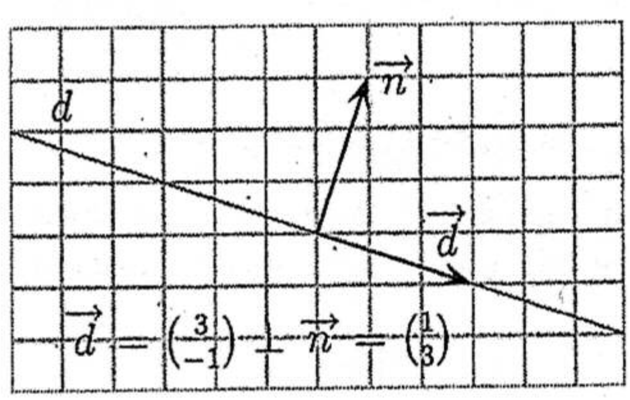
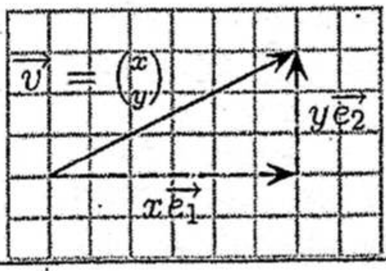
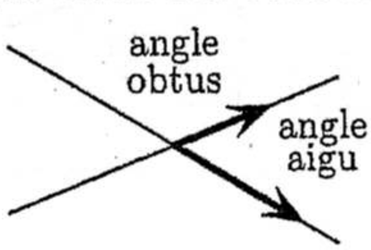
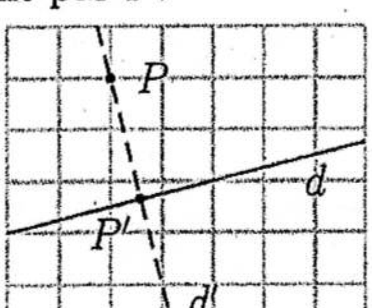
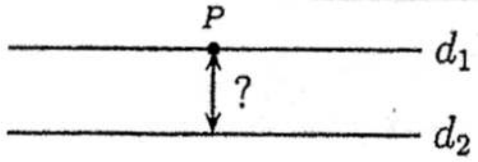
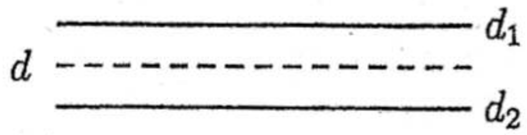
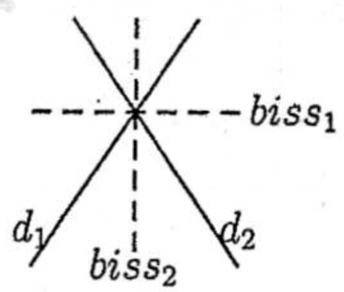
Géométrie vectorielle plane

Notions	Exemples
Equations paramétriques d'une droite Equations du type $\begin{cases} x = x_0 + \lambda d_1 \\ y = y_0 + \lambda d_2 \end{cases}$ où $\binom{d_1}{d_2}$ est un vecteur directeur* et $(x_0; y_0)$ est un point particulier de la droite. Un point est sur la droite si, et seulement si on peut lui associer une valeur de λ.	La droite d passant par le point $(1; -2)$ selon la direction du vecteur $\binom{-3}{5}$ admet les équations paramétriques $\begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = -2 + 5\lambda \end{cases}$ Le point $(-8; 13)$ est sur d car il correspond à $\lambda = 3$ mais le point $(10; -12)$ n'y est pas car aucune valeur de λ ne permet de trouver $x = 10$ et $y = -12$ simultanément.
Equation cartésienne d'une droite Equation du type $ax + by + c = 0$ où $\binom{a}{b}$ est un vecteur normal* et où c est un nombre déterminé par un point particulier de la droite. Un point est sur la droite si, et seulement si ses coordonnées x et y vérifient l'équation en question.	Une droite d passe par le point $A(1; -2)$ et admet le vecteur normal $\binom{3}{-4}$. Ce vecteur indique une équation cartésienne du type $3x - 4y + c = 0$ et, comme $A \in d$, on doit avoir $3 \cdot 1 - 4 \cdot (-2) + c = 0$, d'où $c = -11$. L'équation est donc $3x - 4y - 11 = 0$. $(5; 1) \in d$ car $3 \cdot 5 - 4 \cdot 1 - 11 = 0$ $(7; 3) \notin d$ car $3 \cdot 7 - 4 \cdot 3 - 11 = -2 \neq 0$.
Equation réduite d'une droite Equation du type $y = mx + h$ où m est la pente* et h est un nombre déterminé par un point particulier de la droite. Un point est sur la droite si, et seulement si ses coordonnées x et y vérifient l'équation en question.	La droite d qui passe par le point $A(3; -4)$ avec la pente $m = 2$ admet une équation réduite du type $y = 2x + h$ et, comme $A \in d$, on doit avoir $-4 = 2 \cdot 3 + h$, d'où $h = -10$. L'équation réduite est donc $y = 2x - 10$. $(6; 2) \in d$ car $2 \cdot 6 - 10 = 2$ $(7; 5) \notin d$ car $2 \cdot 7 - 10 = 4 \neq 5$.
vecteur directeur ($\leftrightsquigarrow$ éq. paramétriques*) *vecteur normal* ($\leftrightsquigarrow$ éq. cartésienne*) On peut passer d'un type de vecteur à l'autre en échangeant les composantes et en changeant le signe de l'une d'elles. Dans une base orthonormée, deux tels vecteurs sont perpendiculaires.	
pente d'une droite ($\leftrightsquigarrow$ équation réduite*) La pente d'une droite est la deuxième composante du vecteur directeur* dont la première composante vaut 1. En d'autres termes, il s'agit du nombre m tel que le vecteur $\binom{1}{m}$ dirige la droite.	Le vecteur $\binom{3}{-4}$ est proportionnel à $\binom{1}{-4/3}$, il dirige les droites dont la pente vaut $-\frac{4}{3}$. Une équation réduite du type $y = -3x + h$ (avec h quelconque) indique une droite de pente -3 et donc de vecteur directeur $\binom{1}{-3}$.

Notions	Exemples
Norme (longueur) d'un vecteur  $\lVert\overrightarrow{v}\rVert = \sqrt{x^2+y^2}$	La longueur du vecteur $\binom{-3}{7}$ est $\left\lVert\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}\right\rVert = \sqrt{(-3)^2+7^2} = \sqrt{58}$
Distance entre deux points La distance entre deux points est donnée par la norme* du vecteur qui les relie : $\text{dist}(A,B) = \lVert\overrightarrow{AB}\rVert$	La distance entre $A(5;-3)$ et $B(2;8)$ correspond à la longueur du vecteur $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \binom{2}{8} - \binom{5}{-3} = \binom{-3}{11}$ On a donc $\text{dist}(A,B) = \left\lVert\binom{-3}{11}\right\rVert = \sqrt{130}$
Produit scalaire de deux vecteurs $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} = x_1x_2+y_1y_2$	$\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix} = 10+(-21) = -11$ $\left\lVert\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}\right\rVert^2 = \begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix} = 25+9 = 34$
Angle entre deux vecteurs L'angle entre deux vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ est $\begin{cases}\text{aigu} & \text{si } \overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2} > 0\\ \text{droit} & \text{si } \overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2} = 0\\ \text{obtus} & \text{si } \overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2} < 0\end{cases}$ Plus précisément, on a $\angle(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}) = \cos^{-1}\left(\dfrac{\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}}{\lVert\overrightarrow{v_1}\rVert\cdot\lVert\overrightarrow{v_2}\rVert}\right)$	Les vecteurs $\begin{pmatrix}3\\-8\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}$ sont orthogonaux (=perpendiculaires) car leur produit scalaire est nul. L'angle entre $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}$ est $\cos^{-1}\left(\dfrac{-11}{\sqrt{34}\sqrt{53}}\right) \cong 105,02°$
Angle aigu entre deux droites On calcule l'angle entre des vecteurs directeurs (ou entre des vecteurs normaux)  On corrige ensuite si nécessaire pour trouver l'angle aigu. On peut également considérer la valeur absolue du produit scalaire dans la formule permettant de trouver l'angle entre les vecteurs.	On cherche le plus petit angle sous lequel se coupent les deux droites suivantes $d_1 : 5x - 3y + 5 = 0$ $d_2 : 2x + 7y - 3 = 0$ L'angle entre les vecteurs normaux $\binom{5}{-3}$ et $\binom{2}{7}$ vaut environ $105,02°$ (voir ci-dessus). Cet angle est obtus et l'angle aigu entre les deux droites est $\sim 180° - 105,02° = 74,98°$. Variante : l'angle aigu est $\cos^{-1}\left(\dfrac{\lvert -11\rvert}{\sqrt{34}\sqrt{53}}\right) \cong 74,98°$

Notions	Exemples
Médiatrice La médiatrice d'un segment AB est l'ensemble des points $P(x;y)$ qui vérifient $\text{dist}(P,A)=\text{dist}(P,B)$, ou ce qui revient au même, $\lVert\overrightarrow{AP}\rVert^2=\lVert\overrightarrow{BP}\rVert^2$. Une équation cartésienne est obtenue en développant et en simplifiant cette dernière relation.	Cherchons la médiatrice du segment reliant $A(-2;2)$ et $B(4;-6)$. $\lVert\overrightarrow{AP}\rVert^2=\lVert\overrightarrow{BP}\rVert^2 \iff \lVert\binom{x+2}{y-2}\rVert^2=\lVert\binom{x-4}{y+6}\rVert^2$ $\iff (x+2)^2+(y-2)^2=(x-4)^2+(y+6)^2$ $\iff (x^2+4x+4)+(y^2-4y+4)$ $\quad = (x^2-8x+16)+(y^2+12y+36)$ $\iff 4x+4-4y+4=-8x+16+12y+36$ $\iff 12x-16y-44=0$ $\iff 3x-4y-11=0$
La médiatrice d'un segment AB est la droite qui passe par le milieu du segment AB et qui admet le vecteur normal $\overrightarrow{AB}$. Ces informations permettent de trouver facilement une équation cartésienne*.	La médiatrice admet le vecteur normal $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\binom{6}{-8} \mathbin{/\!/} \binom{3}{-4}$ et donc une équation du type $3x-4y+c=0$. Cette droite passe par le milieu du segment AB : $M=\left(\frac{-2+4}{2};\frac{2+(-6)}{2}\right)=(1;-2)$, ce qui permet de trouver $c=-11$.
La médiatrice d'un segment AB est l'ensemble des points $P(x;y)$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont orthogonaux (M désigne le milieu du segment AB). On trouve une équation cartésienne en développant la relation $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MP}=0$.	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MP}=0 \iff \binom{6}{-8}\cdot\binom{x-1}{y+2}=0$ $\iff 6(x-1)-8(y+2)=0$ $\iff 6x-8y-22=0$ $\iff 3x-4y-11=0$
Projection orthogonale La projection orthogonale d'un point P sur une droite d est le point d'intersection (noté P') entre d et la droite perpendiculaire passant par P. 	Une droite perpendiculaire à $d: 2x+3y-7=0$ admet une équation $3x-2y+c=0$ et si cette droite passe par le point $P(-2;-5)$, on trouve $c=-4$. La projection P' de P sur d est l'intersection des droites $\begin{cases} d: 2x+3y-7=0 \\ d': 3x-2y-4=0 \end{cases}$ On a $2d+3d': 13x-26=0$, donc $x=2$, et $3d-2d': 13y-13=0$, donc $y=1$. La projection de P sur d est donc $P'(2;1)$.
Distance entre un point et une droite La plus courte distance entre un point $P(x_0;y_0)$ et une droite $d: ax+by+c=0$ est donnée par $\text{dist}(P,d)=\frac{\lvert ax_0+by_0+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$	La distance séparant le point $P(-3;2)$ de la droite $d: 4x-5y+3=0$ est $\text{dist}(P,d)=\frac{\lvert 4\cdot(-3)-5\cdot 2+3\rvert}{\sqrt{4^2+(-5)^2}}=\frac{19}{\sqrt{41}}$

Notions	Exemples
Distance entre deux droites parallèles  Pour calculer la plus courte distance entre deux droites parallèles d_1 et d_2, on choisit un point P sur d_1 et on calcule la distance* qui le sépare de d_2. .... On choisit une droite perpendiculaire et on calcule ses points d'intersection I_1 et I_2 avec les droites d_1 et d_2. On a alors $\text{dist}(d_1, d_2) = \lVert\overrightarrow{I_1I_2}\rVert$.	Les droites $d_1 : x - 2y + 1 = 0$ et $d_2 : 2x - 4y + 7 = 0$ sont parallèles car leurs vecteurs normaux sont proportionnels et le point $P(-1; 0)$ (par exemple) est sur d_1 mais pas sur d_2. Plus précisément, on a $\text{dist}(d_1, d_2) = \text{dist}(P, d_2) = \frac{5}{\sqrt{20}} = \sqrt{1.25}$ .... La droite $2x + y = 0$ (par exemple) est perpendiculaire à d_1 et d_2. Les points d'intersection avec chacune de ces droites sont $I_1(-0.2; 0.4)$ et $I_2(-0.7; 1.4)$. On a donc $\text{dist}(d_1, d_2) = \lVert\overrightarrow{I_1I_2}\rVert = \lVert\binom{-0.5}{1}\rVert = \sqrt{1.25}$
Milieu de deux droites parallèles  Pour déterminer la droite qui se trouve au milieu de deux droites parallèles d_1 et d_2, on développe et on simplifie la relation $\text{dist}(P, d_1) = \text{dist}(P, d_2)$. Une des deux équations finales sera à exclure. .... Une équation pour d est donnée par la somme des équations cartésiennes de d_1 et d_2, pour autant que ces dernières indiquent le même vecteur normal.	Reprenons les droites parallèles ci-dessus. $\text{dist}(P, d_1) = \text{dist}(P, d_2)$ $\Longleftrightarrow \frac{\lvert x - 2y + 1\rvert}{\sqrt{5}} = \frac{\lvert 2x - 4y + 7\rvert}{\sqrt{20}}$ $\Longleftrightarrow 2 \cdot \lvert x - 2y + 1\rvert = \lvert 2x - 4y + 7\rvert$ $\Longleftrightarrow 2(x - 2y + 1) = \pm(2x - 4y + 7)$ L'équation "+" est exclue car elle n'admet aucune solution, alors que l'équation "−" conduit à la relation $4x - 8y + 9 = 0$. .... $d_1 : \; 2x - 4y + 2 = 0$ $d_2 : \; 2x - 4y + 7 = 0$ somme $d : \; 4x - 8y + 9 = 0$
Bissectrices  Les bissectrices de deux droites sécantes d_1 et d_2 sont constituées des points $P(x; y)$ qui vérifient $\text{dist}(P, d_1) = \text{dist}(P, d_2)$. Des équations cartésiennes sont obtenues en développant cette relation.	Cherchons les bissectrices des droites $d_1 : x - 2y + 1 = 0$, $d_2 : 2x + 11y - 3 = 0$. $\text{dist}(P, d_1) = \text{dist}(P, d_2)$ $\Longleftrightarrow \frac{\lvert x - 2y + 1\rvert}{\sqrt{5}} = \frac{\lvert 2x + 11y - 3\rvert}{\sqrt{125}}$ $\Longleftrightarrow 5 \cdot \lvert x - 2y + 1\rvert = \lvert 2x + 11y - 3\rvert$ $\Longleftrightarrow 5x - 10y + 5 = \pm(2x + 11y - 3)$ $\Longleftrightarrow 3x - 21y + 8 = 0$ ou $7x + y + 2 = 0$ On peut contrôler que les deux droites obtenues sont perpendiculaires.

▷ Equations d'une droite

On considère la droite qui passe par un point $A(x_A; y_A)$ et qui est dirigée par un vecteur non nul $\vec{d} = \binom{d_1}{d_2}$ (prendre $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$ si la droite est définie par deux points distincts A et B). Les points $P(x; y)$ qui sont sur cette droite peuvent être définis par plusieurs types d'équations (une équation est un "critère d'appartenance" à la droite en question).

équations paramétriques $\xrightarrow[\text{élimination du paramètre}]{}$	équation cartésienne $\xrightarrow[\text{si } b \neq 0]{}$	équation réduite
$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \vec{d}$ $\begin{cases} x = x_A + \lambda d_1 \\ y = y_A + \lambda d_2 \end{cases}$	$\det(\vec{d}; \overrightarrow{AP}) = 0$ ou $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$ $ax + by + c = 0$	$y = mx + h$
$\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$	$\vec{d} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \perp \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$
pente : $\dfrac{d_2}{d_1}$ (si $d_1 \neq 0$)	pente : $-\dfrac{a}{b}$ (si $b \neq 0$)	pente : m

La *position relative de deux droites* se lit sur des équations (cartésiennes ou réduites) *comparables*, c'est-à-dire qui présentent le même nombre de x ou de y. Deux droites sont

- *confondues* lorsqu'elles admettent des équations comparables identiques,
- *strictement parallèles* si elles admettent des équations comparables différentes qui présentent cependant la même partie directionnelle (pente ou vecteur normal),
- *sécantes* lorsqu'elles admettent des équations comparables qui ne présentent pas la même partie directionnelle (pente ou vecteur normal).

Deux droites sont perpendiculaires si, et seulement si le produit de leurs pentes vaut -1.

▷ Produit scalaire et déterminant

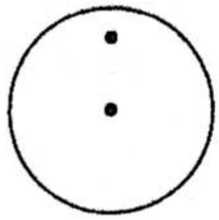
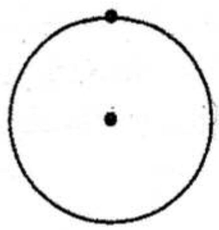
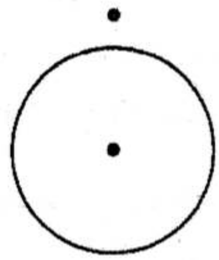
Pour deux vecteurs non nuls $\vec{v_1} = \binom{x_1}{y_1}$ et $\vec{v_2} = \binom{x_2}{y_2}$ (exprimés dans une base orthonormée) formant un angle $\alpha = \angle(\vec{v_1}; \vec{v_2})$, on peut calculer

produit scalaire $\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}$	$x_1x_2 + y_1y_2$	$\lVert\vec{v_1}\rVert \cdot \lVert\vec{v_2}\rVert \cdot \cos\alpha$	nul ssi $\vec{v_1} \perp \vec{v_2}$
déterminant $\det(\vec{v_1}; \vec{v_2})$	$x_1y_2 - x_2y_1$	$\lVert\vec{v_1}\rVert \cdot \lVert\vec{v_2}\rVert \cdot \sin\alpha$	nul ssi $\vec{v_1} \,/\!/\, \vec{v_2}$

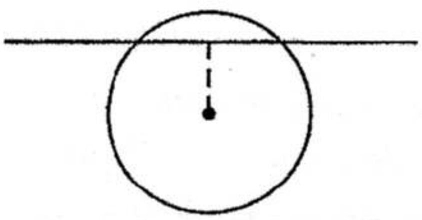
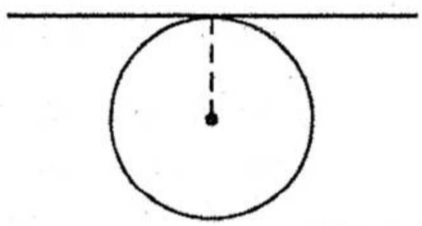
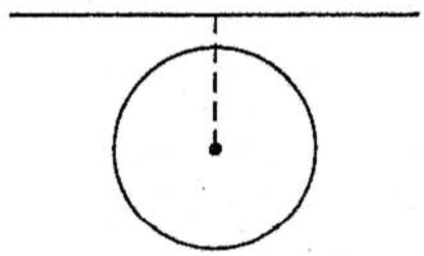
Le produit scalaire détecte l'*orthogonalité* entre deux vecteurs non nuls ("$\vec{v_1} \perp \vec{v_2}$") alors que le déterminant détecte la *colinéarité* ("$\vec{v_1} \,/\!/\, \vec{v_2}$"). La valeur absolue du déterminant donne l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs considérés.

▷ Position relative d'un cercle $\mathcal{C}(P_0, r)$

... avec un point P

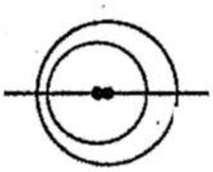
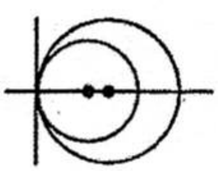
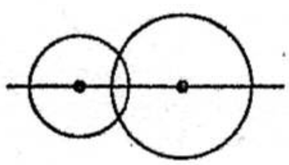
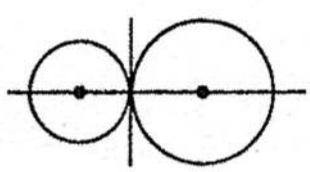
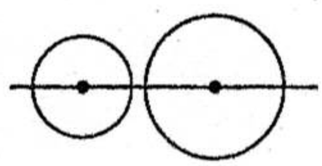
		
point interne	point sur le cercle	point externe
$\text{dist}(P_0; P) < r$	$\text{dist}(P_0; P) = r$	$\text{dist}(P_0; P) > r$

... avec une droite d

$\text{dist}(P_0; d) < r$	$\text{dist}(P_0; d) = r$	$\text{dist}(P_0; d) > r$
		
droite sécante 2 pts d'intersection	droite tangente 1 pt d'intersection	aucun pt d'intersection

... avec un autre cercle $\mathcal{C}'(P_0', r')$

On compare la distance $\delta = \text{dist}(P_0; P_0')$ avec $r + r'$ et $|r - r'|$:

$\delta < \|r - r'\|$	$\delta = \|r - r'\|$		$\delta = r + r'$	$r + r' < \delta$
				
$\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \emptyset$	1 pt d'int.	2 pts d'int.	1 pt d'int.	$\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \emptyset$