Géométrie plane

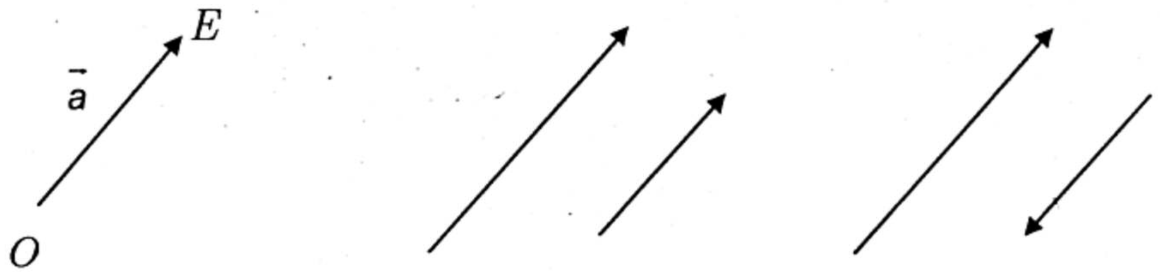
TABLE DES MATIERES

4.1 Les vecteurs

Des quantités telles que le volume, la température ou le temps sont des grandeurs entièrement caractérisées par un simple nombre (auquel on ajoute une unité). On appelle ce type de quantités des grandeurs scalaires.
D'autres quantités telles que les forces ou les vitesses possèdent, en plus de leur valeur $\vec{a}$ $\vec{a}$ quantitative, une direction et un sens. De telles grandeurs sont représentées par des ***vecteurs***. On appelle ce type de quantités des grandeurs vectorielles. Plus $\vec{a}$ rigoureusement :

<u>Définitions</u>

1) Une ***flèche*** possède une origine et une extrémité. Elle est déterminée par sa **longueur**, son **sens** et sa **direction**.



même direction même sens

même direction sens opposé

2) L'ensemble de toutes les flèches ayant la ***même direction***, le ***même sens*** et la ***même longueur*** qu'une flèche donnée est un ***vecteur***. Chacune de ces flèches est un représentant le ***même*** vecteur. $\vec{a}$

3) On appelle V_2 l'ensemble des vecteurs du plan

Un vecteur est entièrement défini par ***sa longueur***, ***sa direction*** et ***son sens***

Notations

Le vecteur liant le point A au point B se note $\overrightarrow{AB}$.

On peut aussi le nommer à l'aide d'une unique lettre minuscule : $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

L'ensemble des vecteurs du plan (= à deux dimensions) se note V_2 et est aussi appelé ***espace vectoriel de dimension 2***.

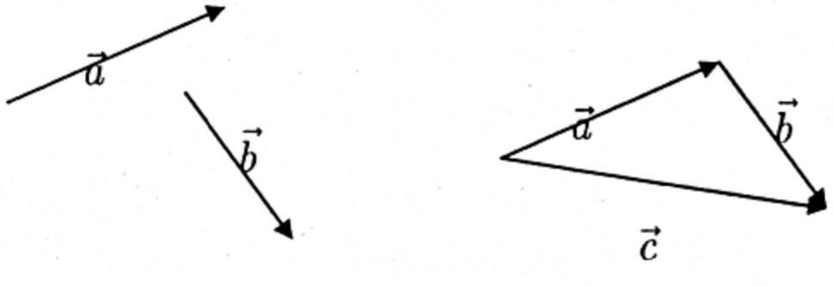
Terminologie

La longueur d'un vecteur $\vec{v}$ se note $\left\| \vec{v} \right\|$ et s'appelle la ***norme*** du vecteur.

4.1.1 L'ADDITION VECTORIELLE

Deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ peuvent être additionnés. Appelons $\vec{c}$ le *vecteur somme* de $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Il se note $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ et se construit en mettant $\vec{a}$ et $\vec{b}$ « bout à bout ».

Exemple



4.1.2 L'OPPOSE D'UN VECTEUR

Le vecteur $-\vec{b}$ s'appelle l'opposé de $\vec{b}$: il ne change que de sens par rapport à $\vec{b}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés.

Exemple

4.1.3 LA SOUSTRACTION VECTORIELLE

Un vecteur $\vec{b}$ peut être soustrait d'un vecteur $\vec{a}$. Appelons $\vec{c}$ le ***vecteur différence*** de $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Il se note $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$. Pour le construire, il faut additionner $-\vec{b}$ (l'opposé de $\vec{b}$) au vecteur $\vec{a}$. En effet : $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Exemple

4.1.4 LE VECTEUR NUL

Le vecteur $\overrightarrow{AA}$, comme le vecteur $\vec{h} - \vec{h}$ sont des vecteurs de norme 0 : un point !

Ce vecteur s'appelle le vecteur nul et il se note $\vec{0}$.

4.1.5 LA MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN NOMBRE REEL (SCALAIRE)

Soient $\vec{a}$ un vecteur de V_2 et $\alpha \in \mathbb{R}$. On peut construire le vecteur $\alpha \cdot \vec{a}$.

Ce vecteur $\alpha \vec{a}$ a la direction de $\vec{a}$.

$$\text{Son sens} \begin{cases} \text{est celui de } \vec{a} & \text{si } \alpha > 0 \\ \text{est l'opposé de celui de } \vec{a} & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}.$$

La norme du vecteur $\alpha \vec{a}$ vaut $|\alpha|$ fois celle de $\vec{a}$.

Mathématiquement on écrit : $\|\alpha \cdot \vec{a}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{a}\|$

4.1.6 Multiplication par un nombre entier

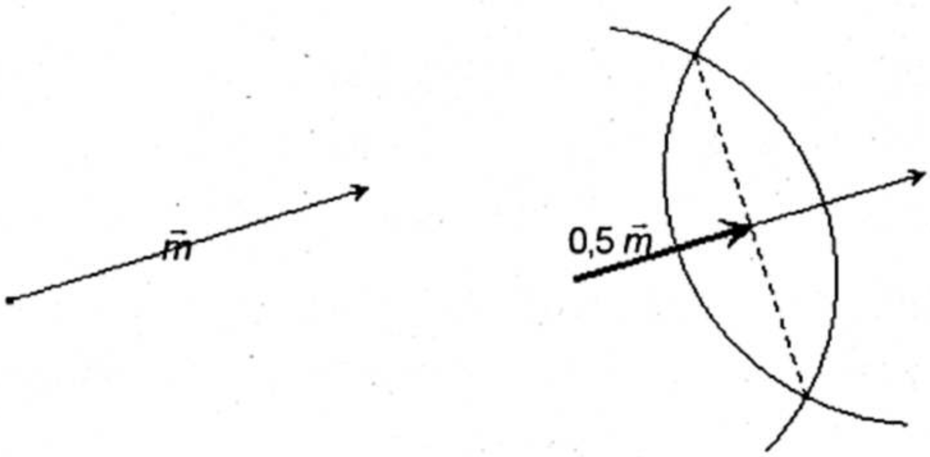
La construction se fait uniquement au compas.

Exemple Construire $-3\,\vec{m}$

4.1.7 Multiplication par 0,5

La construction de la médiatrice au compas permet de construire $0{,}5\,\vec{m}$

Exemple Construire $0{,}5\,\vec{m}$

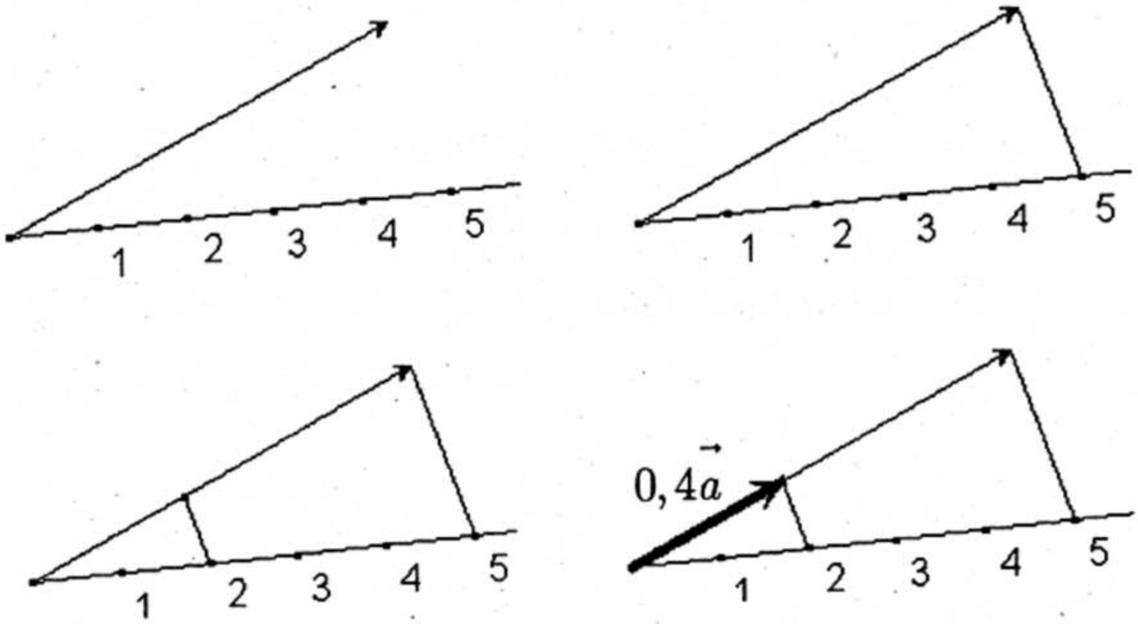


4.1.8 Multiplication par un nombre rationnel

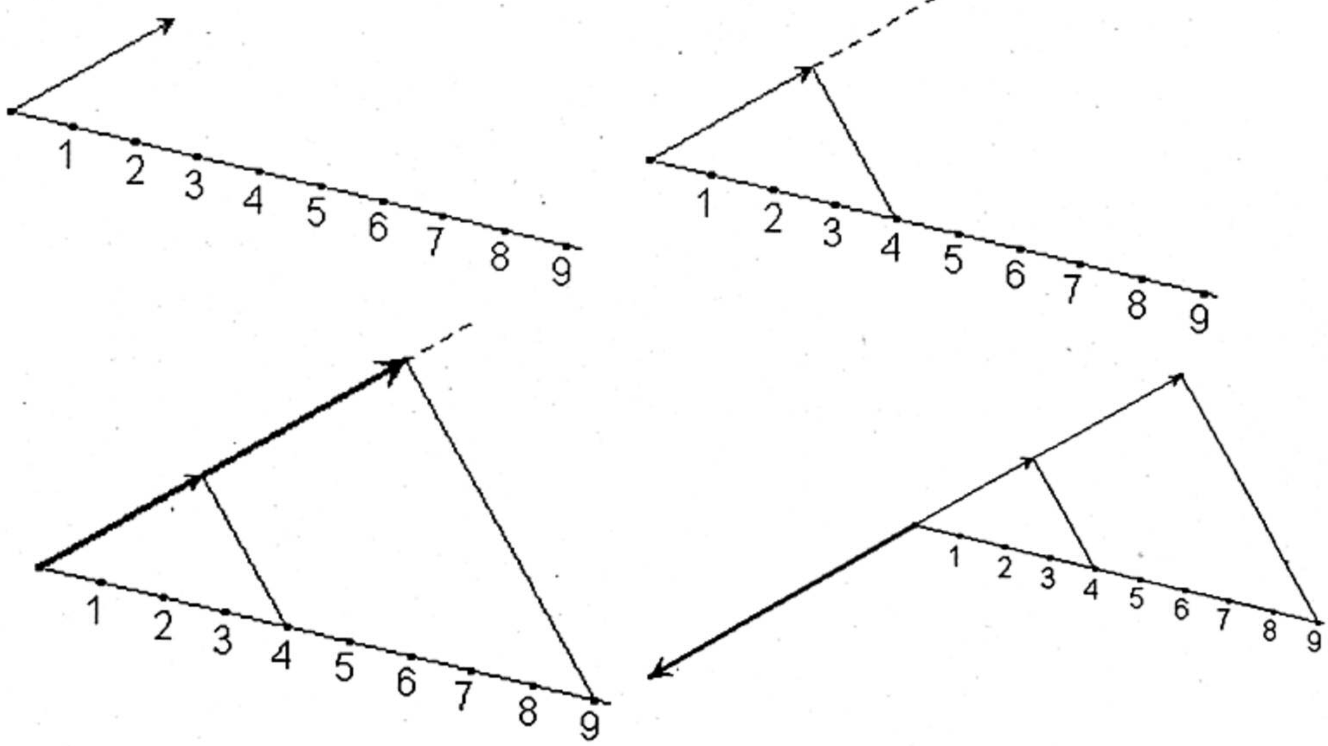
Ecrire α sous forme de fraction irréductible puis travailler avec des triangles semblables comme dans les exemples ci-dessous :

Exemples

1) Construire $0{,}4\,\vec{a}$. Ici $\alpha = 0{,}4 = \dfrac{2}{5}$. Voici la construction :



2) Construire . Ici $\alpha = -2{,}25 = -\dfrac{9}{4}$. Voïci la construction :

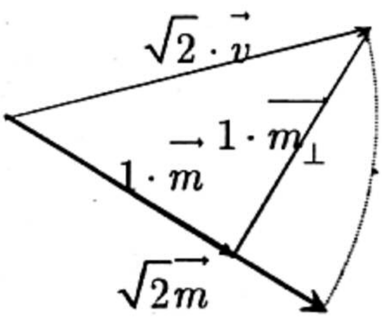


4.1.9 MULTIPLICATION PAR UN NOMBRE IRRATIONNEL

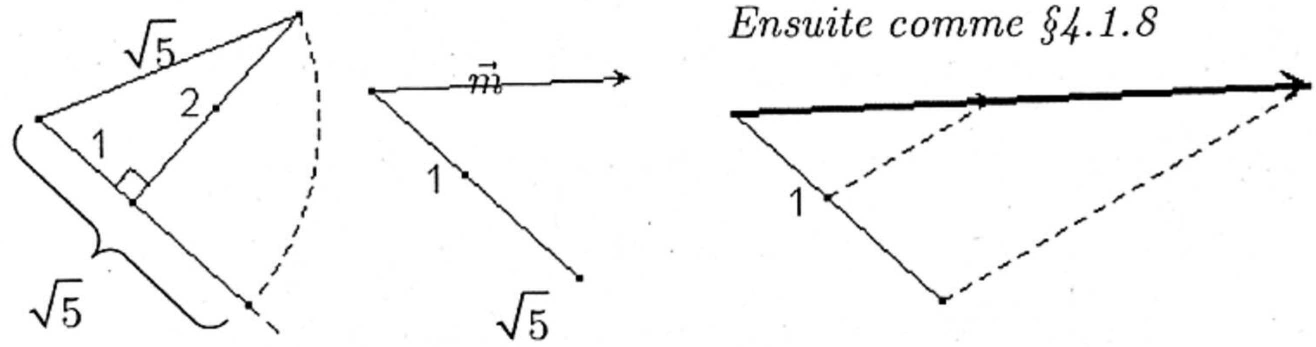
Constructions basées sur des triangles rectangles et le théorème de Pythagore.

Exemples

1) Construire $\sqrt{2}\vec{m}$. Comme $2 = 1 + 1 = 1^2 + 1^2$, 2 est l'hypoténuse du triangle rectangle de côtés 1 et 1. Voici une construction possible :



2) Construire $\sqrt{5}\,\vec{m}$. Comme $5 = 4 + 1 = 2^2 + 1^2$, 5 est l'hypoténuse du triangle rectangle de côtés 1 et 2.Voici une construction possible :



Ces méthodes peuvent se combiner pour des valeurs de α plus compliquées.

4.2 Base de V2

4.2.1 LES COMBINAISONS LINEAIRES DE VECTEURS

Une somme de multiples de vecteurs est nommée ***combinaison linéaire*** des vecteurs. Ainsi le vecteur $\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Exemple

$\vec{d} = \dfrac{2}{3}\vec{a} - 4\vec{b} + 0{,}7\vec{c}$ est une combinaison linéaire de $\vec{a}$,$\vec{b}$ et $\vec{c}$.

4.2.2 L'INDEPENDANCE LINEAIRE

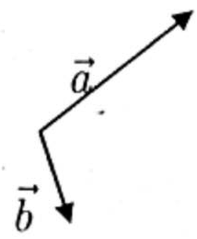
Deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont ***linéairement indépendants*** s'ils ne sont pas multiples l'un de l'autre. Autrement dit s'ils ne sont pas parallèles.

Deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont ***linéairement dépendants***, ou ***liés*** s'ils ont la même direction (ils sont parallèles). Plus de deux vecteurs du plan sont toujours liés.

Mathématiquement, $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ***linéairement dépendants*** $\Leftrightarrow$ il existe $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$ tels que $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$ (une combinaison linéaire non nulle de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ donne le vecteur nul $\vec{0}$) ou encore $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ (les deux vecteurs sont multiples l'un de l'autre).

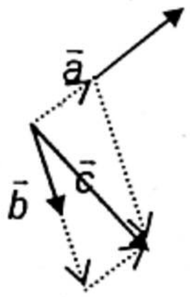
4.2.3 <u>LA BASE</u>

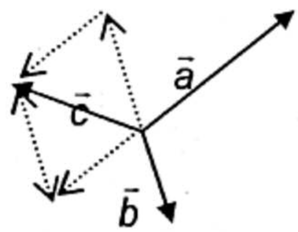
On appelle ***base*** toute paire de vecteurs ***linéairement indépendants***. On la note par exemple $\left\{ \vec{a}\,;\vec{b} \right\}$.



Décomposer le vecteur $\vec{c}$ dans la base $\left\{ \vec{a}\,;\vec{b} \right\}$ signifie l'exprimer comme une combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

<u>Exemples</u> Décomposer $\vec{c}$ dans la base $\left\{ \vec{a}\,;\vec{b} \right\}$





4.2.4 <u>LES COMPOSANTES D'UN VECTEUR</u>

Si on a $\vec{c} = 5\vec{a} - 7{,}2\vec{b}$, alors on nomme ***composantes*** du vecteur $\vec{c}$ dans la base $\left\{ \vec{a}\,;\vec{b} \right\}$ les nombres 5 et $-7{,}2$. On écrit alors le vecteur ainsi : $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7{,}2 \end{pmatrix}$.

En particulier les vecteurs de base s'écrivent : $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

<u>Remarque</u>

On utilise normalement la notation $\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\vec{c}$ devient $\vec{c} = 5\overrightarrow{e_1} - 7{,}2\overrightarrow{e_2}$. La base sera souvent nommée $\left\{ \overrightarrow{e_1}\,;\overrightarrow{e_2} \right\}$.

4.2.5 LES CALCULS VECTORIELS

Numériquement les opérations vectorielles s'effectuent composantes à composantes.

Exemples

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4,5 \end{pmatrix}$ alors

$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1,5 \end{pmatrix}$ et $-1{,}2\vec{a} = \begin{pmatrix} -2{,}4 \\ 3{,}6 \end{pmatrix}$

Définition

Deux vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ sont ***linéairement dépendants*** (on dit aussi que les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont ***liés***) s'il existe un nombre λ tel que $\vec{a} = \lambda\vec{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \lambda \cdot b_1 \\ a_2 = \lambda \cdot b_2 \end{cases}$.

Décomposer un vecteur, disons $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, dans une base $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ revient à résoudre un système 2x2. En effet, on cherche λ et μ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ de telle sorte que $\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. En composantes, on obtient le système $\begin{cases} c_1 = \lambda a_1 + \mu b_1 \\ c_2 = \lambda a_2 + \mu b_2 \end{cases}$ dont les inconnues sont λ et μ et qui possède ***une unique solution*** car $\left\{ \vec{a} \,; \vec{b} \right\}$ est une base.

Exemple

Décomposer le vecteur $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans la base $\left\{ \vec{a} ; \vec{b} \right\}$ avec $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

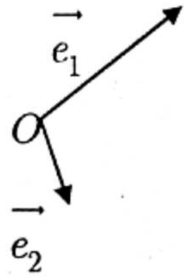
$$\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 = \lambda \\ 2 = \lambda + \mu \end{cases} \Rightarrow \lambda = -1 \text{ et } \mu = 3$$

Finalement $\vec{c} = -\vec{a} + 3\vec{b}$

4.3 Repere du plan

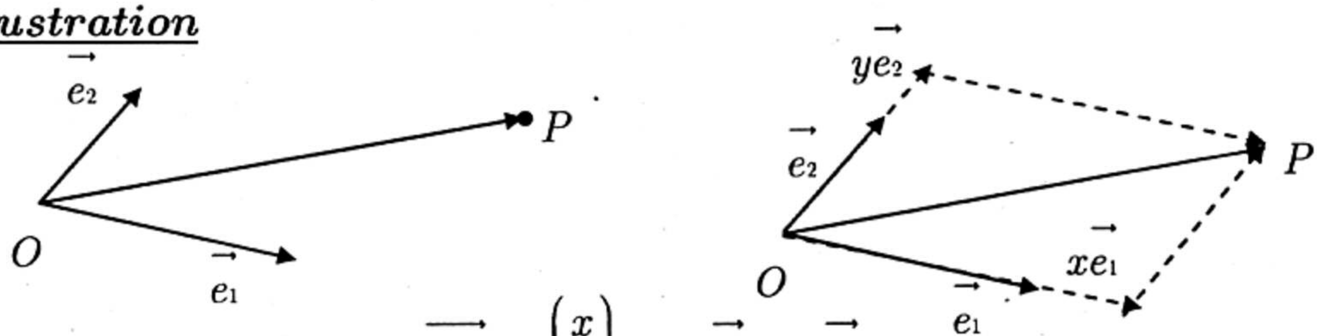
Un repère du plan est défini par une base $\left\{ \vec{e_1} ; \vec{e_2} \right\}$ ainsi qu'un point O du plan choisi arbitrairement et appelé origine. Un repère se note $\left\{ O ; \vec{e_1} ; \vec{e_2} \right\}$ et nous permet de localiser tout point du plan à partir de l'origine O.



4.3.1 Le rapport entre les points et les vecteurs

Si l'on choisit une ***origine*** $O(0 ; 0)$ et une ***base*** $\left\{ \vec{e_1} ; \vec{e_2} \right\}$, alors il est possible de donner un point P par ses ***coordonnées*** $(x ; y)$. On le note alors $P(x ; y)$. Le vecteur $\overrightarrow{OP}$ a les composantes $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$.

Illustration



$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Coordonnées}}}{P(x ; y)} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OP} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Composantes}}}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$$

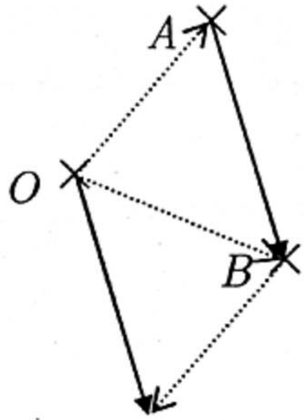
Remarque

Nous utiliserons volontiers des repères orthonormés, c'est-à-dire composés de vecteurs de base perpendiculaires et de même norme 1 (définie comme mesurant 1).

Nous y reviendrons plus loin.

4.3.2 La relation de Chasles (1793-1880)

Connaissant les points $A(a_1\,;a_2)$ et $B(b_1\,;b_2)$, comment calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$?



Idée

« Passer » par l'origine…

Relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

Exemples

Soient $A(6;-2)$, $B(-1;5)$, $C(0,5;-4)$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2,5 \end{pmatrix}$.

Calculer $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ et trouver les coordonnées de D et E.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -9 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D(13;-1)$$

$$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OE} \Rightarrow \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} -1-4 \\ 5-(-2{,}5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7{,}5 \end{pmatrix}$$

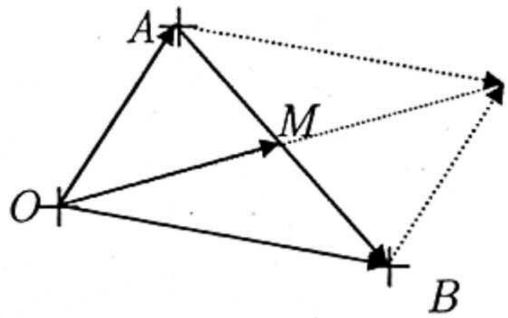
$$\Rightarrow E(-5;7{,}5)$$

4.3.3 M LE POINT MILIEU DU SEGMENT AB

Les coordonnées du milieu M du segment AB s'obtient par :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$$

Démonstration par dessin



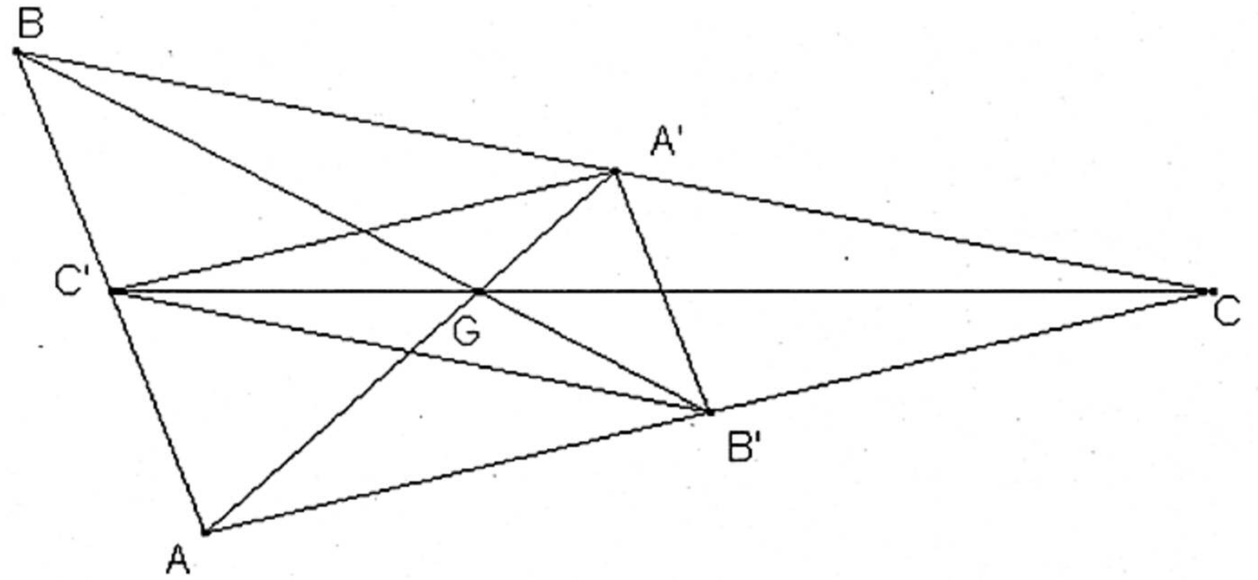
Démonstration par calcul

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \end{aligned}$$

4.3.4 LE CENTRE DE GRAVITE G D'UN TRIANGLE

Pour mémoire, le centre de gravité d'un objet est son centre de masse. Sa connaissance est utile en physique pour les questions d'équilibre. Le CG d'un triangle est l'intersection de ses médianes.

Construisons G le centre de gravité du triangle ABC suivant, après avoir nommé A', B' et C' les milieux des segments BC, AC et AB, respectivement.



Les triangles $A'B'C'$ et ABC sont semblables. On passe de l'un à l'autre par une homothétie de centre G et de rapport -0,5.

Ceci se note : $ABC \xrightarrow[H(\ G\ ;\ -0{,}5\ \ )]{} A'B'C'$.

On peut donc écrire que :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG} \\
&= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA}\right) \\
&= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OA'} - \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} \\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OA'} \\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)
\end{aligned}$$

Finalement, le centre de gravité du triangle

$A(a_1;a_2)$, $B(b_1;b_2)$ et $C(c_1;c_2)$ est donné par :

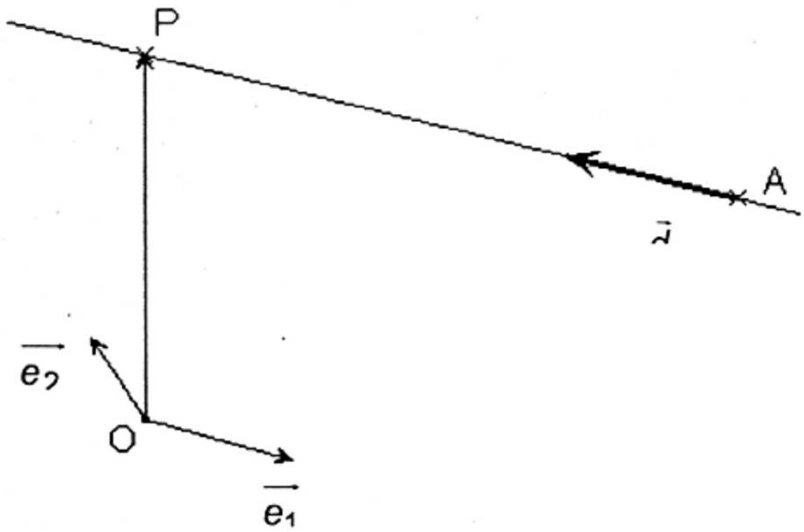
$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) \qquad G\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3} \ ; \ \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$$

4.4 La droite

4.4.1 *Representation parametrique de la droite*

Une droite d peut être donnée par deux points A et B ou par un point A et un vecteur $\vec{d}$, qui a la direction de la droite. On l'appelle ***vecteur directeur***.

Comme $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$ est aussi un vecteur directeur de la droite, les deux données sont similaires.



Soit P un point quelconque de la droite d. Alors $\overrightarrow{AP}$ et $\vec{d}$ sont parallèles. Vectoriellement, cela signifie qu'il existe un nombre λ (appelé *paramètre*) tel que :

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{d}}$$

Si $P(x;y), A(a_1;a_2)$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$, alors on obtient :

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}}$$

La droite d est alors définie par ses ***équations paramétriques*** :

$$\boxed{d : \begin{cases} x = a_1 + \lambda \cdot d_1 \\ y = a_2 + \lambda \cdot d_2 \end{cases}}$$

<u>Exemples</u>

La droite d est donnée par les points $A(3;4)$ et $B(-1;2)$.

- Ecrire les équations paramétriques de d.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{vecteur directeur}$$

$$d : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \end{cases} \text{ par exemple.}$$

- Les points $C(7;6)$ et $D(-4;1)$ sont-il sur d ?

$$C \in d \; ? \begin{cases} 7 = 3 + 2\lambda \to \lambda = 2 \\ 6 = 4 + \lambda \to \lambda = 2 \end{cases} \text{ mêmes valeurs de } \lambda \quad \to C \in d$$

$$D \in d \; ? \begin{cases} -4 = 3 + 2\lambda \to \lambda = \dfrac{-7}{2} \\ 1 = 4 + \lambda \to \lambda = -3 \end{cases} \lambda \text{ pas identique} \quad \to D \notin d$$

- Trouver la composante inconnue de $E(4{,}5;\ ?\ )$ et $F(\ ?\ ;-2{,}8)$, deux points de d.

$$\left.\begin{array}{ll} E(4{,}5;y) \in d & \Rightarrow 4{,}5 = 3 + 2\lambda \Rightarrow \lambda = 0{,}75 \\ & \Rightarrow y = 4 + \lambda = 4 + 0{,}75 = 4{,}75 \end{array}\right\} E(4{,}5;4{,}75)$$

$$\left.\begin{array}{ll} F(x;-2{,}8) \in d & \Rightarrow -2{,}8 = 4 + \lambda \\ & \Rightarrow \lambda = -6{,}8 \\ & \Rightarrow x = 3 + 2\lambda = -10{,}6 \end{array}\right\} F(-10{,}6;-2{,}8)$$

4.4.2 <u>REPRESENTATION CARTESIENNE DE LA DROITE</u>

Les équations paramétriques de la droite forment un système 2x2 que l'on peut « résoudre » en éliminant le paramètre λ.

L'équation obtenue « en mettant tout du même côté » s'appelle ***équation cartésienne*** de la droite.

<u>Exemple (suite)</u>

$$d : \left\{\begin{array}{r|l} x = 3 + 2\lambda & \\ y = 4 + \lambda & \cdot(-2) \\ \hline x = 3 + 2\lambda & \\ -2y = -8 - 2\lambda & + \\ \hline x - 2y = -5 & \Rightarrow \end{array}\right. \qquad \boxed{d : x - 2y + 5 = 0}$$

En isolant y dans l'équation cartésienne, nous retrouvons l'équation habituelle de la droite avec son **décalage** et sa **pente** :

$x-2y+5=0 \rightarrow y=\dfrac{x+5}{2}=0,5x+2,5$. Droite de pente $0,5$ et de décalage $2,5$.

<u>Cas général</u>

Equation cartésienne de la droite d donnée par $A(a_1;a_2)$ et $\vec{d}=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{r|l}
x=a_1+\lambda\cdot d_1 & \cdot d_2 \\
y=a_2+\lambda\cdot d_2 & \cdot(-d_1) \\
\hline
d_2x=a_1d_2+\lambda d_1d_2 & \\
-d_1y=-a_2d_1-\lambda d_1d_2 & + \\
\hline
d_2x-d_1y=a_1d_2-a_2d_1 & +\ldots \\
d_2x-d_1y+(a_2d_1-a_1d_2)=0 &
\end{array}$$

L'équation cartésienne d'une droite parallèle à $\vec{d}=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ est $d_2x-d_1y+k=0$.

La valeur de k est obtenue grâce aux coordonnées d'un point.

Remarque importante : Pour passer d'un vecteur directeur $\vec{d}=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ de ***l'équation paramétrique*** de la droite d au vecteur $\vec{e}=\begin{pmatrix} d_2 \\ -d_1 \end{pmatrix}$ que l'on trouve devant le x et le y de ***l'équation cartésienne*** de la droite d, il suffit de ***Permuter, Changer Un Signe « PCUS »*** du vecteur $\vec{d}$. On verra dans la suite du cours que le vecteur $\vec{e}$ est un ***vecteur perpendiculaire*** de la droite d.

Exemples

a) Considérons la droite $d:\begin{cases}x=3+2\lambda\\ y=4+\lambda\end{cases}$. Trouver l'équation cartésienne de la droite d.

- ***Méthode 1***, on peut éliminer les λ. On obtient ainsi :

$$\begin{array}{r|l} x=3+2\lambda & \\ y=4+\lambda & \cdot(-2) \\ \hline x=3+2\lambda & \\ -2y=-8-2\lambda & \quad\oplus \\ \hline \end{array}$$
$$x-2y=-5 \quad\Rightarrow\quad \boxed{d: x-2y+5=0}$$

- ***Méthode 2***, $\vec{d}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \,//\, d \quad\overset{PCUS}{\Leftrightarrow}\quad \vec{e}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\perp d$

  Donc, on peut écrire $d:-1x+2y+k=0$. Comme $A(3;4)\in d$, on a $d:-3+2\cdot 4+k=0 \Rightarrow k=-5$ et $\boxed{d:-x+2y-5=0}$

- ***Méthode 3*** $\vec{d}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \,//\, d \quad\overset{PCUS}{\Leftrightarrow}\quad \vec{e}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\perp d$

  Donc, on peut écrire $d:1x-2y+k=0$. Comme $A(3;4)\in d$, on a $d:3-2\cdot 4+k=0 \Rightarrow k=+5$ et $\boxed{d:x-2y+5=0}$

b) Considérons maintenant la droite $d:x-2y+5=0$. Trouver une équation cartésienne de la droite d.

Etape 1 : $\vec{e}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\perp d \quad\overset{PCUS}{\Leftrightarrow}\quad \vec{d}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}//d$

Etape 2 : Si $y=0$, alors

$d:x-2\cdot 0+5=0 \quad\Rightarrow x=-5$.

Donc le point $P(-5;0)$ est un point de d

Etape 3 : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow d : \begin{cases} x = -5 + 2\lambda \\ y = \lambda \end{cases}$

c) Regardons si les points $A(-2;1)$ et $B(-1;5)$ sont sur $d : 3x - y + 7 = 0$

$$A(-2;1) \quad \Rightarrow 3 \cdot (-2) - 1 + 7 = 0 \Rightarrow A \in d$$

$$B(-1;5) \quad \Rightarrow 3 \cdot (-1) - 5 + 7 = -1 \neq 0 \Rightarrow B \notin d$$

d) Trouver les coordonnées des points $C(16;?)$ et $D(?\ ;-2)$ qui sont des points de $d : 3x - y + 7 = 0$.

$$C \ : \ 3 \cdot 16 - y + 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 55 \quad \Rightarrow \quad C(16;55)$$

$$D \ : \ 3x - (-2) + 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -3 \quad \Rightarrow \quad D(-3;-2)$$

e) Trouver l'équation cartésienne de la droite passant par $D(5;6)$ et ayant $\vec{v} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix} // d \quad \overset{PCUS}{\Leftrightarrow} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} \perp d$$

Donc $\quad d : 2x + 7y + k = 0 \quad , \quad (5;6) \in d$

$$\Rightarrow \ 2 \cdot 5 + 7 \cdot 6 + k = 0 \ \Rightarrow \ k = -52$$

$$d : 2x + 7y - 52 = 0$$

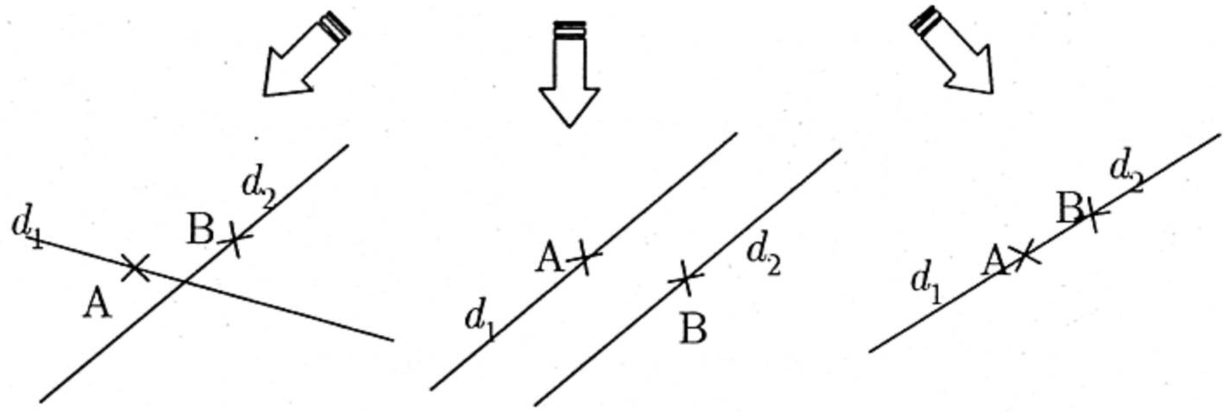
f) Trouver un vecteur directeur et un point de la droite $d : 2x + 5y - 3 = 0$.

Par exemple, le point $P\left(\frac{3}{2};0\right)$ et vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

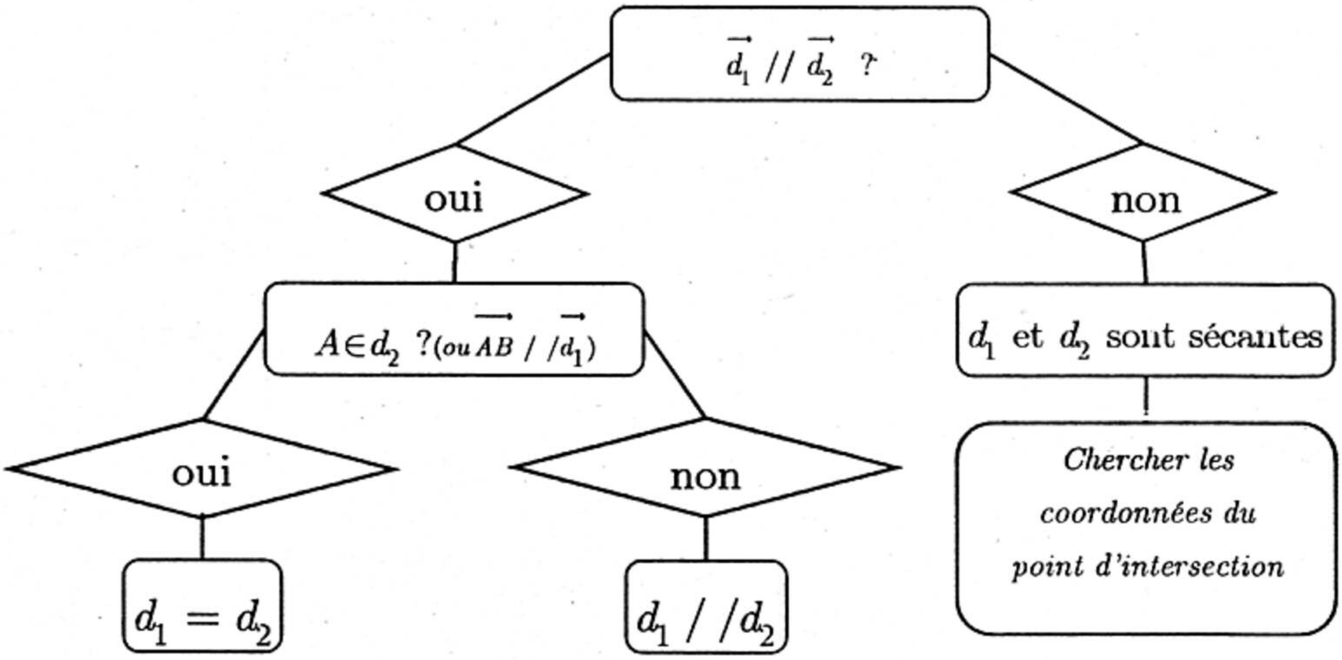
4.4.3 <u>POSITION RELATIVE DE DEUX DROITES</u>

Soient deux droites du plan : $\begin{cases} \text{droite } d_1 : \ \text{par } A \text{ et de direction } \overrightarrow{d_1} \\ \text{droite } d_2 : \ \text{par } B \text{ et de direction } \overrightarrow{d_2} \end{cases}$

Les droites peuvent être ***sécantes***, ***parallèles*** ou ***confondues*** :



Pour se déterminer entre les 3 cas, il faut suivre l'organigramme suivant :



<u>Exemple :</u> Etudions la position relative des droites $d_1 : \begin{cases} x = -5 + 2\lambda_1 \\ y = \lambda_1 \end{cases}$

et $d_2 : \begin{cases} x = 3 - 4\lambda_2 \\ y = 4 - 2\lambda_2 \end{cases}$.

Etape 1 : $\overrightarrow{d_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} // \overrightarrow{d_2} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$, car $(-2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Etape 2 : $A(-5;0) \in d_1$. Regardons si le point $A(-5;0) \in d_2$. On a

$$d_2 : \begin{cases} -5 = 3 - 4\lambda_2 & \Rightarrow \lambda_2 = 2 \\ 0 = 4 - 2\lambda_2 & \Rightarrow \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

Donc les droites sont ***confondues.***

Si les droites sont sécantes, il faut savoir trouver les coordonnées du point d'intersection pour toutes les situations, à savoir :

- ***Deux droites « paramétriques » :***

$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda \cdot d_{1,1} \\ y = a_2 + \lambda \cdot d_{1,2} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = b_1 + \mu \cdot d_{2,1} \\ y = b_2 + \mu \cdot d_{2,2} \end{cases}$$

- ***Deux droites « cartésiennes » :***

$$d_{1,2} \cdot x - d_{1,1} \cdot y + k_1 = 0 \quad \text{et} \quad d_{2,2} \cdot x - d_{2,1} \cdot y + k_2 = 0$$

- ***Une droite « cartésienne » et une « paramétrique » :***

$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda \cdot d_{1,1} \\ y = a_2 + \lambda \cdot d_{1,2} \end{cases} \quad \text{et} \quad d_{2,2} \cdot x - d_{2,1} \cdot y + k_2 = 0$$

<u>Résolution</u>

1) Système 2x2 : $\begin{cases} a_1 + \lambda \cdot d_{1,1} = b_1 + \mu \cdot d_{2,1} \\ a_2 + \lambda \cdot d_{1,2} = b_2 + \mu \cdot d_{2,2} \end{cases}$ dont les inconnues sont λ et μ

2) Système 2x2 : $\begin{cases} d_{1,2} \cdot x - d_{1,1} \cdot y + k_1 = 0 \\ d_{2,2} \cdot x - d_{2,1} \cdot y + k_2 = 0 \end{cases}$ dont les inconnues sont x et y

3) Substitution. Equation en λ :

$$d_{2,2} \cdot \left(a_1 + \lambda \cdot d_{1,1}\right) - d_{2,1} \cdot \left(a_2 + \lambda \cdot d_{1,2}\right) + k_2 = 0$$

<u>Exemples</u>

Trouver l'intersection I entre les droite d_1 et d_2 suivantes :

$$d_1 : \begin{cases} x = -3 + 4\lambda \\ y = 2 - \lambda \end{cases} \qquad \text{ou } \ d_1 : \ x + 4y - 5 = 0$$

$$d_2 : \begin{cases} x = -5 - \mu \\ y = 9 - 3\mu \end{cases} \qquad \text{ou } \ d_2 : \ -3x + y - 24 = 0$$

- ***Méthode 1:*** Avec deux équations paramétriques

$$\begin{cases} -3+4\lambda=-5-\mu \\ 2-\lambda=9-3\mu \quad \cdot 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3+4\lambda=-5-\mu \\ 8-4\lambda=36-12\mu \quad + \end{cases}$$

$$5=31-13\mu \Rightarrow \mu=2 \Rightarrow I(-7;3)$$

- ***Méthode 2:*** Avec deux équations cartésiennes

$$\begin{cases} x+4y-5=0 \quad \cdot 3 \\ -3x+y-24=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x+12y-15=0 \\ -3x+y-24=0 \quad + \end{cases}$$

$$13y-39=0 \Rightarrow I(-7;3)$$

- ***Méthode 3:*** Avec une équation paramétrique et une équation cartésienne.

  Prenons $d_1:\begin{cases} x=-3+4\lambda \\ y=2-\lambda \end{cases}$ et $d_2: -3x+y-24=0$ par exemple. En injectant d_1 dans d_2, on obtient :

  $\Rightarrow \quad -3\cdot(-3+4\lambda)+(2-\lambda)-24=0$

  $\Rightarrow \quad 9-12\lambda+2-\lambda-24=0$

  $\Rightarrow \quad \lambda=-1 \Rightarrow I(-7;3)$

4.5 BASE ORTHONORMEE ET REPERE METRIQUE

Nous allons doter le plan d'une mesure entre les points. Cette partie de la géométrie s'intitule ***géométrie métrique***. L'introduction d'un outil de calcul entre les points (nommé ***distance***) nous permettra de calculer la ***norme*** des vecteurs, l'angle entre deux droites, de considérer les médiatrices et bissectrices d'un triangle. Plus tard en considérant la géométrie à 3 dimensions, nous aurons un moyen de calculer les aires de triangles et les volumes de parallélépipèdes, entre autres.

4.5.1 VECTEUR UNITE, BASE ORTHONORMEE ET REPERE METRIQUE

Un ***vecteur unité*** est un vecteur de longueur 1.

Une ***base orthonormée*** est une base formée de vecteurs ***unités*** et ***orthogonaux.***

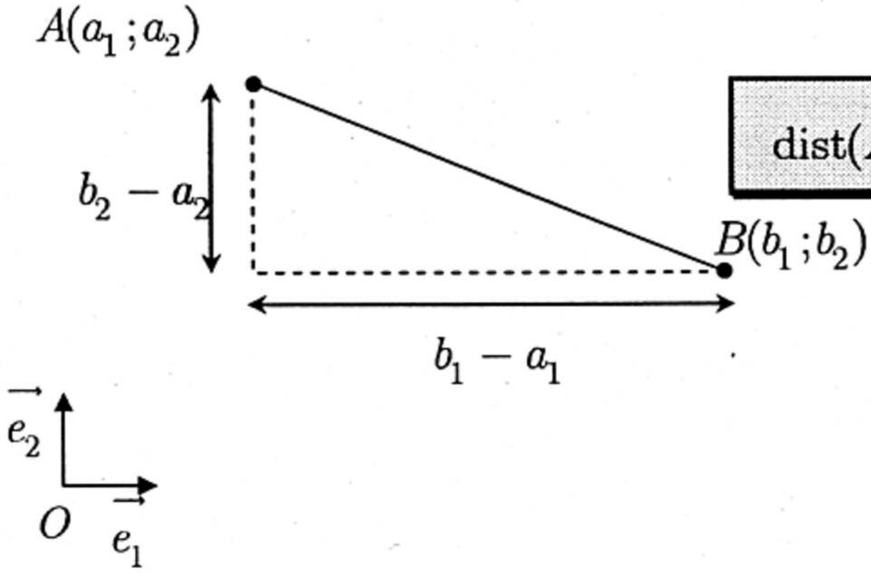
Un ***repère métrique*** est un repère constitué d'une base orthonormée.

Ainsi si $\left\{ O; \vec{e_1}; \vec{e_2} \right\}$ est un repère métrique, cela signifie que :

$$\boxed{\left\| \vec{e_1} \right\| = \left\| \vec{e_2} \right\| = 1 \qquad \text{et} \qquad \vec{e_1} \perp \vec{e_2}}$$

4.5.2 LA DISTANCE ENTRE 2 POINTS – LA NORME D'UN VECTEUR

Soient les points $A(a_1\,;a_2)$ et $B(b_1\,;b_2)$ dans un repère métrique. On définit alors, grâce au théorème de Pythagore, la ***distance entre A et B*** par :



$$\boxed{\text{dist}(A,B) = \sqrt{\left(b_1 - a_1\right)^2 + \left(b_2 - a_2\right)^2}}$$

La ***norme ou longueur d'un vecteur*** découle de la formule donnant la distance entre deux points :

$$\boxed{\textbf{\textit{Soit}}\ \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{\textit{alors}} \left\| \ \vec{v} \ \right\| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2}}$$

Exemples

- Quel point est le plus proche de l'origine : $A(3;-6)$ ou $B(-5;5)$?

  $\left\| \overrightarrow{OA} \right\| = \sqrt{3^2 + (-6)^2} = \sqrt{45} \cong 6{,}71$

  $\left\| \overrightarrow{OB} \right\| = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = \sqrt{50} \cong 7{,}07$

  $\Rightarrow \quad A$ est plus près.

- Quelle est la distance entre A et B ?

  $$\operatorname{dist}(A,B) = \left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \end{pmatrix} \right\|$$
  $$= \sqrt{(-8)^2 + 11^2} = \sqrt{185} \cong 13{,}60$$

- Le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ est-il un vecteur unité ?

  $$\left\| \vec{v} \right\| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \neq 1$$

  $\Rightarrow$ pas un vecteur unité

- Compléter le « vide » pour que le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3/5 \\ \end{pmatrix}$ soit unité.

  $$\left\| \vec{u} \right\| = \sqrt{\left(\frac{-3}{5}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + y^2} = 1$$
  $$\Rightarrow y^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$
  $$\Rightarrow y = \pm\frac{4}{5} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} -3/5 \\ -4/5 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- Proposer un vecteur unité parallèle à $\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$.

  $$\overrightarrow{u_a} = \frac{1}{\left\| \vec{a} \right\|} \cdot \vec{a} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12/13 \\ -5/13 \end{pmatrix}$$

4.6 PRODUIT SCALAIRE

4.6.1 DEFINITION

Le ***produit scalaire*** de deux vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ est un **nombre** que l'on écrit $\vec{a} \bullet \vec{b}$, qu'on lit « a point b » et que l'on définit par :

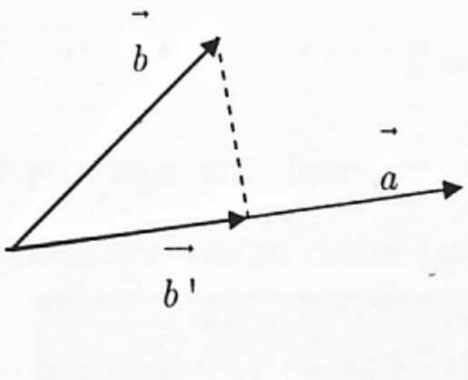
$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \left\| \vec{a} \right\| \cdot \left\| \vec{b'} \right\| \cdot s$$

où $\left\| \vec{a} \right\|$ *est la longueur du vecteur* $\vec{a}$

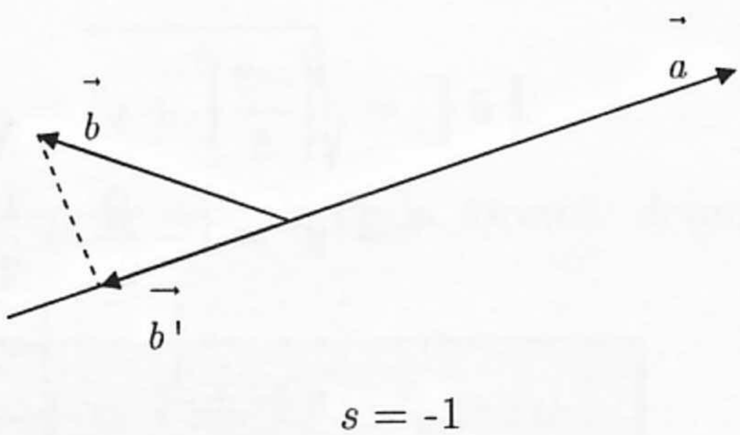
$\vec{b'}$ *est la projection orthogonale de* $\vec{b}$ sur $\vec{a}$

$$s = \begin{cases} +1 & \text{si l'angle } \alpha \text{ entre } \vec{a} \text{ et } \vec{b} \in \left[0^0;90^0\right[\\ -1 & \text{si l'angle } \alpha \text{ entre } \vec{a} \text{ et } \vec{b} \in \left]90^0;180^0\right] \end{cases}$$

Illustration



$s = 1$



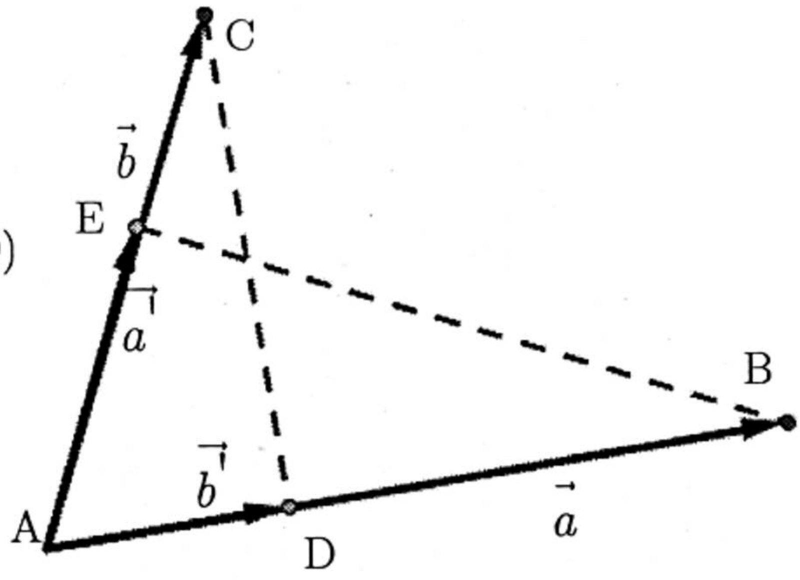
$s =$ -1

4.6.2 PROPRIETES

1) $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a} \rightarrow$ ***commutativité***

Les triangles ABE et ADC sont semblables car ils sont les deux rectangles et ils ont un angle en commun (angle $\widehat{EAD}$)
Donc il existe $k \in \mathbb{R}$, tel que

$$\boxed{\left\|\vec{b}'\right\| \cdot k = \left\|\vec{a}'\right\| \text{ et } \left\|\vec{b}\right\| \cdot k = \left\|\vec{a}\right\|}$$



Ainsi:

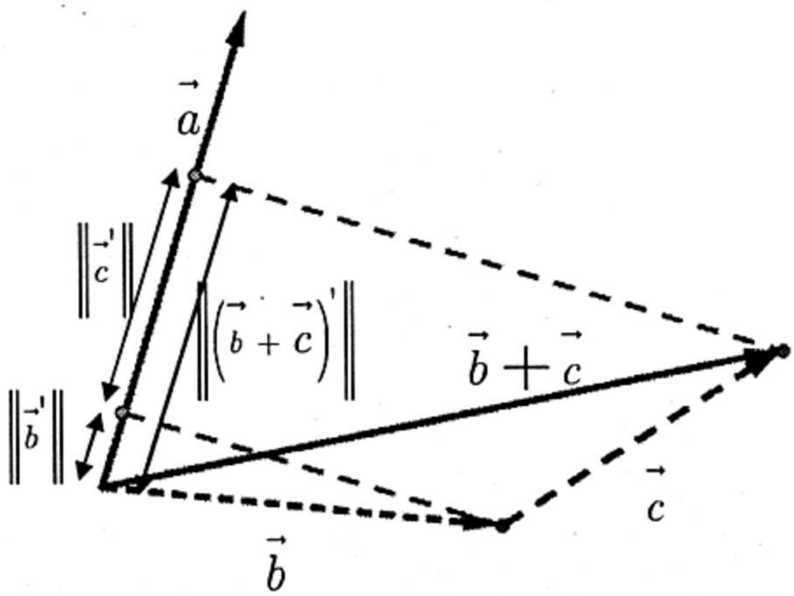
$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \left\|\vec{a}\right\| \cdot \left\|\vec{b}'\right\| \cdot s$$

$$= \left\|\vec{b}\right\| \cdot k \cdot \frac{\left\|\vec{a}'\right\|}{k} \cdot s = \left\|\vec{b}\right\| \cdot \left\|\vec{a}'\right\| \cdot s = \vec{b} \bullet \vec{a}$$

2) $\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$ ***distributivité***

Par le dessin, on a clairement que:

$$\boxed{\left\|\left(\vec{b} + \vec{c}\right)'\right\| = \left\|\vec{b}'\right\| + \left\|\vec{c}'\right\|}$$



Ainsi

$$\vec{a} \bullet \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$$

$$= \left\|\vec{a}\right\| \cdot \left\|\left(\vec{b} + \vec{c}\right)'\right\| \cdot s$$

$$= \left\|\vec{a}\right\| \cdot \left(\left\|\vec{b}'\right\| + \left\|\vec{c}'\right\|\right) \cdot s$$

$$= \left\|\vec{a}\right\| \cdot \left\|\vec{b}'\right\| \cdot s + \left\|\vec{a}\right\| \cdot \left\|\vec{c}'\right\| \cdot s = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$$

3) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\bullet\left(\vec{c}+\vec{d}\right)=\vec{a}\bullet\vec{c}+\vec{a}\bullet\vec{d}+\vec{b}\bullet\vec{c}+\vec{b}\bullet\vec{d}$

double distributivité

$$\begin{aligned}
\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\bullet\left(\vec{c}+\vec{d}\right) &\overset{2)}{=}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\bullet\vec{c}+\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\bullet\vec{d}\\
&\overset{1)}{=}\vec{c}\bullet\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{d}\bullet\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\\
&\overset{2)}{=}\vec{c}\bullet\vec{a}+\vec{c}\bullet\vec{b}+\vec{d}\bullet\vec{a}+\vec{d}\bullet\vec{b}\\
&\overset{1)}{=}\vec{a}\bullet\vec{c}+\vec{a}\bullet\vec{d}+\vec{b}\bullet\vec{c}+\vec{b}\bullet\vec{d}
\end{aligned}$$

4) $\alpha\vec{a}\bullet\beta\vec{b}=\alpha\cdot\beta\left(\vec{a}\bullet\vec{b}\right)$

$$\begin{aligned}
\alpha\vec{a}\bullet\beta\vec{b} &= \underbrace{\left(\vec{a}+\ldots+\vec{a}\right)}_{\alpha\text{ fois}}\bullet\underbrace{\left(\vec{b}+\ldots+\vec{b}\right)}_{\beta\text{ fois}}\\
&\overset{3)}{=}\underbrace{\left[\underbrace{\left(\vec{a}\bullet\vec{b}\right)+\ldots+\left(\vec{a}\bullet\vec{b}\right)}_{\beta\text{ fois}}\right]+\ldots+\left[\underbrace{\left(\vec{a}\bullet\vec{b}\right)+\ldots+\left(\vec{a}\bullet\vec{b}\right)}_{\beta\text{ fois}}\right]}_{\alpha\text{ fois}}\\
&=\alpha\cdot\beta\cdot\left(\vec{a}\bullet\vec{b}\right)
\end{aligned}$$

5) $\vec{a}\bullet\vec{b}=0 \Longleftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$ ou $\vec{a}=0$ ou $\vec{b}=0$

détecteur d'orthogonalité

$$\vec{a}\bullet\vec{b}=0 \quad\Leftrightarrow \left\|\vec{a}\right\|\cdot\left\|\vec{b'}\right\|\cdot s=0 \qquad \Leftrightarrow \cdot\left\|\vec{b'}\right\|=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$$

6) $\vec{a}\bullet\vec{a}=\left\|\vec{a}\right\|^2 \Longrightarrow \left\|\vec{a}\right\|=\sqrt{\vec{a}\bullet\vec{a}}$

norme du vecteur $\vec{a}$

Plus concrètement, pour calculer le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} a1 \\ a2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \end{pmatrix}$ on utilise la formule suivante :

$$\boxed{\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} a1 \\ a2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2}$$

En effet, dans une base orthonormée $\left\{\vec{e_1}; \vec{e_2}\right\}$, nous pouvons écrire

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2}.$$

Ainsi:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \bullet \vec{b} \quad &= \left(a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}\right) \bullet \left(b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2}\right) \\
&= \left(a_1\vec{e_1} \bullet b_1\vec{e_1}\right) + \left(a_1\vec{e_1} \bullet b_2\vec{e_2}\right) + \left(a_2\vec{e_2} \bullet b_1\vec{e_1}\right) + \left(a_2\vec{e_2} \bullet b_2\vec{e_2}\right) \\
&= a_1b_1 \underbrace{\left(\vec{e_1} \bullet \vec{e_1}\right)}_{=1} + a_1b_2 \underbrace{\left(\vec{e_1} \bullet \vec{e_2}\right)}_{=0} + a_2b_1 \underbrace{\left(\vec{e_2} \bullet \vec{e_1}\right)}_{=0} + a_2b_2 \underbrace{\left(\vec{e_2} \bullet \vec{e_2}\right)}_{=1} \\
&= a_1b_1 + a_2b_2
\end{aligned}$$

<u>Exemples</u>

- Soients $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calculer :

  $$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + (-5) \cdot (-1) = 6 + 5 = 11$$

  $$\left\| \vec{a} \right\| = \sqrt{\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}} = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$$

  $$\left\| \vec{b} \right\| = \sqrt{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}} = \sqrt{3^3 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

- Soients $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{e} = \begin{pmatrix} -d_2 \\ d_1 \end{pmatrix}$. $\vec{d}$ est un vecteur directeur d'une droite d. Montrer que $\vec{e} = PCUS(\vec{d})$ est perpendiculaire à la droite d.

  Il suffit de vérifier que $\vec{d} \bullet \vec{e} = 0$ .On a

$$\vec{d} \bullet \vec{e} = d_1 \cdot (-d_2) + d_2 \cdot d_1 = 0 .$$

4.6.3 APPLICATIONS

- Angle entre deux vecteurs : aigu, droit ou obtus ?

  Si $\vec{a} \bullet \vec{b} > 0$ alors l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est aigu

  Si $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$ alors l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est droit

  Si $\vec{a} \bullet \vec{b} < 0$ alors l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est obtus

- Vérifier que les vecteurs suivants forment un angle droit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2/7 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$

  $$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} 2/7 \\ -1/3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 - 2 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{a} \perp \vec{b}$$

- Calculer la distance entre $A(5;-2)$ et $B(7;-9)$

  $$\begin{aligned} Dist(A;B) &= \left\| \overrightarrow{AB} \right\| \\ &= \sqrt{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB}} = \sqrt{\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}} = \sqrt{4+49} = \sqrt{53} \end{aligned}$$

- Projection scalaire : déterminer la norme de la projection orthogonale d'un vecteur sur un autre :

  $$\boxed{\left\| \vec{b}\,' \right\| = \frac{\left| \vec{a} \bullet \vec{b} \right|}{\left\| \vec{a} \right\|}}$$

- Projection vectorielle : déterminer le vecteur projection d'un vecteur sur un autre

  $\vec{b}\,' = \left\| \vec{b}\,' \right\| \cdot \overrightarrow{u_a}$, avec $\overrightarrow{u_a}$ un vecteur unité de même direction que $\vec{a}$ (signe dépend de l'angle).

  Ce vecteur unité est $\overrightarrow{u_a} = \pm \dfrac{1}{\left\| \vec{a} \right\|} \cdot \vec{a}$ et on a alors :

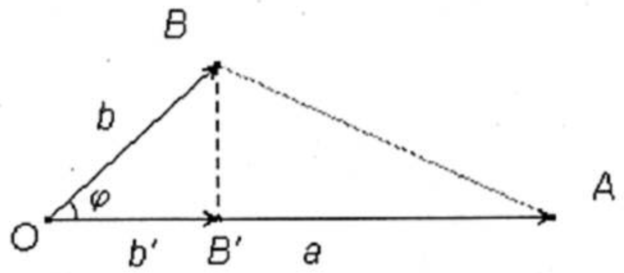
  $$\boxed{\vec{b}\,' = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\left\| \vec{a} \right\|} \cdot \frac{1}{\left\| \vec{a} \right\|} \cdot \vec{a} \quad donc \quad \vec{b}\,' = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\left\| \vec{a} \right\|^2} \cdot \vec{a}}$$

4.6.4 FORME TRIGONOMETRIQUE DU PRODUIT SCALAIRE

Comme on vient de le voir, le produit scalaire entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$ peut se calculer par :

$$\boxed{\vec{a} \bullet \vec{b} = \left\| \vec{a} \right\| \cdot \left\| \vec{b'} \right\| \cdot s}$$

Illustration 1



L'angle φ entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est aigu.

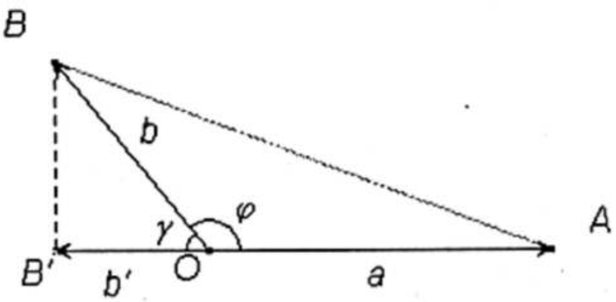
Dans le triangle rectangle OBB', le côté b' est calculé grâce à la relation cos-adj-hyp :

$$\cos(\varphi) = \frac{b'}{b} = \frac{\left\| \vec{b'} \right\|}{b} \quad \Rightarrow \quad b' = \left\| \vec{b'} \right\| = \cos(\varphi) \cdot \left\| \vec{b} \right\|$$

Dans ce cas le signe est $s = 1$.

Ainsi $$\boxed{\vec{a} \bullet \vec{b} = \left\| \vec{a} \right\| \cdot \left\| \vec{b'} \right\| \cdot s = \left\| \vec{a} \right\| \cdot \cos(\varphi) \cdot \left\| \vec{b} \right\| \cdot 1 = \cos(\varphi) \cdot \left\| \vec{a} \right\| \cdot \left\| \vec{b} \right\|}$$

Illustration 2



L'angle φ entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est obtus.

Dans le triangle rectangle OBB', le côté b' est calculé par :

$$b' = \left\| \vec{b'} \right\| = \cos(\gamma) \cdot \left\| \vec{b} \right\| = \cos(\pi - \varphi) \cdot \left\| \vec{b} \right\| = -\cos(\varphi) \cdot \left\| \vec{b} \right\|$$

Dans ce cas le signe est $s = -1$.

Ainsi

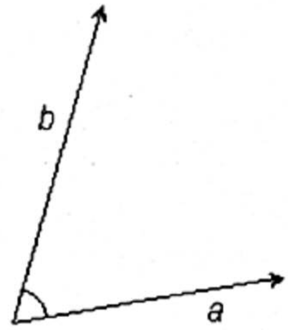
$$\boxed{\vec{a} \bullet \vec{b} = \left\| \vec{a} \right\| \cdot \left\| \vec{b'} \right\| \cdot s = \left\| \vec{a} \right\| \cdot \left(-\cos(\varphi) \cdot \left\| \vec{b} \right\| \right) \cdot (-1) = \cos(\varphi) \cdot \left\| \vec{a} \right\| \cdot \left\| \vec{b} \right\|}$$

En conclusion, quel que soit le type de l'angle φ entre deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, on a :

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \cos(\varphi) \cdot \| \vec{a} \| \cdot \| \vec{b} \| \quad \Rightarrow \quad \cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\| \vec{a} \| \cdot \| \vec{b} \|}$$

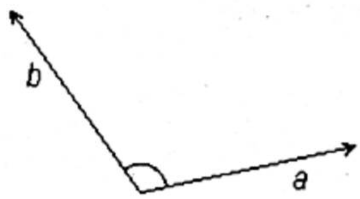
$$\Rightarrow \quad \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\| \vec{a} \| \cdot \| \vec{b} \|}\right)$$

<u>Exemples</u>



- $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{r} \vec{a} \bullet \vec{b} = 12 + 7 = 19 \\ \| \vec{a} \| = \sqrt{37} \\ \| \vec{b} \| = \sqrt{53} \end{array}\right\} \Rightarrow \cos(\varphi) = \frac{19}{\sqrt{37}\sqrt{53}} \cong 0,4291 \ \Rightarrow \ \varphi \cong 64,59°$$



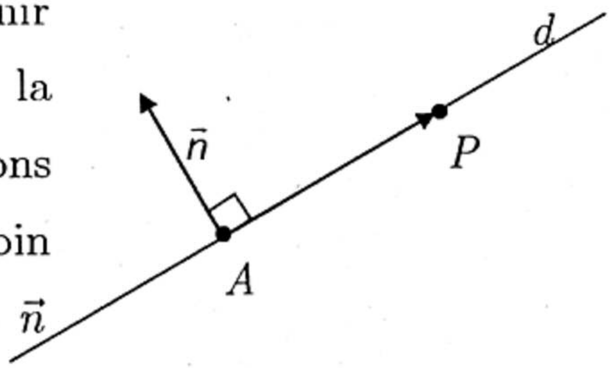
- $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{r} \vec{a} \bullet \vec{b} = -15 + 4 = -11 \\ \| \vec{a} \| = \sqrt{26} \\ \| \vec{b} \| = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \cos(\varphi) = \frac{-11}{\sqrt{26} \cdot 5} \cong -0,43 \ \Rightarrow \ \varphi \cong 115,56°$$

4.6.5 <u>*DROITE DONNEE PAR UN VECTEUR NORMAL*</u>

On a vu que pour décrire une droite d on avait besoin d'un point de celle-ci et d'un vecteur directeur de même direction que d. Grâce à l'équation vectorielle $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{d}$ on obtient des équations paramétriques et en éliminant le paramètre λ on aboutit sur une équation cartésienne de d.

Le produit scalaire nous permet d'obtenir directement une équation cartésienne de la droite sans passer par des équations paramétriques. Pour cela nous avons besoin d'un point A de la droite et d'un vecteur $\vec{n}$ perpendiculaire à d appelé ***vecteur normal à la droite***.



Alors un point $P\left(x\,;y\right) \in d$ si et seulement si

Equation cartésienne de d :

$$\begin{pmatrix} x - a_1 \\ y - a_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = n_1 x + n_2 y + \left(-n_1 a_1 - n_2 a_2\right) = 0$$

> L'équation cartésienne d'une droite normale à $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$ est
>
> $n_1\, x + n_2\, y + k = 0$. La valeur k est obtenue en remplaçant les coordonnées d'un point dans l'équation.

Exemple

Trouver l'équation cartésienne de la droite passant par $A(3;4)$ perpendiculairement à $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

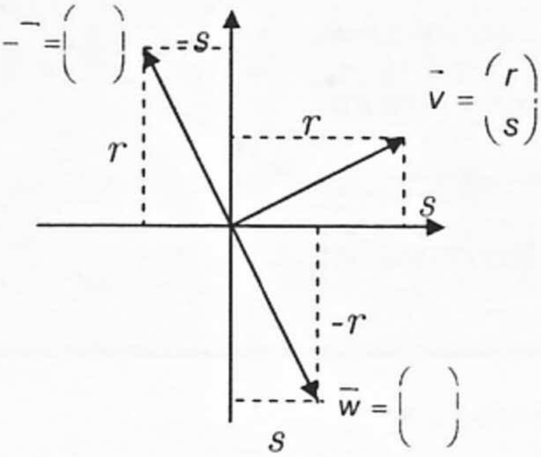
$2x + 5y + k = 0$ passe par A donc $2 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + k = 0 \;\; \Rightarrow \;\; k = -26$

Finalement $\boxed{2x + 5y - 26 = 0}$

Remarques

1) Le coefficient devant x est la première composante du vecteur normal et celui devant y la deuxième.

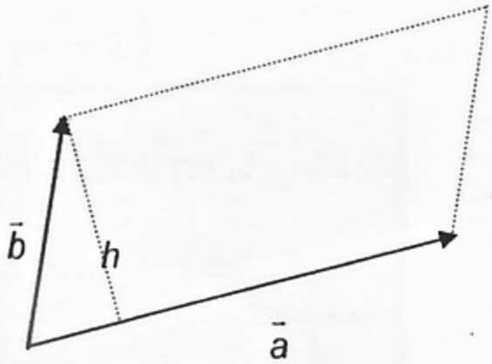
2) En géométrie plane, il est facile de trouver un vecteur orthogonal à un vecteur donné :



On peut facilement vérifier que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux en calculant $\vec{v} \bullet \vec{w}$ (le résultat doit être zéro)

4.6.6 AIRE D'UN PARALLELOGRAMME

L'aire d'un parallélogramme donnée par deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ peut se calculer de la manière suivante :



Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, on a $\vec{n} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \perp \vec{a}$

Ainsi:

$$\left|\vec{n} \bullet \vec{b}\right| = \left\|\vec{n}\right\| \cdot \left\|\vec{b}'\right\| = \left\|\vec{n}\right\| \cdot h \qquad \Rightarrow h = \frac{\left|\vec{n} \bullet \vec{b}\right|}{\left\|\vec{n}\right\|}$$

Et donc:

$$\begin{aligned} Aire &= \left\|\vec{a}\right\| \cdot h \\ &= \left\|\vec{a}\right\| \cdot \frac{\left|\vec{n} \bullet \vec{b}\right|}{\left\|\vec{n}\right\|} = \sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2}} \cdot \frac{\left|-a_2 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2\right|}{\sqrt{\left(-a_2\right)^2 + a_1^{\ 2}}} = \left|a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1\right| \end{aligned}$$

L'expression $a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$ est appelée ***déterminant (d'ordre 2)*** et est souvent notée

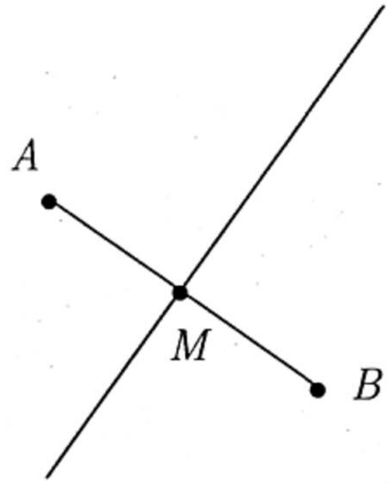
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Exemple :

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-4) - 2 \cdot (-1) = -12 + 2 = -10$$

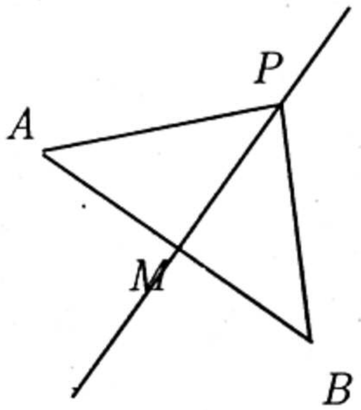
4.6.7 MEDIATRICE D'UN SEGMENT

On sait que la médiatrice du segment AB est la droite qui passe par M le point milieu de AB et qui est perpendiculaire à $\overrightarrow{AB}$.



Définition

La médiatrice d'un segment est constituée de l'ensemble des points situés à égale distance de deux points donnés : les extrémités du segment.



En effet, par construction, $P\left(x;y\right)$ est un point de la médiatrice si et seulement si le triangle APB est isocèle, c'est-à-dire si $\left\|\overrightarrow{AP}\right\| = \left\|\overrightarrow{BP}\right\|$

Exemple

Déterminer l'équation de la médiatrice du segment AB avec $A\left(4;1\right)$ et $B\left(7;-6\right)$

$\vec{n} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow m_M : \; 3x - 7y + k = 0$ passe par le milieu de AB :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5,5 \\ -2,5 \end{pmatrix} \Rightarrow M(5,5;-2,5)$$

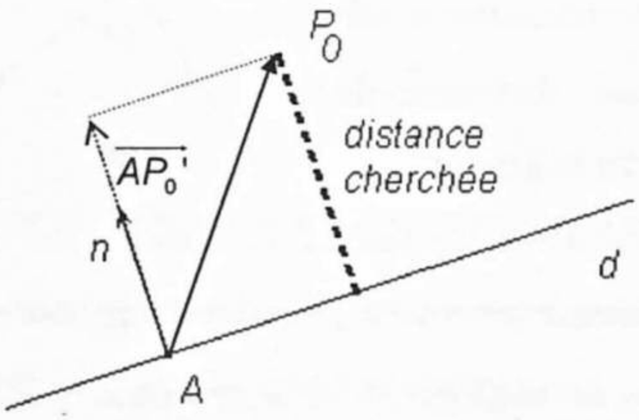
$$M \in m_M \Rightarrow 3 \cdot 5,5 - 7 \cdot \left(-2,5\right) + k = 0 \Rightarrow k = -34$$

donc $\boxed{m_M : \; 3x - 7y - 34 = 0}$

Variante : $\vec{n} \bullet \overrightarrow{MP} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x - 5,5 \\ y + 2,5 \end{pmatrix} = 3x - 7y - 34 = 0$

4.6.8 DISTANCE D'UN POINT A UNE DROITE

Soit $P_0\left(x_0\,;y_0\right)$ un point du plan et d une droite passant par $A\left(a_1\,;a_2\right)$ et de vecteur normal $\vec{n}=\begin{pmatrix}n_1\\n_2\end{pmatrix}$. La distance entre la droite d et le point P_0, se note $\text{dist}\left(d,P\right)$.



Essayons de la déterminer dans le cas général.

$\text{dist}\left(A,P_0\right)=\left\|\overrightarrow{AP_0{'}}\right\|$, projection de $\overrightarrow{AP_0}$ sur $\vec{n}$.

Nous avons :

$\left|\vec{n}\bullet\overrightarrow{AP_0}\right|=\left\|\vec{n}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AP_0{'}}\right\|$ d'où $\left\|\overrightarrow{AP_0{'}}\right\|=\dfrac{\left|\vec{n}\bullet\overrightarrow{AP_0}\right|}{\left\|\vec{n}\right\|}$

avec $\vec{n}\bullet\overrightarrow{AP_0}=\begin{pmatrix}n_1\\n_2\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}x_0-a_1\\y_0-a_2\end{pmatrix}=n_1x_0+n_2y_0+\left(-a_1n_1-a_2n_2\right)$

C'est l'équation de la droite d, sans « = 0 » et en remplaçant x et y par les coordonnées du point P_0.

Conclusion

> La distance entre $P_0\left(x_0;y_0\right)$ et la droite d : $ax+by+c=0$ est :
>
> $$\text{dist}\left(d,P_0\right)=\frac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\left\|\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right\|}=\frac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
>
> Cette équation s'appelle ***équation hessienne.***

Exemple

Trouver la plus courte distance du point $P(3\,;-7)$ a la droite d donnée par : $A(-1\,;-2)$ perpendiculaire a $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

Equation cartésienne de d : $2x + 3y + k = 0$

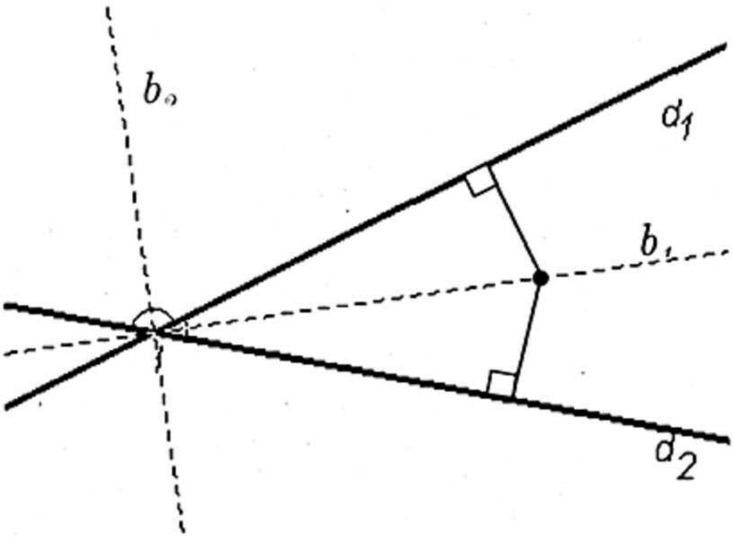
Par $A \Rightarrow -2 - 6 + k = 0 \Rightarrow k = 8$

Ainsi son équation est $2x + 3y + 8 = 0$

$$\text{dist}(P, d) = \frac{\left|2 \cdot 3 + 3 \cdot (-7) + 8\right|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{\left|-7\right|}{\sqrt{13}} = \boxed{\frac{7}{\sqrt{13}}}$$

4.6.9 BISSECTRICES

On sait que la bissectrice de l'angle formé par deux droites sécantes est la droite qui passe par l'intersection des droites et qui coupe l'angle en deux.



Définition

La bissectrice d'un angle, formé par deux droites données, est constituée de l'ensemble des points situés à égale distance des deux droites.

En fait deux droites sécantes possèdent deux bissectrices (intérieure et extérieure) perpendiculaires.

> Les deux bissectrices sont obtenues en écrivant sous forme cartésienne les deux solutions de : $\text{dist}\left(d_1, P\right) = \text{dist}\left(d_2, P\right)$

Exemple

Les droites a : $3x - 4y + 12 = 0$ et b : $12x + 5y - 15 = 0$ se coupent au point $I\left(0;3\right)$. Par définition, les bissectrices b_1 et b_2 satisfont l'équation : $\text{dist}\left(a, P\right) = \text{dist}\left(b, P\right)$.

Les vecteurs normaux des droites a et b, ainsi que leur norme sont :

$$\overrightarrow{n_a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \ \left\| \overrightarrow{n_a} \right\| = 5 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{n_b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \left\| \overrightarrow{n_b} \right\| = 13$$

L'équation ci-dessus devient alors :

$$\frac{\left| 3x - 4y + 12 \right|}{5} = \frac{\left| 12x + 5y - 15 \right|}{13}$$
$$\Rightarrow \quad 13 \cdot \left(3x - 4y + 12 \right) = \pm 5 \cdot \left(12x + 5y - 15 \right)$$

On obtient :

b_1 : $39x - 52y + 156 = 60x + 25y - 75$

$$\Rightarrow -21x - 77y + 231 = 0 \ \Rightarrow \ \boxed{3x + 11y - 33 = 0}$$

b_2 : $39x - 52y + 156 = -60x - 25y + 75$

$$\Rightarrow 99x - 27y + 81 = 0 \ \Rightarrow \ \boxed{11x - 3y + 9 = 0}$$

Vérifions que leur intersection est bien le point $I\left(0;3\right)$ et qu'elles sont perpendiculaires :

Intersection

$$\begin{array}{rcl|c} 3x + 11y - 33 & = & 0 & \cdot 3 \\ 11x - 3y + 9 & = & 0 & \cdot 11 \\ \hline 9x + 33y - 99 & = & 0 & \\ 121x - 33y + 99 & = & 0 & \oplus \\ \hline 130x & = & 0 & x = 0 \\ 3 \cdot 0 + 11y - 33 & = & 0 & y = 3 \end{array}$$

perpendicularité

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad b_1 \perp b_2$$

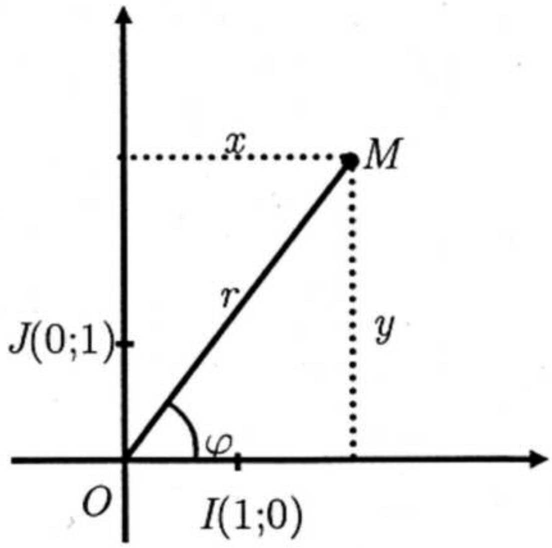
4.7 Coordonnees polaires

Pour décrire un point M de coordonnées cartésiennes $M(x;y)$, on peut donner la distance r de M à l'origine O, c'est-à-dire $r = \left\| \overrightarrow{OM} \right\|$, et la mesure φ de $\measuredangle IOM$, avec $I(1;0)$.

Le point M est alors donné par ses ***coordonnées polaires*** $M(r;\varphi)$.

On obtient les coordonnées cartésiennes à partir des coordonnées polaires par les relations suivantes.

$$\begin{cases} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \end{cases}$$



Réciproquement, on trouve les coordonnées polaires à partir des coordonnées cartésiennes par les relations suivantes.

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$$

L'angle φ se calcule à 180° près. Le signe de x et y permet de calculer φ.

Exemples

1. Calculer les coordonnées cartésiennes de $A(5;70°)$.

$$\begin{aligned} x &= 5\cos(70°) \cong 1.71 \\ y &= 5\sin(70°) \cong 4.7 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \quad A(1.71;4.7)$$

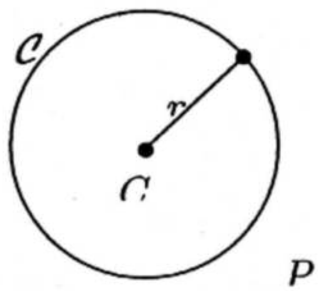
2. Calculer les coordonnées polaires de $B(-2;3)$.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13} \\ \varphi &= \tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right) \cong 123.69° \end{aligned} \qquad \Rightarrow \quad B(\sqrt{13};123.69°)$$

4.8 Cercle

4.8.1 Definition

Un cercle est une courbe plane formée de l'ensemble des points situés à égale distance (le rayon r) d'un point (le centre C).



On va maintenant déterminer l'équation générale d'un cercle. Pour cela il faut « traduire » la définition ci-dessus en langage mathématique. Considérons un point P du cercle C de centre $C\left(c_1;c_2\right)$ et de rayon r noté C $(C\,;\,r)$. On a alors :

$P(x;y) \in \mathcal{C}(C;r)$ si et seulement si $\left\| \overrightarrow{CP} \right\| = r$. On a alors :

$$\left\| \overrightarrow{CP} \right\| = r \quad \Rightarrow \quad \left\| \begin{pmatrix} x - c_1 \\ y - c_2 \end{pmatrix} \right\| = r \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2} = r$$

On élève au carré pour obtenir **l'équation cartésienne réduite** du cercle C :

$$\boxed{(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2}$$

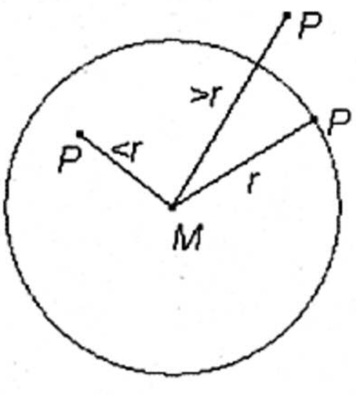
Exemples

1. Trouver l'équation du cercle de centre $C(-3\ ;\ 7)$ et de rayon 4.
   $(x + 3)^2 + (y - 7)^2 = 16$
2. L'équation $x^2 + y^2 + 6x - 14y + 42 = 0$ décrit-elle un cercle ?
   $(x + 3)^2 - 9 + (y - 7)^2 - 49 + 42 = 0$
   $(x + 3)^2 + (y - 7)^2 - 16 = 0$
   $(x + 3)^2 + (y - 7)^2 = 16$
   $\Rightarrow$ OUI cercle de centre $C(-3;7)$ et de rayon 4

4.8.2 Position relative d'un point et d'un cercle

Un point P peut être à l'intérieur, sur ou dans un cercle de centre M et de rayon r. Pour déterminer sa position on a deux méthodes a disposition :

1) On compare la longueur de vecteur $\overrightarrow{MP}$ avec le rayon r du cercle :



- Si $\left\| \overrightarrow{MP} \right\| > r$ alors le point est à ***l'extérieur du cercle.***
- Si $\left\| \overrightarrow{MP} \right\| = r$ alors le point est ***sur le cercle.***

- Si $\left\| \overrightarrow{MP} \right\| < r$ alors le point est à ***l'intérieur du cercle.***

Exemple

Déterminer la position relative du point $P(4;-1)$ et du cercle donné par son équation $(x-3)^2+(y+2)^2=16$.

Le centre est $C(3~;~-2)$ et le rayon $r = 4$. On calcule la longueur du vecteur $\overrightarrow{CP}$:

$$\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \left\| \overrightarrow{CP} \right\| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} < r$$

Ainsi le point P se trouve à l'intérieur du cercle.

2) On remplace le point P dans l'équation du cercle :

En effet, comme la partie gauche de l'équation d'un cercle représente la distance du centre à n'importe quel point du cercle, si l'on remplace x et y de l'équation par le point P on obtient la distance du point P au centre M. Pour décider de la position du point, on contemple le résultat :

- Si le résultat est positif, le point est extérieur au cercle.
- Si le résultat est zéro, le point est sur le cercle.
- Si le résultat est négatif, le point est intérieur au cercle.

Exemples

a) Déterminer la position relative du point $P(4;-1)$ et du cercle donné par $(x-3)^2+(y+2)^2=16$.

D'abord, on réécrit l'équation :

$(x-3)^2+(y+2)^2-16=0$

Ensuite on remplace x et y par le point P :

$(4-3)^2+(-1+2)^2-16=0$

$\Rightarrow \quad 1+1-16=-14<0$

Comme le résultat est négatif, le point est à l'intérieur du cercle.

b) Déterminer la position relative du point $P(4;-1)$ et du cercle donné par $x^2+y^2-6x+4y-3=0$.

On remplace x et y par le point P :

$4^2+(-1)^2-6\cdot 4+4\cdot(-1)-3=0$

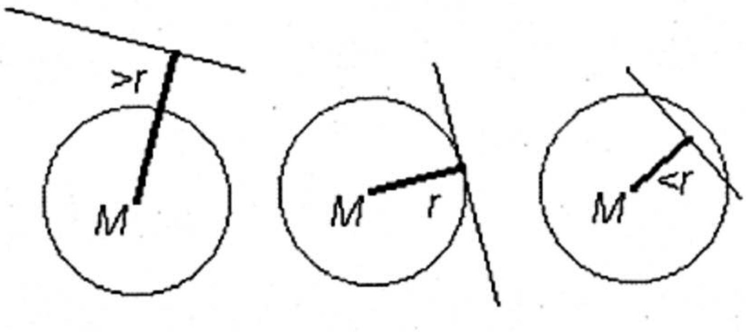
$\Rightarrow \quad 16+1-24-4-3=-14<0$

Comme le résultat est négatif, le point est à l'intérieur du cercle.

4.8.3 *POSITION RELATIVE DROITE-CERCLE*

Pour déterminer la position relative d'une droite d et d'un cercle C, on calcule la distance du centre M du cercle à la droite? Trois situations sont possibles :

1) Si $\text{dist}\left(d,M\right)>r$ alors ils sont gauches
2) Si $\text{dist}\left(d,M\right)=r$ alors ils sont tangents
3) Si $\text{dist}\left(d,M\right)<r$ alors ils sont sécants



Dans les cas 2) et 3) on doit calculer les coordonnées du/des point(s) d'intersection. Pour cela, on substitue l'équation de la droite dans celle du cercle :

Cercle $\left(x-m_1\right)^2+\left(y-m_2\right)^2=r^2$ et droite $d : ax + by + c = 0$ ou $d : \begin{cases} x = p_1 + \lambda d_1 \\ y = p_2 + \lambda d_2 \end{cases}$.

De $d : ax + by + c = 0$, nous isolons par exemple x : $x = \dfrac{-by - c}{a}$

Dans l'équation du cercle : $\left(\dfrac{-by-c}{a} - m_1\right)^2 + \left(y - m_2\right)^2 = r^2$

C'est une équation de degré 2 en y qui possède 2, 1 ou 0 solutions, selon que la droite et le cercle sont sécants, tangents ou gauches. Il reste à trouver x.

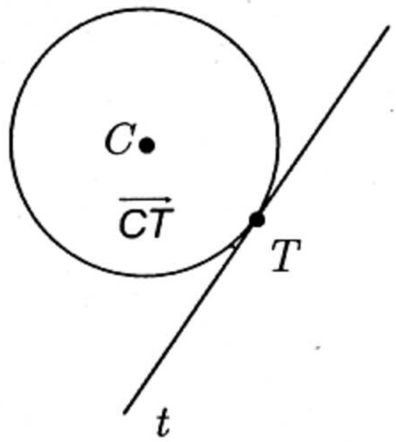
Si d est donnée par ses équations paramétriques, nous substituons x et y :

$$\left(p_1 + \lambda d_1 - m_1\right)^2 + \left(p_2 + \lambda d_2 - m_2\right)^2 = r^2.$$

C'est une équation de degré 2 en λ qui possède 2, 1 ou 0 solutions, selon que la droite et le cercle sont sécants, tangents ou gauches. Il reste à substituer dans d pour trouver x et y.

4.8.4 EQUATION DE LA TANGENTE A UN CERCLE

On considère un point T d'un cercle Ω de centre C. Alors le vecteur $\overrightarrow{CT}$ est ***perpendiculaire*** à la tangente au point T. L'équation de la tangent est alors donnée par la relation : $\vec{n} \bullet \overrightarrow{AP} = 0$, avec $\vec{n} = \overrightarrow{CT}$ et $A = T$.



Exemple

Trouver une équation cartésienne de la tangent au cercle Ω : $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$ au point $T(1 ; 5)$.

On commence par déterminer le centre et le rayon du cercle :

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 - 4 - 1 - 20 = 0$$
$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25 \;\Rightarrow\; C(-2;1) \text{ et } r = 5$$

Ensuite on calcule le vecteur $\overrightarrow{CT}$:

$$\overrightarrow{CT} = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

Comme $\overrightarrow{CT}$ est le vecteur normal à la tangente cherchée, on a :

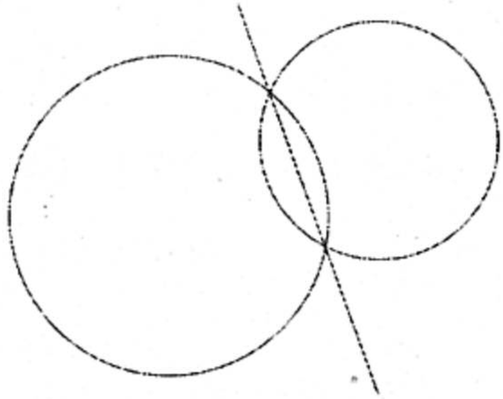
$$\overrightarrow{CT} \bullet \overrightarrow{TP} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}x-1\\y-5\end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - 3 + 4y - 20 = 0 \Leftrightarrow \boxed{3x + 4y - 23 = 0}$$

4.8.5 Intersection de deux cercles

Pour déterminer les éventuelles points d'intersection entre deux cercles Γ_1 et Γ_2, il faut soustraire les équations des deux cercles. On obtient alors une équation de droite que l'on appelle ***l'axe radial.*** L'intersection entre cet axe et un des deux cercles nous donne l'(les) éventuelle(s) intersection(s).



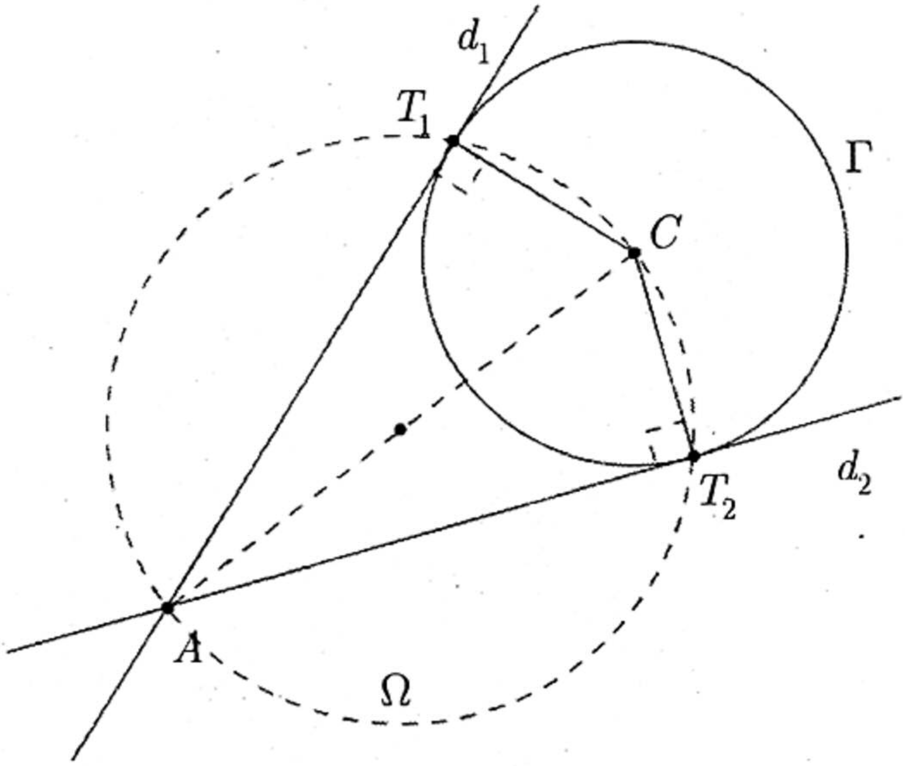
4.8.6 Position relative entre deux cercles

Pour déterminer la position relative entre deux cercles Γ_1 (de centre C_1 et de rayon r_1) et Γ_2 (de centre C_2 et de rayon r_2), on calcule les éventuelles intersections. Plusieurs situations sont possibles :

1) S'il n'y a pas d'intersection, les cercles ne se coupent pas. On calcule $\left\|\overrightarrow{C_1C_2}\right\|$ et on la compare aux rayons pour savoir si un cercle est contenu dans un autre cercle.
2) S'il y a une intersection, les cercles sont tangents. On calcule $\left\|\overrightarrow{C_1C_2}\right\|$ et on la compare aux rayons pour savoir si un cercle est contenu dans un autre cercle.
3) S'il y a deux intersections, les cercles se coupent.

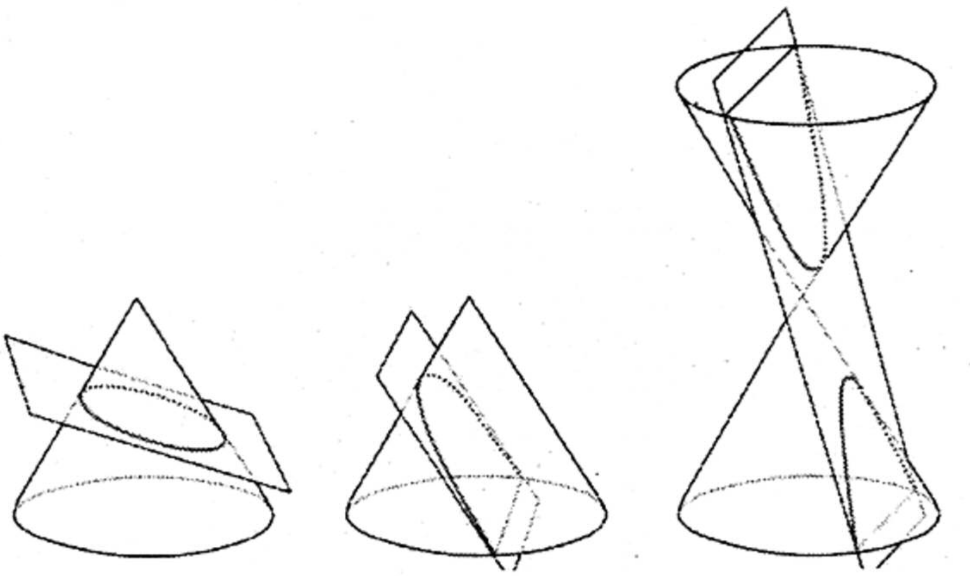
4.8.7 Droite tangente a un cercle passant par un point.

Pour déterminer les équations des droites d_1 et d_2 tangente au cercle Γ et passant par un point A donnée, il faut calculer les points de contact T_1 et T_2 qui sont les points d'intersection du cercle Γ avec un cercle Ω de diamètre AC.



4.9 Les coniques

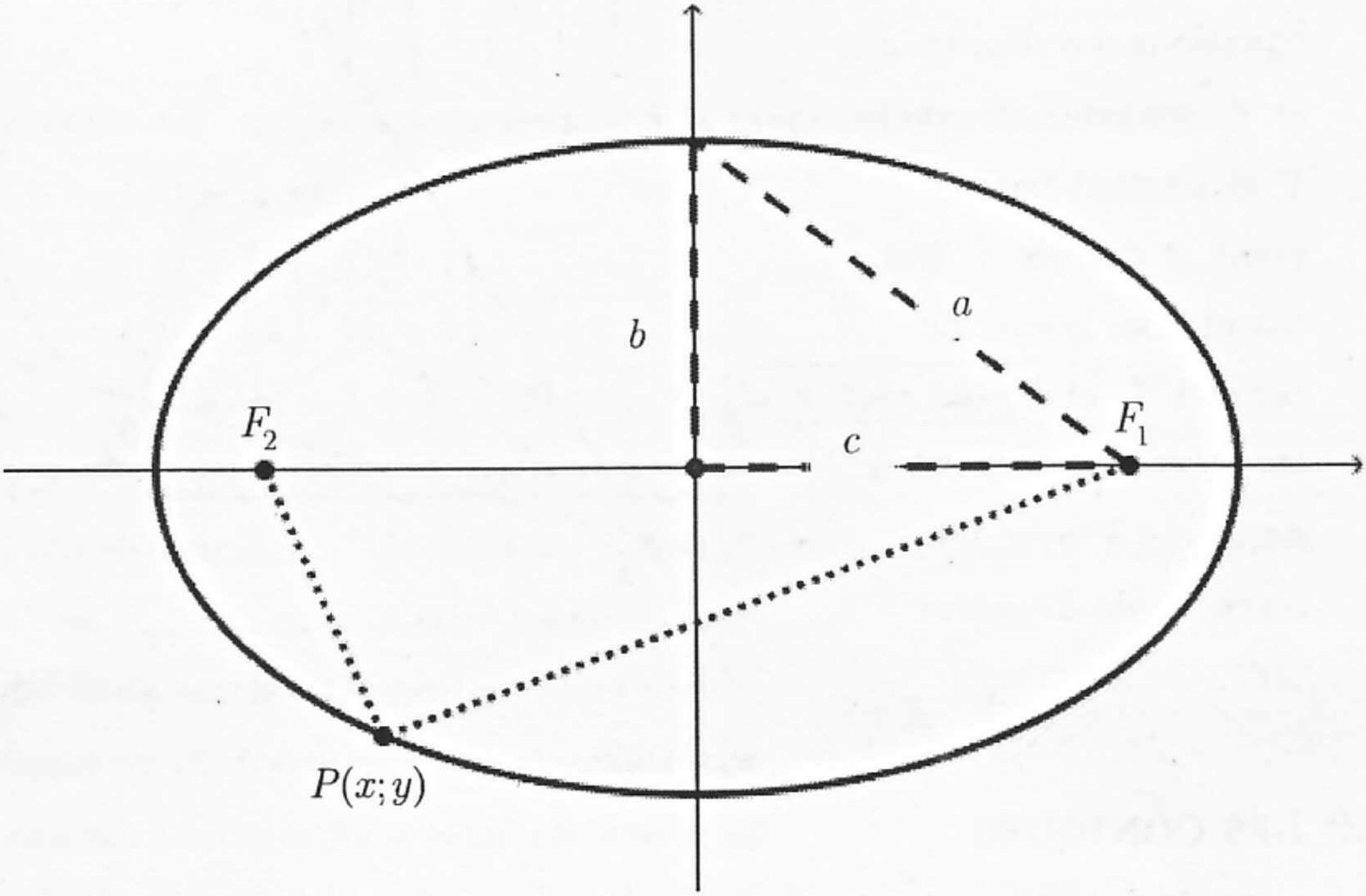
Les coniques sont des courbes planes obtenues par intersection d'un plan avec un cône. L'intersection du plan et du cône peut donner une courbe fermée (cercle, ellipse) une courbe ouverte (parabole) ou deux courbes ouvertes (hyperboles). Nous allons chercher les équations de ces courbes.



4.9.1 Ellipses

Une ellipse est une courbe plane formée des points dont ***la somme des distances à deux points fixes*** F_1 ***et*** F_2 ***(les foyers) est***

constante. Pour dessiner une ellipse, on doit donc choisir deux foyers et une constante.



Si les foyers de l'ellipse sont $F_1(-c;0)$ et $F_2(c;0)$ et la constante est $2a$, (avec $a > c > 0$.), alors l'équation cartésienne de l'ellipse est la suivante :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ avec } b^2 = a^2 - c^2}$$

En effet, un point $P(x;y)$ est sur l'ellipse si $dist(P;F_1) + dist(P;F_2) = 2a$.

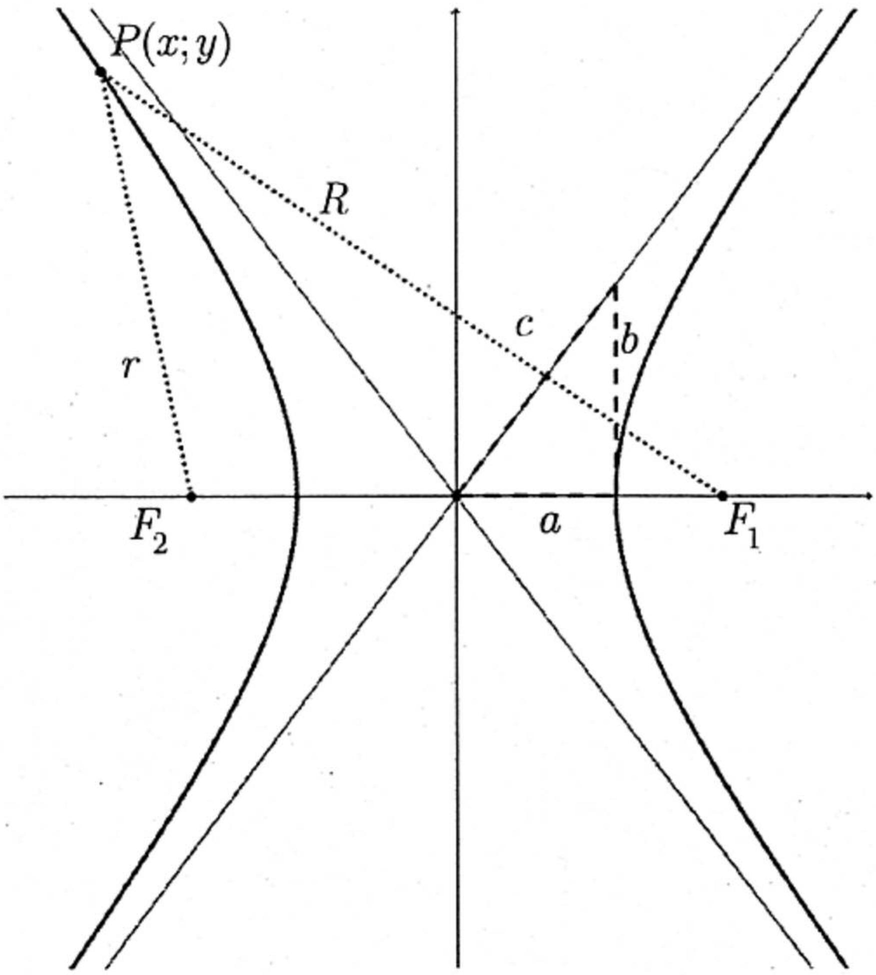
$$
\begin{aligned}
\left\|\overrightarrow{F_1P}\right\| + \left\|\overrightarrow{F_2P}\right\| &= 2a \\
\left\|\begin{pmatrix} x+c \\ y \end{pmatrix}\right\| + \left\|\begin{pmatrix} x-c \\ y \end{pmatrix}\right\| &= 2a \\
\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a \\
\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
(x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\
4xc - 4a^2 &= -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 &= a^2\left((x-c)^2 + y^2\right) \\
x^2c^2 + a^4 &= a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 \\
a^4 - a^2c^2 &= a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 \\
a^2\underbrace{\left(a^2 - c^2\right)}_{b^2} &= \underbrace{\left(a^2 - c^2\right)}_{b^2}x^2 + a^2y^2 \\
a^2b^2 &= b^2x^2 + a^2y^2 \\
1 &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}
\end{aligned}
$$

Remarques

- On retrouve l'intersection entre l'ellipse et l'abscisse en remplaçant $y = 0$. $\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = 1 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm a$
- On retrouve l'intersection entre l'ellipse et l'ordonnée en remplaçant $x = 0$. $\Rightarrow \frac{0^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = b^2 \Rightarrow y = \pm b$

4.9.2 HYPERBOLE

Une hyperbole est une courbe plane formée des points dont ***la différence des distances à deux points fixes*** F_1 ***et*** F_2 ***(les foyers) est une constante.*** Pour dessiner une hyperbole, on doit se donner les foyers et une constante.



La différence entre R et r donne toujours la constante $2a$. On observe que l'hyperbole est formée de deux morceaux dont la plus petite distance est justement $2a$.

Si les foyers de l'hyperbole sont $F_1(-c;0)$ et $F_2(c;0)$ et la constante est $2a$, alors l'équation cartésienne de l'hyperbole est la suivante :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ avec } b^2=c^2-a^2}$$

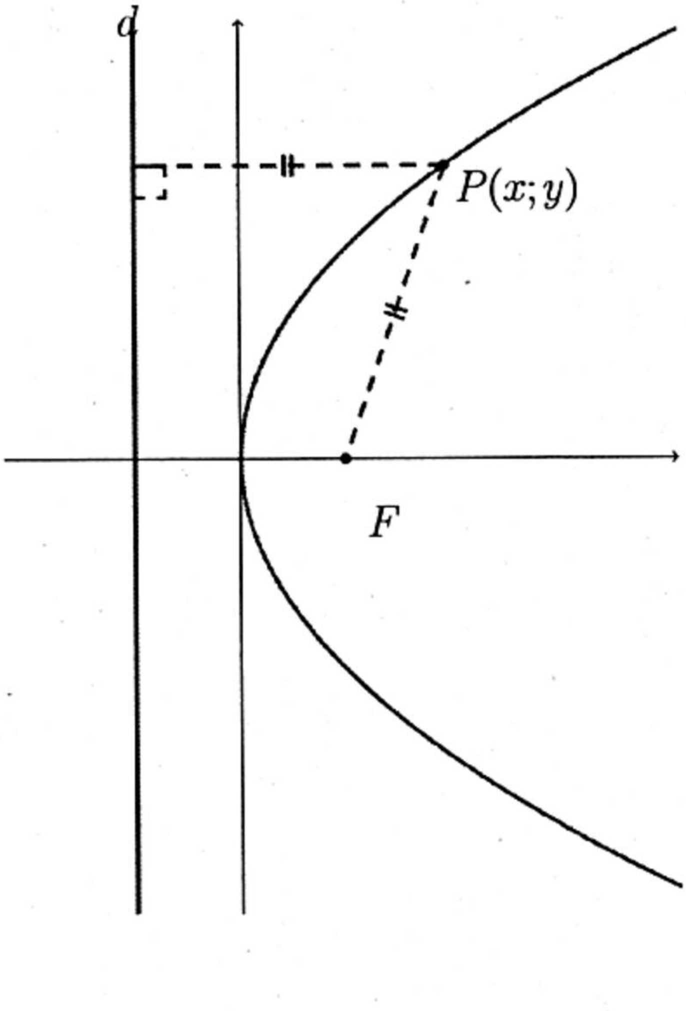
En effet, un point $P(x;y)$ de l'hyperbole satisfait la relation suivante : $dist(P;F_1)-dist(P;F_2)=\pm 2a$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\left\|\overrightarrow{F_1P}\right\|-\left\|\overrightarrow{F_2P}\right\| &= \pm 2a \\
\left\|\begin{pmatrix} x+c \\ y \end{pmatrix}\right\|-\left\|\begin{pmatrix} x-c \\ y \end{pmatrix}\right\| &= \pm 2a \\
\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2} &= \pm 2a \\
\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= \pm 2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(x+c)^2+y^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2 \\
4xc-4a^2 &= \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
x^2c^2-2a^2xc+a^4 &= a^2\left((x-c)^2+y^2\right) \\
x^2c^2 \quad -a^2x^2 &= a^2c^2-a^4+a^2y^2 \\
x^2\underbrace{\left(c^2-a^2\right)}_{b^2} &= \underbrace{\left(c^2-a^2\right)}_{b^2}a^2+a^2y^2 \\
x^2b^2 &= b^2a^2+a^2y^2 \\
-b^2a^2 &= -x^2b^2+a^2y^2 \\
1 &= \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}
\end{aligned}
$$

4.9.3 <u>Parabole</u>

Une parabole est une courbe plane formée des points situés à ***égale distance d'un point fixe*** F ***(le foyer) et d'une droite fixe*** d ***(la directrice).*** Lorsque le foyer et la directrice sont choisis il est possible de construire la parabole point par point. Si l'on choisit les axes de sorte que le foyer soit $F_1(p;0)$ et que la directrice soit donnée par $d : x = -p$, on trouve alors l'équation cartésienne de la parabole



$$\boxed{y^2 = 4px}$$

En effet les points $P(x,y)$ de la parabole satisfont la condition :

$$
\begin{aligned}
dist(P;F) &= dist(P;d) \\
\sqrt{(x-p)^2+y^2} &= \frac{|x+p|}{1} \qquad \Rightarrow (x-p)^2+y^2 = \left(|x+p|\right)^2 \\
x^2-2xp+p^2+y^2 &= x^2+2px+p^2 \qquad \Rightarrow y^2 = 4px
\end{aligned}
$$