du point A de la droite le plus proche de c sont $(-4;14)$

c) La plus courte distance entre le cercle et le point A est $\|\overrightarrow{AB}\|$ où B est l'intersection de p avec le cercle c. Or, on a $\|\overrightarrow{AB}\|=\|\overrightarrow{AM}\|-\|\overrightarrow{BM}\|$.
$\|\overrightarrow{AM}\|=\|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}\|=\left\|\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4\\14\end{pmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}9\\-12\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{9^2+(-12)^2}=\sqrt{81+144}=\sqrt{225}=15.$
De plus $\|\overrightarrow{BM}\|=r=13$. Ainsi $\|\overrightarrow{AB}\|=15-13=2$.
Ainsi, la plus courte distance entre le cercle et le point A vaut 2.