Chapitre 12

Les géométries plane et spatiale

Ce cours de géométrie est construit de telle façon que tout ce qui concerne la géométrie plane se situe sur les pages de gauche et tout ce qui concerne la géométrie spatiale sur les pages de droite.

géométrie plane $2D$	géométrie spatiale $3D$

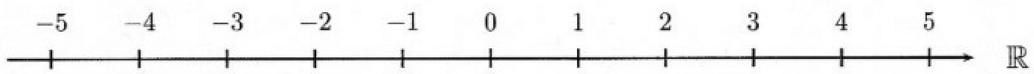
Ainsi le lecteur pourra bien mieux

1. avoir un aperçu de ce qui se passe en 3 dimensions lors de l'apprentissage de la géométrie plane ;
2. apprendre la géométrie spatiale en ayant sous les yeux la géométrie plane en rappel ;
3. distinguer les différences entre la géométrie à 2 dimensions et celle à 3 dimensions ;
4. repérer les analogies entre la géométrie à 2 dimensions et celle à 3 dimensions.

12.1 Plan

Droite réelle

On représente les nombres réels par une droite, appelée la *droite réelle*.



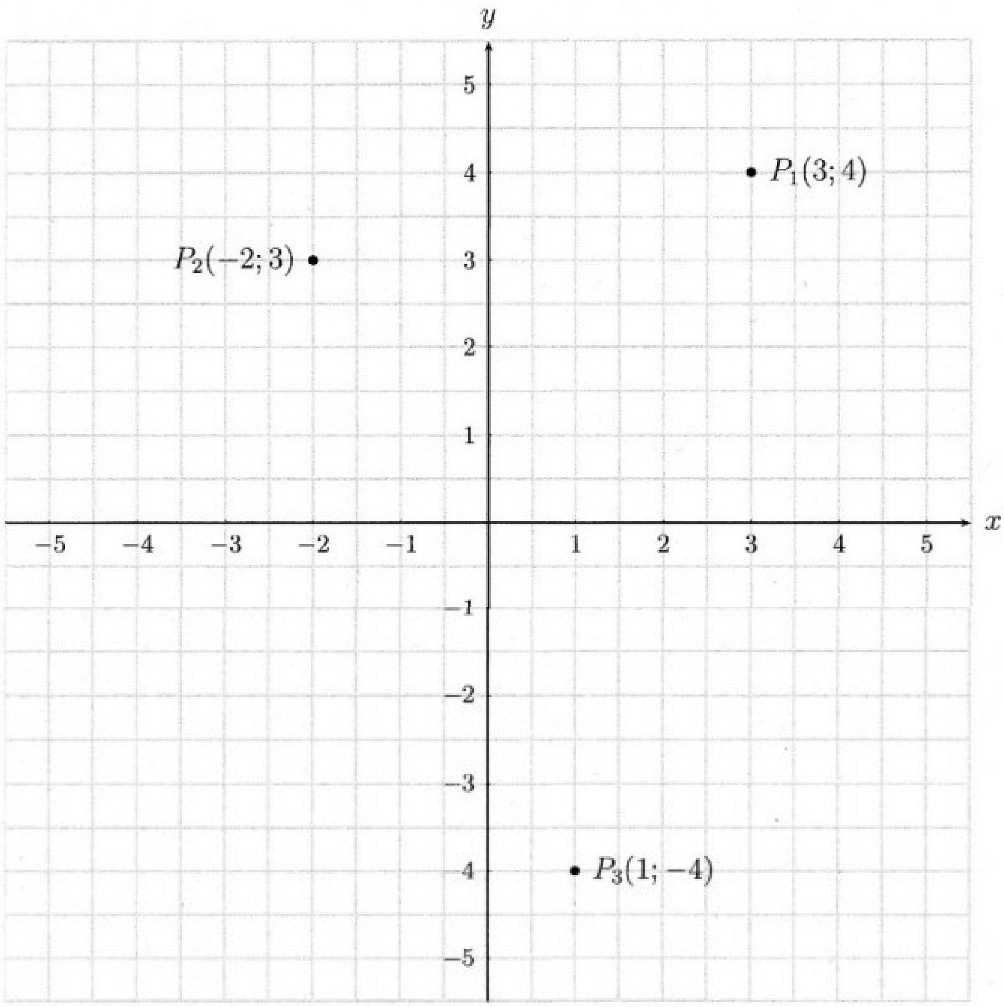
Plan

Lorsqu'on veut représenter des objets mathématiques composés de deux nombres et que l'ordre a de l'importance, on utilise des *points* dans le *plan*. Plutôt que de mettre $\mathbb{R}$ à la fin de chaque axe, les mathématiciens préfèrent noter x et y.

Le plan est constitué de points à 2 coordonnées $P(x;y)$. On dit que x est l'*abscisse* du point P et que y est l'*ordonnée* du point P.

De plus, la coutume veut que les axes soient perpendiculaires afin de former ce qu'on appelle un *repère orthogonal*.

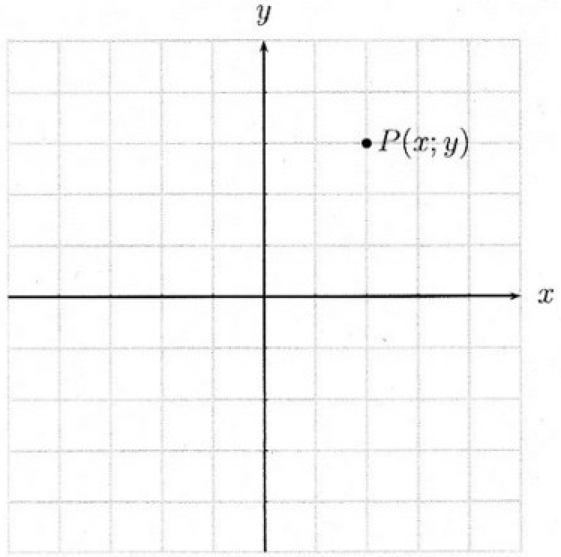
Convention Le plan se note $\mathbb{R}^2$ (car de dimension 2).

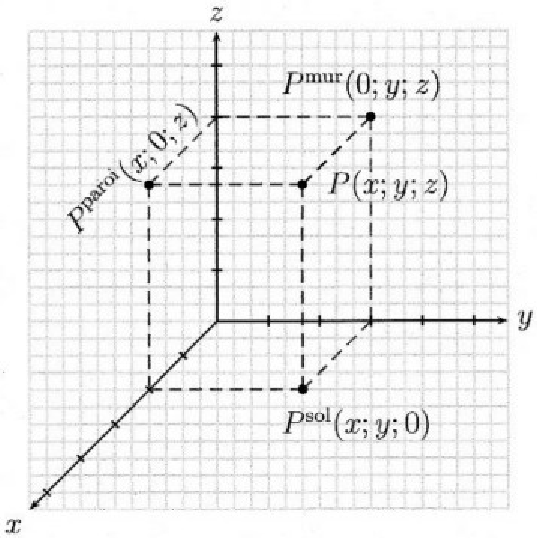


12.2 Espace

Pour passer du plan (à deux dimensions) à l'espace, on ajoute une troisième dimension. Techniquement, on pose le plan par terre et on ajoute une droite réelle verticalement afin de former un *repère orthogonal*.

Malheureusement, le support sur lequel on écrit est bidimensionnel. Afin que l'espace puisse être représenté sur une feuille, on met l'axe des x en perspective.





L'espace est constitué de points à 3 coordonnées $P(x;y;z)$. On dit que x est l'*abscisse* du point P, que y est l'*ordonnée* du point P et que z est la *cote* du point P.

Convention L'espace se note $\mathbb{R}^3$ (car de dimension 3).

Lorsqu'on dessine un point dans l'espace, on est obligé, pour le situer, de dessiner au moins une de ses trois *projections* sur le sol, la paroi ou le mur.

Le sol est l'ensemble

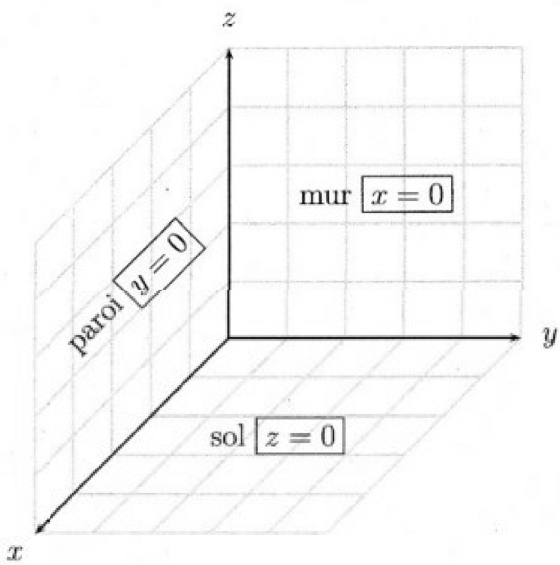
$$\{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$$

La paroi est l'ensemble

$$\{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\}$$

Le mur est l'ensemble

$$\{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$$



12.3 Vecteurs dans le plan

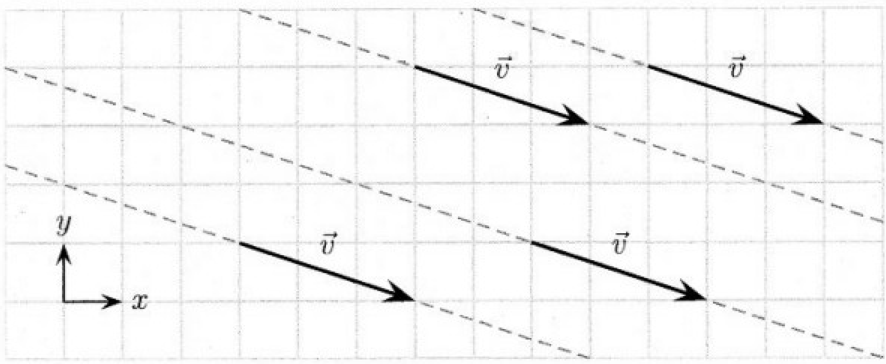
Intuitivement, en mathématiques, un vecteur est un objet utilisé dans le plan pour représenter un déplacement, un mouvement[1].

Définition

Un *vecteur* est un objet mathématique qui a trois caractéristiques. Ce sont les caractéristiques d'un déplacement.

1. Une *direction*.
2. Un *sens*.
3. Une *longueur*.

On représente un vecteur par une flèche. Voici un exemple de vecteur dans le plan.



La direction est donnée par une droite (ce n'est pas la position de la droite qui compte mais son orientation !), le sens est donné par une flèche (chaque direction a deux sens possibles) et la longueur du vecteur est donnée par la longueur de la flèche.

Tant que les trois caractéristiques (direction, sens, longueur) sont exactement les mêmes, le vecteur est le même. Peu importe là où il est représenté[2].

Notation Un vecteur est symbolisé par une petite flèche. Ici : $\vec{v}$.

Composantes d'un vecteur dans le plan

Dans le plan, un vecteur a *deux composantes*, une pour chaque axe du repère orthogonal ci-dessus. La *première composante* indique le déplacement horizontal (nombre positif pour un déplacement vers la droite et négatif pour la gauche) et la *deuxième composante* indique le déplacement vertical (nombre positif pour un déplacement vers le haut et négatif vers le bas).

Dans l'exemple ci-dessus, le vecteur représenté est $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

---

1. En physique, les vecteurs permettent de représenter les vitesses, les forces et les accélérations.
2. En physique, on dit que la force est la même, mais que les *points d'application* sont différents.

12.4 Vecteurs dans l'espace

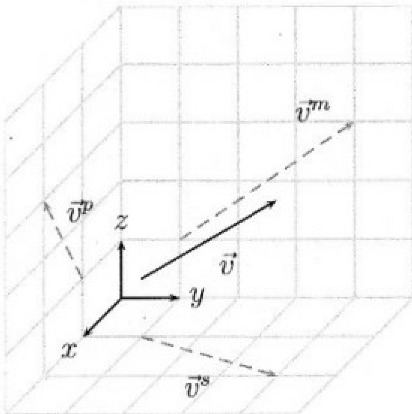
Intuitivement, en mathématiques, un vecteur est un objet utilisé dans l'espace pour représenter un déplacement, un mouvement [3].

Définition

Un *vecteur* est un objet mathématique qui a trois caractéristiques. Ce sont les caractéristiques d'un déplacement.

1. Une *direction*.
2. Un *sens*.
3. Une *longueur*.

On représente un vecteur par une flèche. Voici un exemple de vecteur dans l'espace (on voit ses projections sur le sol, la paroi et le mur).



La direction est donnée par une droite (ce n'est pas la position de la droite qui compte mais son orientation !), le sens est donné par une flèche (chaque direction a deux sens possibles) et la longueur du vecteur est donnée par la longueur de la flèche.

Tant que les trois caractéristiques (direction, sens, longueur) sont exactement les mêmes, le vecteur est le même. Peu importe là où il est représenté [4].

Notation Un vecteur est symbolisé par une petite flèche. Ici : $\vec{v}$.

Composantes d'un vecteur dans l'espace

Dans l'espace, un vecteur a *trois composantes*, une pour chaque axe du repère orthogonal ci-dessus. La *première composante* indique le déplacement avant-arrière (nombre positif pour un déplacement contre le lecteur et négatif pour s'éloigner du lecteur), la *deuxième composante* indique le déplacement latéral (nombre positif pour un déplacement vers la droite et négatif vers la gauche) et la *troisième composante* indique le déplacement vertical (nombre positif pour un déplacement vers le haut et négatif vers le bas).

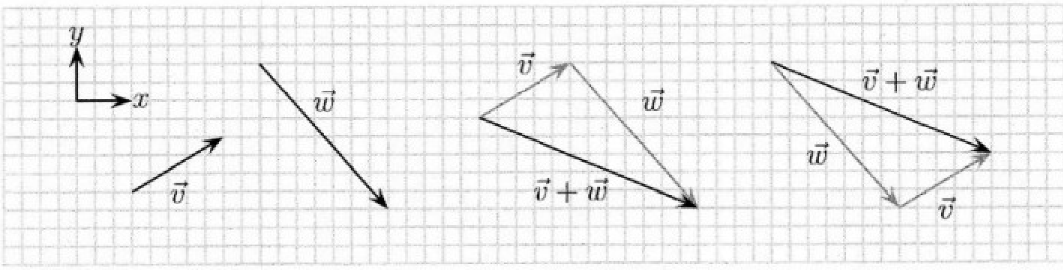
Dans l'exemple ci-dessus, le vecteur représenté est $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. En physique, les vecteurs permettent de représenter les vitesses, les forces et les accélérations.
4. En physique, on dit que la force est la même, mais que les *points d'application* sont différents.

12.5 Opérations sur les vecteurs dans le plan

Il y a principalement deux opérations possibles sur les vecteurs.

1. ADDITION DE DEUX VECTEURS.
   Intuitivement, cela consiste à faire un déplacement après un autre.



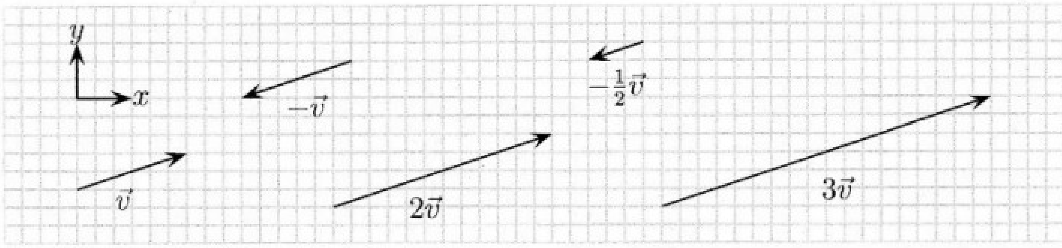
   Du point du vue des composantes, on a la règle évidente suivante.

$$\text{Si } \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \text{ alors } \vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}$$

   De plus, on peut additionner deux vecteurs dans n'importe quel ordre :

$$\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$$

2. MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN NOMBRE RÉEL.
   Intuitivement, cela revient à modifier la longueur ou le sens (si le nombre est négatif) d'un déplacement.



   Du point du vue des composantes, on a la règle évidente suivante.

$$\text{Si } \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ alors } \lambda\vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix}$$

Vecteurs parallèles ou colinéaires

Tout multiple d'un vecteur $\vec{d}$ par un nombre quelconque est *parallèle* ou *colinéaire* à $\vec{d}$. Lorsqu'on cherche des vecteurs parallèles, il est inutile d'utiliser un vecteur dont les composantes peuvent être *simplifiées*.

Par exemple, les vecteurs suivants sont parallèles.

$$\vec{d_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{d_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\vec{d_1} \qquad \vec{d_3} = \begin{pmatrix} 5\sqrt{2} \\ -10\sqrt{2} \end{pmatrix} = 5\sqrt{2}\,\vec{d_1}$$

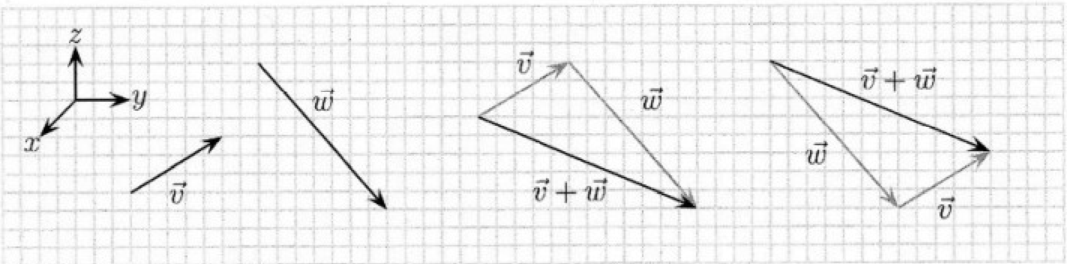
Notation $\vec{d_1} \parallel \vec{d_2}$, $\vec{d_2} \parallel \vec{d_3}$ et $\vec{d_1} \parallel \vec{d_3}$.

Ainsi, si l'on veut décrire une droite ayant ce vecteur comme vecteur directeur, on peut prendre $\vec{d_1}$ ou $\vec{d_2}$ (selon notre envie). Par contre, il n'est pas recommandé d'utiliser $\vec{d_3}$ (pourquoi compliquer quand on peut faire simple).

12.6 Opérations sur les vecteurs dans l'espace

Il y a principalement deux opérations possibles sur les vecteurs.

1. ADDITION DE DEUX VECTEURS.
   Intuitivement, cela consiste à faire un déplacement après un autre.



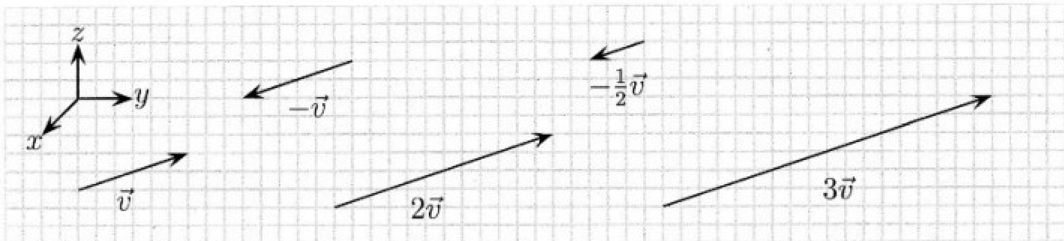
   Du point du vue des composantes, on a la règle évidente suivante.

$$\text{Si } \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \text{ alors } \vec{v}+\vec{w} = \begin{pmatrix} v_1+w_1 \\ v_2+w_2 \\ v_3+w_3 \end{pmatrix}$$

   De plus, on peut additionner deux vecteurs dans n'importe quel ordre :

$$\vec{v}+\vec{w} = \vec{w}+\vec{v}$$

2. MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN NOMBRE RÉEL.
   Intuitivement, cela revient à modifier la longueur ou le sens (si le nombre est négatif) d'un déplacement.



   Du point du vue des composantes, on a la règle évidente suivante.

$$\text{Si } \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ alors } \lambda\vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \lambda v_3 \end{pmatrix}$$

Vecteurs parallèles ou colinéaires

Tout multiple d'un vecteur $\vec{d}$ par un nombre quelconque est *parallèle* ou *colinéaire* à $\vec{d}$. Lorsqu'on cherche des vecteurs parallèles, il est inutile d'utiliser un vecteur dont les composantes peuvent être *simplifiées*.

Par exemple, les vecteurs suivants sont parallèles.

$$\vec{d_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{d_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = -\vec{d_1} \qquad \vec{d_3} = \begin{pmatrix} 5\sqrt{2} \\ -10\sqrt{2} \\ 15\sqrt{2} \end{pmatrix} = 5\sqrt{2}\,\vec{d_1}$$

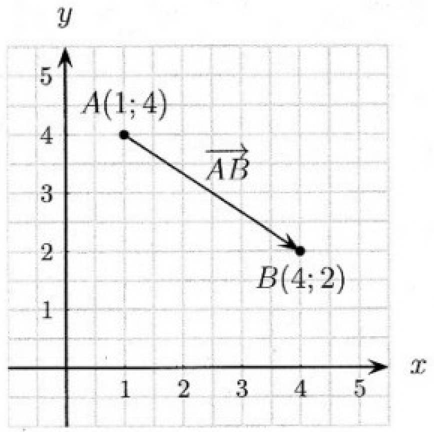
Notation $\vec{d_1} \parallel \vec{d_2}$, $\vec{d_2} \parallel \vec{d_3}$ et $\vec{d_1} \parallel \vec{d_3}$.

Ainsi, si l'on veut décrire une droite ayant ce vecteur comme vecteur directeur, on peut prendre $\vec{d_1}$ ou $\vec{d_2}$ (selon notre envie). Par contre, il n'est pas recommandé d'utiliser $\vec{d_3}$ (pourquoi compliquer quand on peut faire simple).

12.7 Vecteurs et points dans le plan

Dans le plan, pour indiquer un déplacement d'un point A à un point B, on utilise un vecteur appelé $\overrightarrow{AB}$. Ce vecteur a deux *composantes*, la première indique le déplacement horizontal (nombre positif pour un déplacement vers la droite et négatif vers la gauche) et la deuxième indique le déplacement vertical (nombre positif pour un déplacement vers le haut et négatif vers le bas).

Dans l'exemple ci-contre, les points sont $A(1;4)$ et $B(4;2)$. La première composante du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est ainsi 3 et la deuxième -2.



Notation

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

A nouveau, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ peut être placé n'importe où ! Dans ce contexte, cela n'a aucune importance.

Relation entre un vecteur et un point

L'*origine du plan* est un point appelé $O(0;0)$. Si P est un point quelconque du plan, alors on a l'équivalence.

$$\boxed{P = P(x;y) \iff \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

Règle de Chasles

Considérons A, B et C trois points dans le plan. On a les formules évidentes suivantes.

1. Si l'on se déplace de A à B, puis de B à C, alors cela revient au même que d'aller directement de A à C. Par conséquent
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$
2. Les déplacements de A à B et de B à A ont la même direction et la même longueur, mais ils sont de sens opposés.
$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$
3. Ces deux formules montrent que
$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}} \quad \textit{Règle de Chasles}$$
En effet, on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

12.8 Vecteurs et points dans l'espace

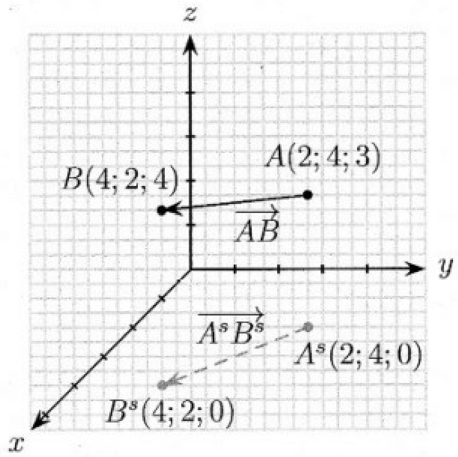
Dans l'espace, pour indiquer un déplacement d'un point A à un point B, on utilise un vecteur appelé $\overrightarrow{AB}$. Ce vecteur a trois *composantes*, la première indique le déplacement avant-arrière (nombre positif pour un déplacement contre le lecteur et négatif pour s'éloigner du lecteur), la deuxième indique le déplacement latéral (nombre positif pour un déplacement vers la droite et négatif vers la gauche) et la troisième indique le déplacement vertical (nombre positif pour un déplacement vers le haut et négatif vers le bas).

Dans l'exemple ci-contre, les points sont $A(2;4;3)$ et $B(4;2;4)$. La première composante du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est ainsi 2, la deuxième -2 et la troisième 1.

Notation

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{A^sB^s} = \overrightarrow{AB}^s = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A nouveau, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ peut être placé n'importe où ! Dans ce contexte, cela n'a aucune importance.



Relation entre un vecteur et un point

L'*origine de l'espace* est un point appelé $O(0;0;0)$. Si P est un point quelconque de l'espace, alors on a l'équivalence.

$$\boxed{P = P(x;y;z) \iff \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$$

Règle de Chasles

Considérons A, B et C trois points dans l'espace. On a les formules évidentes suivantes.

1. Si l'on se déplace de A à B, puis de B à C, alors cela revient au même que d'aller directement de A à C. Par conséquent

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

2. Les déplacements de A à B et de B à A ont la même direction et la même longueur, mais ils sont de sens opposés.

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$

3. Ces deux formules montrent que

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}} \quad \textit{Règle de Chasles}$$

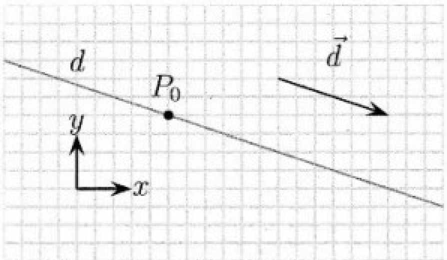
En effet, on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

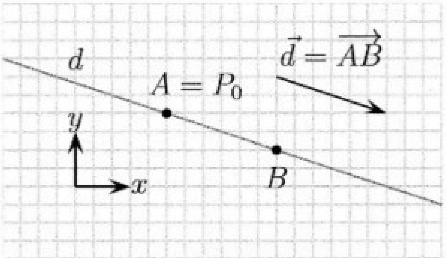
12.9 Représentations paramétriques dans le plan

Les représentations paramétriques utilisent un paramètre, souvent appelé λ (ou t en physique), afin de décrire des objets tels que les droites et les segments.

Droite dans le plan (1 point et 1 vecteur directeur)

Une *droite* d est un objet géométrique à une dimension (car décrit par un paramètre). On construit une droite à l'aide d'un *point de départ*, noté P_0, et d'une direction, représentée par un *vecteur directeur* $\vec{d}$.





Point de départ $P_0(x_0; y_0)$ Vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$

L'idée pour décrire la droite d est de donner la position de chaque point situé sur la droite. On utilise pour cela un *point courant* appelé $P_\lambda(x; y)$ dépendant d'un *paramètre* $\lambda \in \mathbb{R}$. Le vecteur $\overrightarrow{OP_\lambda}$ donne la position du point courant $P_\lambda(x; y)$.

Ainsi la *représentation paramétrique de la droite* d est

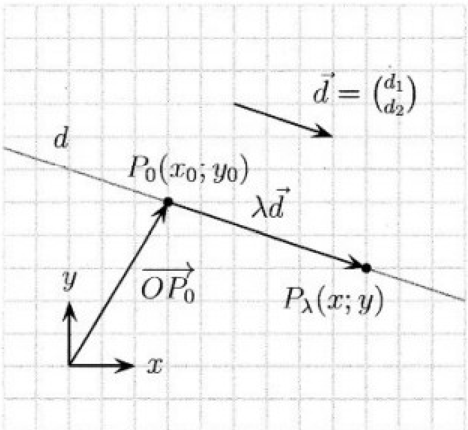
$$\boxed{d : \overrightarrow{OP_\lambda} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda\vec{d} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}}$$

En écrivant les vecteurs, on obtient

$$d : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

Sous la forme d'un système d'équations, on a

$$\boxed{d : \begin{cases} x = x_0 + d_1\lambda \\ y = y_0 + d_2\lambda \end{cases} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}}$$



Le point courant P_λ du dessin à droite est réalisé pour $\lambda = 2$. En faisant varier λ dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, on parcourt ainsi tous les points de la droite.

Slogans

À chaque point de la droite correspond un unique λ (le même pour les deux équations). À chaque valeur de λ correspond un unique point de la droite.

Remarque

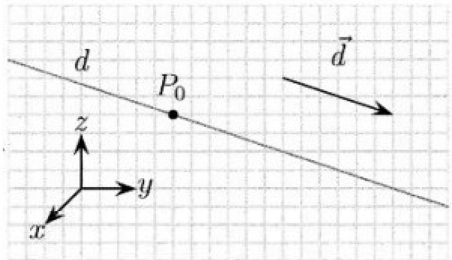
Une droite est infinie (car $\lambda \in \left]-\infty, +\infty\right[$).

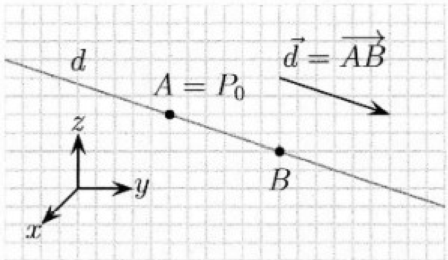
12.10 Représentations paramétriques dans l'espace

Les représentations paramétriques utilisent un ou deux paramètres, souvent appelé λ ou μ (ou t en physique), afin de décrire des objets tels que les droites, les segments et les plans.

Droite dans l'espace (1 point et 1 vecteur directeur)

Une *droite* d est un objet géométrique à une dimension (car décrit par un paramètre). On construit une droite à l'aide d'un *point de départ*, noté P_0, et d'une direction, représentée par un *vecteur directeur* $\vec{d}$.





$$\boxed{\text{Point de départ } P_0(x_0; y_0; z_0) \qquad \text{Vecteur directeur } \vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}}$$

L'idée pour décrire la droite d est de donner la position de chaque point situé sur la droite. On utilise pour cela un *point courant* appelé $P_\lambda(x; y; z)$ dépendant d'un *paramètre* $\lambda \in \mathbb{R}$. Le vecteur $\overrightarrow{OP_\lambda}$ donne la position du point courant $P_\lambda(x; y; z)$.

Ainsi la *représentation paramétrique de la droite* d est

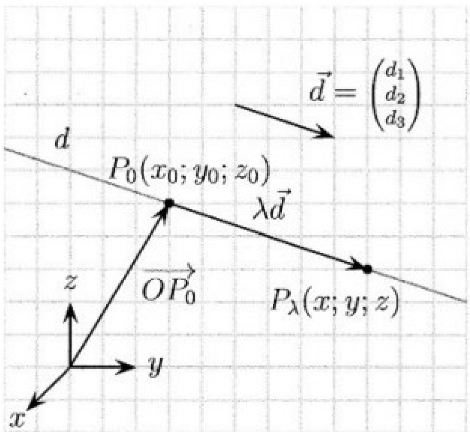
$$\boxed{d : \overrightarrow{OP_\lambda} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda\vec{d} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}}$$

En écrivant les vecteurs, on obtient

$$d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

Sous la forme d'un système d'équations, on a

$$\boxed{d : \begin{cases} x = x_0 + d_1\lambda \\ y = y_0 + d_2\lambda \\ z = z_0 + d_3\lambda \end{cases} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}}$$



Le point courant P_λ du dessin à droite est réalisé pour $\lambda = 2$. En faisant varier λ dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, on parcourt ainsi tous les points de la droite.

Slogans

À chaque point de la droite correspond un unique λ (le même pour les trois équations).
À chaque valeur de λ correspond un unique point de la droite.

Remarque

Une droite est infinie (car $\lambda \in \left]-\infty, +\infty\right[$).

Segments dans le plan (2 points)

Un avantage des représentations paramétriques est que l'on peut décrire des segments. Un *segment* est un bout de droite joignant deux points et ne les dépassant pas.

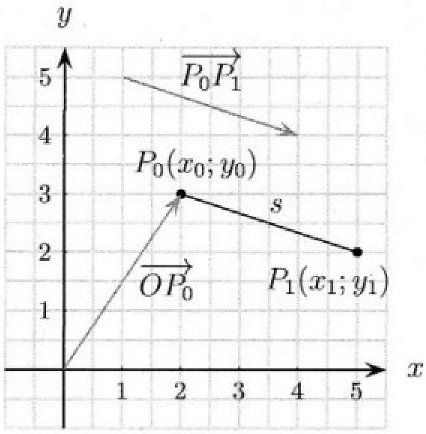
La *représentation paramétrique du segment s qui joint $P_0(x_0; y_0)$ et $P_1(x_1; y_1)$* est

$$\boxed{s : \overrightarrow{OP_\lambda} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda \overrightarrow{P_0P_1} \quad \text{avec } \lambda \in [0,1]}$$

Ou encore, si $\overrightarrow{P_0P_1} = \binom{v_1}{v_2}$

$$\boxed{s : \begin{cases} x = x_0 + v_1\lambda \\ y = y_0 + v_2\lambda \end{cases} \quad \text{avec } \lambda \in [0,1]}$$

Seul le domaine dans lequel le paramètre varie est modifié. Ici λ varie dans l'intervalle $[0, 1]$ au lieu de varier dans l'ensemble des nombres réels.



Deux remarques importantes

1. Il est important d'utiliser le vecteur $\overrightarrow{P_0P_1}$ pour la représentation paramétrique, car si on prenait un vecteur parallèle, alors il faudrait changer l'intervalle dans lequel le paramètre varie.
2. On ne peut pas décrire un segment à l'aide d'une simple équation cartésienne (voir page 130). En effet, comme le paramètre λ est restreint à un domaine, il ne peut pas être éliminé, car on perdrait de l'information.

Milieu d'un segment

En regardant l'équation paramétrique ci-dessus, on s'aperçoit que le milieu $M(x; y)$ du segment qui joint $P_0(x_0; y_0)$ à $P_1(x_1; y_1)$ est donné par $\lambda = \frac{1}{2}$. Ainsi, en utilisant la règle de Chasles, on trouve

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP_0} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{P_0P_1} = \overrightarrow{OP_0} + \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}) = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OP_0} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OP_1} = \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{OP_1}\right)$$

Donc, le point milieu entre $P_0(x_0; y_0)$ et $P_1(x_1; y_1)$ est

$$\boxed{M\left(\frac{x_0 + x_1}{2}; \frac{y_0 + y_1}{2}\right)}$$

Centre de gravité d'un triangle

On considère un triangle ABC de sommets $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ et $C(x_C; y_C)$.
Le centre de gravité G (voir page 134) est

$$\boxed{G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)}$$

Segments dans l'espace (2 points)

Un avantage des représentations paramétriques est que l'on peut décrire des segments. Un *segment* est un bout de droite joignant deux points et ne les dépassant pas.

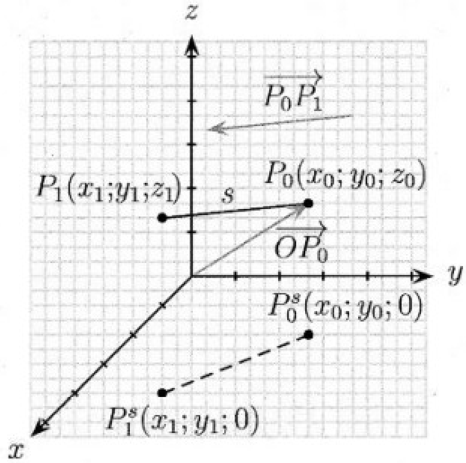
La *représentation paramétrique du segment s qui joint* $P_0(x_0; y_0; z_0)$ *et* $P_1(x_1; y_1; z_1)$ est

$$\boxed{s : \overrightarrow{OP_\lambda} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda\overrightarrow{P_0P_1} \quad \text{avec } \lambda \in [0, 1]}$$

Ou encore, si $\overrightarrow{P_0P_1} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

$$\boxed{s : \begin{cases} x = x_0 + v_1\lambda \\ y = y_0 + v_2\lambda \\ z = z_0 + v_3\lambda \end{cases} \quad \text{avec } \lambda \in [0, 1]}$$

Seul le domaine dans lequel le paramètre varie est modifié. Ici λ varie dans l'intervalle $[0, 1]$ au lieu de varier dans l'ensemble des nombres réels.



Deux remarques importantes

1. Il est important d'utiliser le vecteur $\overrightarrow{P_0P_1}$ pour la représentation paramétrique, car si on prenait un vecteur parallèle, alors il faudrait changer l'intervalle dans lequel le paramètre varie.
2. Puisqu'en géométrie dans l'espace, une droite n'admet pas d'équation cartésienne (voir page 131), un segment n'en admet pas non plus.

Milieu d'un segment

En regardant l'équation paramétrique ci-dessus, on s'aperçoit que le milieu $M(x; y; z)$ du segment qui joint $P_0(x_0; y_0; z_0)$ à $P_1(x_1; y_1; z_1)$ est donné par $\lambda = \frac{1}{2}$. Ainsi, en utilisant la règle de Chasles, on trouve

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP_0} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{P_0P_1} = \overrightarrow{OP_0} + \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}) = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OP_0} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OP_1} = \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{OP_1}\right)$$

Donc, le point milieu entre $P_0(x_0; y_0; z_0)$ et $P_1(x_1; y_1; z_1)$ est

$$\boxed{M\left(\frac{x_0 + x_1}{2}; \frac{y_0 + y_1}{2}; \frac{z_0 + z_1}{2}\right)}$$

Centre de gravité d'un triangle

On considère un triangle ABC de sommets $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ et $C(x_C; y_C; z_C)$. Le centre de gravité G (voir page 135) est

$$\boxed{G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)}$$

Plan dans l'espace (1 point et 2 vecteurs directeurs)

Un *plan* π est un objet géométrique à deux dimensions (car décrit par deux paramètres). On construit un plan à l'aide d'un *point de départ*, noté $P_{0,0}$, et de deux directions, représentées par deux *vecteurs directeurs non parallèles* $\vec{v}$ et $\vec{w}$. On peut ainsi effectuer une *représentation paramétrique du plan* π.

Point de départ $P_{0,0}(x_0; y_0; z_0)$	Vecteurs directeurs $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$

L'idée pour décrire le plan π est de donner la position de chaque point situé sur la plan. On utilise pour cela un point courant appelé $P_{\lambda,\mu}(x; y; z)$ dépendant de deux *paramètres* $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Le vecteur $\overrightarrow{OP_{\lambda,\mu}}$ donne la position du point courant $P_{\lambda,\mu}(x; y; z)$. Ainsi la *représentation paramétrique du plan* π est

$$\boxed{\pi : \overrightarrow{OP}_{\lambda,\mu} = \overrightarrow{OP}_{0,0} + \lambda\vec{v} + \mu\vec{w} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$

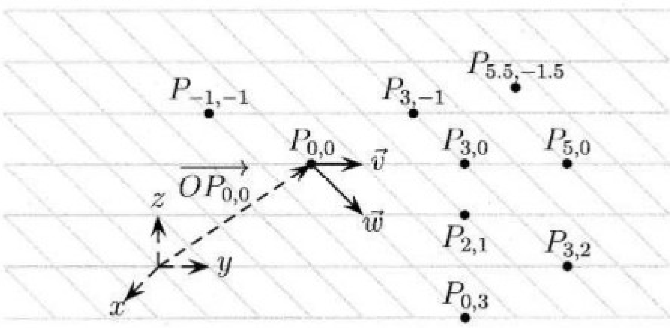
En écrivant les vecteurs sous forme de colonne, on a

$$\pi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

On peut aussi voir l'équation paramétrique sous forme d'un système d'équations

$$\boxed{\pi : \begin{cases} x = x_0 + \lambda v_1 + \mu w_1 \\ y = y_0 + \lambda v_2 + \mu w_2 \\ z = z_0 + \lambda v_3 + \mu w_3 \end{cases} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$

Voici ce que cela donne géométriquement.



Par exemple, le point courant $P_{2,1}$ est réalisé pour $\lambda = 2$ et $\mu = 1$. En faisant varier λ et μ dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, on parcourt ainsi tous les points du plan.

Remarque importante

La représentation paramétrique d'un plan n'est pas la plus pratique.
Nous utiliserons de manière **prioritaire** les équations cartésiennes décrites en page 131.

Slogans

À chaque point du plan correspond un unique λ et μ (les mêmes pour les trois équations).
À chaque valeur de λ et μ correspond un unique point du plan.

Remarque

Un plan est infini (car λ, $\mu \in]-\infty, +\infty[$).

12.11 Équations cartésiennes dans le plan

Droite dans le plan (1 point et 1 vecteur normal)

Pour une droite, puisqu'on a un paramètre et deux équations paramétriques, on peut se débarrasser du paramètre en combinant les deux équations. En reprenant les notations précédentes (voir page 124), voici ce qu'on obtient si on suppose que $d_2 \neq 0$ (ce qu'on peut faire sans nuire à la généralité, car si $d_2 = 0$, alors $d_1 \neq 0$ et on obtient la même conclusion par un calcul similaire).

$$d : \begin{cases} x = x_0 + d_1\lambda \\ y = y_0 + d_2\lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R} \quad \overset{d_2 \neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} d_2 x = d_2 x_0 + d_1 d_2 \lambda \\ y = y_0 + d_2 \lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\overset{①-d_1\cdot ②}{\Longleftrightarrow} \quad d_2 x - d_1 y = d_2 x_0 - d_1 y_0$$

Ainsi la droite d est donnée par l'ensemble des points $P(x; y)$ qui satisfont l'équation suivante, appelée *équation cartésienne*

$$\boxed{d : ax + by = c} \qquad \text{où } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_2 \\ -d_1 \end{pmatrix}$$

et où le nombre c se trouve en remplaçant $(x; y)$ par un point de la droite.

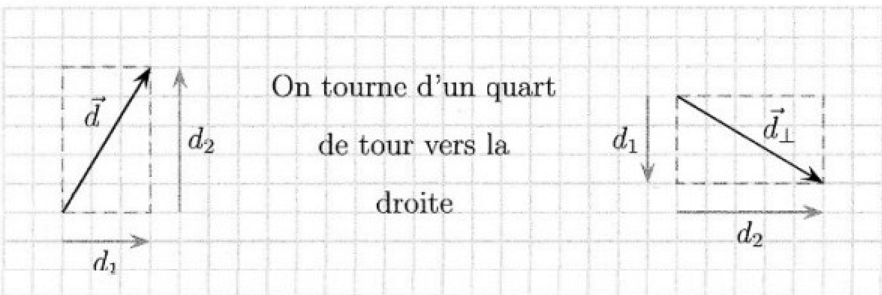
Le vecteur croisé

On définit le *vecteur croisé du vecteur* $\vec{d}$, noté $\vec{d}_\perp$, par

$$\boxed{\vec{d}_\perp = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}_\perp = \begin{pmatrix} +d_2 \\ -d_1 \end{pmatrix}} \qquad \begin{matrix}\text{On croise les composantes} \\ \text{et on change un signe}\end{matrix}$$

Théorème Le vecteur croisé $\vec{d}_\perp$ est un vecteur perpendiculaire à $\vec{d}$.

Preuve



Vecteur normal d'une droite

- Un vecteur $\vec{n}$ est dit *normal à la droite* d si $\vec{n}$ est perpendiculaire à cette droite.
- Si $\vec{d}$ est un vecteur directeur de la droite d, alors $\vec{n} = \vec{d}_\perp$ est un vecteur normal de la droite d.

Remarque concernant les dimensions Une équation cartésienne donne une condition qui réduit d'un degré de liberté la dimension du plan, qui vaut 2. Comme $2 - 1 = 1$, une équation cartésienne dans le plan décrit une droite (objet de dimension 1).

12.12 Équations cartésiennes dans l'espace

Il n'y a pas d'équation cartésienne d'une droite dans l'espace

En géométrie plane, on a réussi à se débarrasser du paramètre parce qu'on avait deux équations paramétriques (une pour x, et une pour y). En géométrie spatiale, comme on a aussi une équation paramétrique pour z, on ne peut pas totalement s'en débarrasser.

Plan dans l'espace (1 point et 1 vecteur normal)

Pour un plan, puisqu'on a deux paramètres et trois équations paramétriques, on peut se débarrasser des paramètres en combinant les trois équations (voir page 137). En reprenant les notations précédentes (voir page 129), voici ce qu'on obtient.

$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + v_1\lambda + w_1\mu \\ y = y_0 + v_2\lambda + w_2\mu \\ z = z_0 + v_3\lambda + w_3\mu \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\iff \quad (v_2w_3 - v_3w_2)x - (v_1w_3 - v_3w_1)y + (v_1w_2 - v_2w_1)z$$
$$= (v_2w_3 - v_3w_2)x_0 - (v_1w_3 - v_3w_1)y_0 + (v_1w_2 - v_2w_1)z_0$$

Ainsi le plan π est donné par l'ensemble des points $P(x; y; z)$ qui satisfont l'équation suivante, appelée *équation cartésienne*

$$\boxed{\pi : ax + by + cz = d} \qquad \text{où} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +(v_2w_3 - v_3w_2) \\ -(v_1w_3 - v_3w_1) \\ +(v_1w_2 - v_2w_1) \end{pmatrix}$$

et où le nombre d se trouve en remplaçant $(x; y; z)$ par un point du plan.

Le produit vectoriel

On définit le *produit vectoriel des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$*, noté $\vec{v} \wedge \vec{w}$, par

$$\boxed{\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +(v_2w_3 - v_3w_2) \\ -(v_1w_3 - v_3w_1) \\ +(v_1w_2 - v_2w_1) \end{pmatrix}}$$

Théorème Le produit vectoriel $\vec{v} \wedge \vec{w}$ est un vecteur perpendiculaire à $\vec{v}$ et à $\vec{w}$.

Preuve

Contrairement à la géométrie plane, la preuve la plus simple requiert le produit scalaire et se trouve en page 143.

Vecteur normal d'un plan

- Un vecteur $\vec{n}$ est dit *normal au plan* π si $\vec{n}$ est perpendiculaire à ce plan.
- Si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont les deux vecteurs directeurs non parallèles du plan π, alors $\vec{n} = \vec{v} \wedge \vec{w}$ est un vecteur normal du plan π.

Remarque concernant les dimensions Une équation cartésienne donne une condition qui réduit d'un degré de liberté la dimension de l'espace, qui vaut 3. Comme $3-1 = 2$, une équation cartésienne dans l'espace décrit un plan (objet de dimension 2).

12.13 Notion de pente pour les droites dans le plan

Les droites du plan qui ne sont pas verticales ont une pente.

On considère une droite non verticale d passant par le point $P_0(x_0; y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = \binom{d_1}{d_2}$. Comme la droite est non verticale, on sait que $d_1 \neq 0$.

On peut éliminer le paramètre de l'équation paramétrique de la façon suivante.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& x_0 + d_1\lambda \\ y &=& y_0 + d_2\lambda \end{array}\right., \lambda \in \mathbb{R} \overset{d_1\neq 0}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{lcl} \lambda &=& \frac{1}{d_1}(x - x_0) \\ y &=& y_0 + d_2\lambda \end{array}\right., \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\overset{①\text{ dans }②}{\Longleftrightarrow} \boxed{y = y_0 + \frac{d_2}{d_1}(x - x_0)} \quad (\bigstar)$$

Le quotient $\frac{d_2}{d_1}$ est indépendant du choix du vecteur directeur de la droite

En effet, soit $\vec{d} = \binom{d_1}{d_2}$ et $\vec{d'} = \binom{d'_1}{d'_2}$ deux vecteurs directeurs de la droite non verticale d. On démontrera en exercice que :

$$\vec{d} \parallel \vec{d'} \iff \frac{d_2}{d_1} = \frac{d'_2}{d'_1}$$

Définition

La *pente de la droite non verticale* d est égale au quotient $\frac{d_2}{d_1}$. La pente d'une droite est généralement, notée m.

Deux interprétations géométriques de la pente

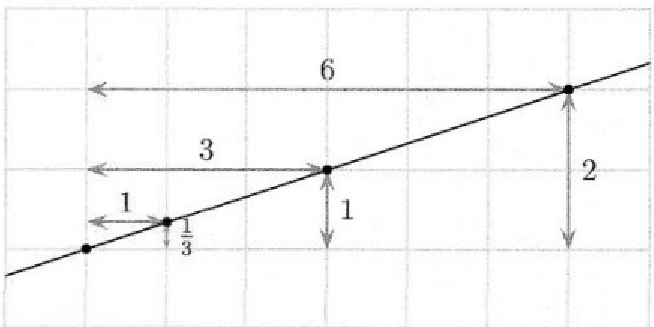
1. Par définition, la pente est donnée par la fraction $\dfrac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}}$.
2. La pente est le déplacement vertical lorsqu'on se déplace horizontalement de 1 vers la droite (cas où $d_1 = 1$).

Illustration

Ici, on voit trois manières de visualiser la pente.

$$\frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

Dans les trois cas, la pente vaut $m = \frac{1}{3}$.



Une équation d'une droite de pente m passant par $P_0(x_0; y_0)$

L'équation ($\bigstar$) permet ainsi de décrire une droite de pente m passant par $P_0(x_0; y_0)$.

$$\boxed{y = y_0 + m(x - x_0)}$$

En deuxième année, dans le cours d'analyse, on utilisera la notion de pente et cette équation pour décrire la droite tangente[5] au point $(x_0; f(x_0))$ à une fonction f.

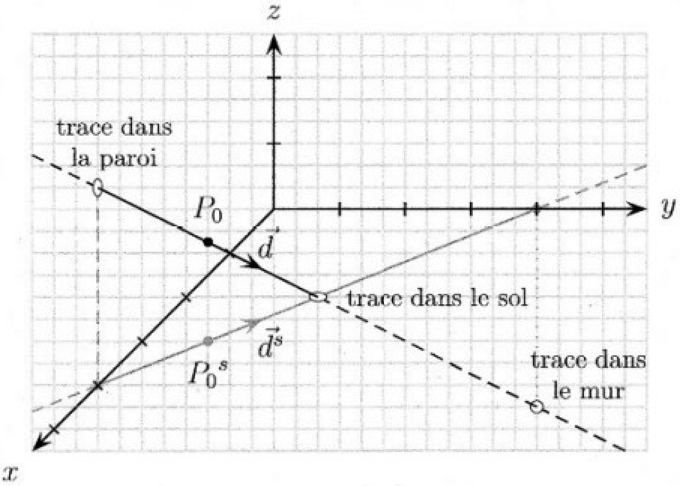
5. L'équation de la tangente à f en x_0 est $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ où $f'(x_0)$ est la dérivée de f en x_0.

12.14 Traces de droite et de plan dans l'espace

Traces d'une droite et représentation graphique

Dans l'espace, les *traces* d'une droite sont définies comme étant les intersections entre la droite et le sol, la paroi ou le mur. Il y a donc la *trace dans le sol*, la *trace dans la paroi* et la *trace dans le mur*. On dessine une droite en trait continu lorsqu'elle est visible et en traitillés lorsqu'elle est cachée par le sol, la paroi ou le mur.

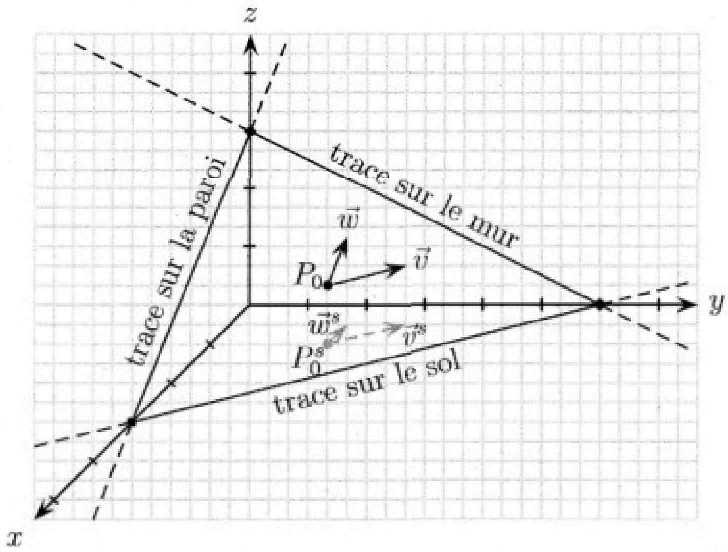
Par exemple, la droite passant par le point $P_0(3;1;\frac{3}{2})$ et de vecteur directeur $\vec{d} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2\\2\\-3\end{pmatrix}$ se dessine ainsi :



Traces d'un plan et représentation graphique

Dans l'espace, les *traces* d'un plan sont définies comme étant les intersections entre le plan et le sol, la paroi ou le mur. Il y a donc la *trace sur le sol*, la *trace sur la paroi* et la *trace sur le mur*. On dessine ces traces en trait continu lorsqu'elles sont visibles et en traitillés lorsqu'elles sont cachées par le sol, la paroi ou le mur.

Par exemple, le plan passant par le point $P_0(1;2;1)$ et ayant $\vec{v} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ comme vecteurs directeurs se dessine ainsi :

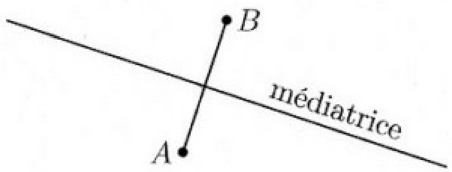


12.15 Droites remarquables dans le plan

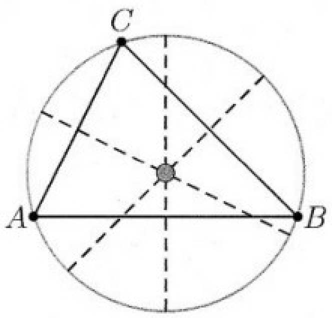
Voici quelques types de droites que l'on retrouve aussi en géométrie spatiale.

Médiatrice d'un segment

La *médiatrice* du segment $[AB]$ est l'axe de symétrie qui échange le point A et le point B.

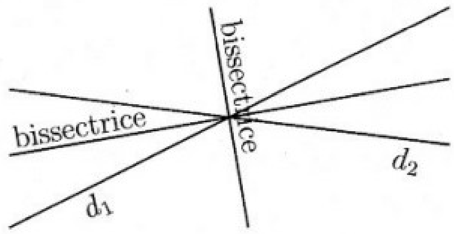


Dans un triangle, le point d'intersection des trois médiatrices est le centre du *cercle circonscrit.*

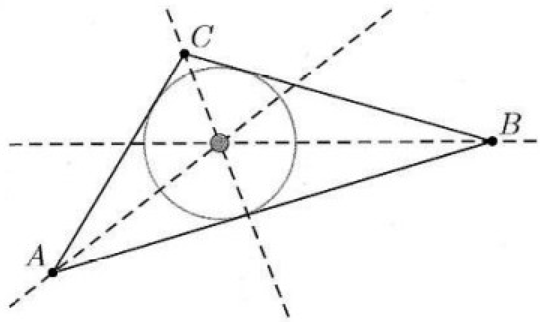


Bissectrices de 2 droites

Les *bissectrices* des droites d_1 et d_2 sont les axes de symétrie qui échangent la droite d_1 et la droite d_2.



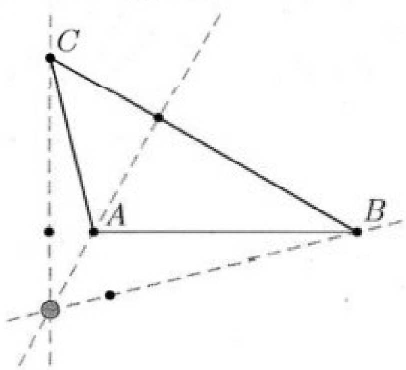
Dans un triangle, le point d'intersection des trois bissectrices intérieures est le centre du *cercle inscrit.*



Droites issues d'un sommet dans un triangle

Hauteur

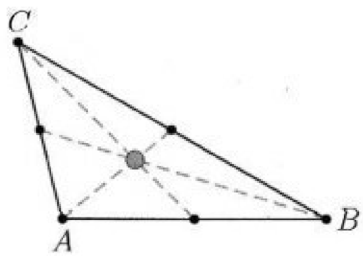
Une *hauteur* est une droite qui passe par un sommet du triangle, perpendiculairement au côté opposé.



Le point d'intersection des trois hauteurs est appelé l'*orthocentre* du triangle.

Médiane

Une *médiane* est une droite qui passe par un sommet du triangle et le milieu du côté opposé.



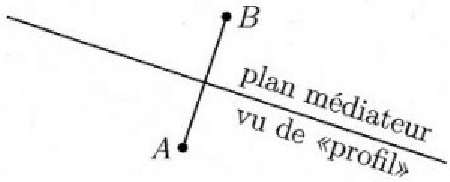
Le point d'intersection des 3 médianes est appelé le *centre de gravité* du triangle.

12.16 Droites et plans remarquables dans l'espace

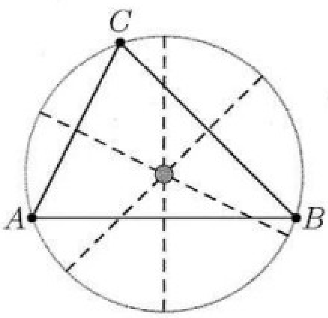
Bien évidemment, il y a toujours les droites remarquables décrites en page 134.

Plan médiateur d'un segment

Le *plan médiateur* du segment $[AB]$ est le plan de symétrie qui échange le point A et le point B.

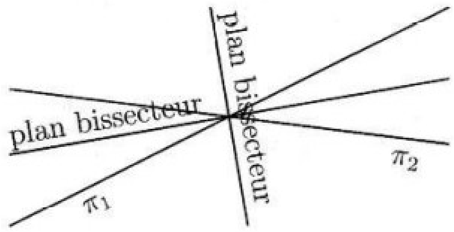


Dans un triangle, le point d'intersection des trois plans médiateurs et du plan ABC est le centre du *cercle circonscrit*.

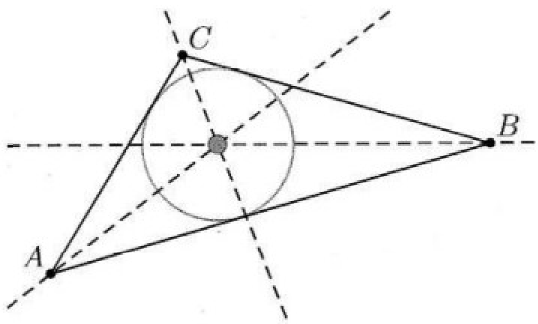


Plans bissecteurs de 2 plans

Les *plans bissecteurs* des plans π_1 et π_2 sont les plans de symétrie qui échangent le plan π_1 et le plan π_2.



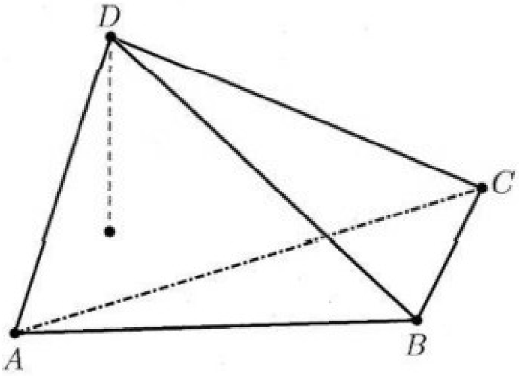
Dans un triangle, le point d'intersection des trois plans bissecteurs intérieurs et du plan ABC est le centre du *cercle inscrit*.



Droites issues d'un sommet dans un tétraèdre

Hauteur

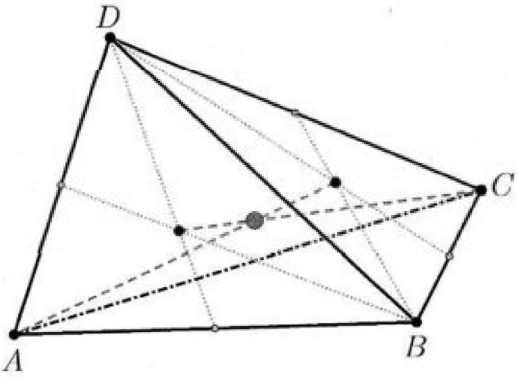
Une *hauteur* est une droite qui passe par un sommet du tétraèdre, perpendiculairement au triangle opposé.



Les quatre hauteurs ne se coupent pas forcément.

Médiane

Une *médiane* est une droite qui passe par un sommet du tétraèdre et le centre de gravité du triangle opposé.



Le point d'intersection des 4 médianes est appelé le *centre de gravité* du triangle.

Plans dans l'espace : de la représentation paramétrique à l'équation cartésienne

Sans nuire à la généralité, on peut supposer que $v_1 \neq 0$. Ainsi, on commence par multiplier les deux dernières équations par v_1.

$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + v_1\lambda + w_1\mu \\ y = y_0 + v_2\lambda + w_2\mu \\ z = z_0 + v_3\lambda + w_3\mu \end{cases} , \ \lambda,\mu \in \mathbb{R} \ \overset{v_1\neq 0}{\Longleftrightarrow} \ \begin{cases} x = x_0 + v_1\lambda + w_1\mu \\ v_1 y = v_1 y_0 + v_1 v_2\lambda + v_1 w_2\mu \\ v_1 z = v_1 z_0 + v_1 v_3\lambda + v_1 w_3\mu \end{cases} , \ \lambda,\mu \in \mathbb{R}$$

On peut ainsi se débarrasser du paramètre λ

$$\underset{③ - v_3 \cdot ①}{\overset{② - v_2 \cdot ①}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} v_1 y - v_2 x = v_1 y_0 - v_2 x_0 + v_1 w_2 \mu - v_2 w_1 \mu \\ v_1 z - v_3 x = v_1 z_0 - v_3 x_0 + v_1 w_3 \mu - v_3 w_1 \mu \end{cases} , \ \mu \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \begin{cases} (v_1 y - v_2 x) = (v_1 y_0 - v_2 x_0) + (v_1 w_2 - v_2 w_1)\mu \\ (v_1 z - v_3 x) = (v_1 z_0 - v_3 x_0) + (v_1 w_3 - v_3 w_1)\mu \end{cases} , \ \mu \in \mathbb{R}$$

$$\overset{\star}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} (v_1 y - v_2 x) = (v_1 y_0 - v_2 x_0) + (v_1 w_2 - v_2 w_1)\mu \\ (v_1 w_2 - v_2 w_1)(v_1 z - v_3 x) = (v_1 w_2 - v_2 w_1)(v_1 z_0 - v_3 x_0) + (v_1 w_2 - v_2 w_1)(v_1 w_3 - v_3 w_1)\mu \end{cases} , \ \mu \in \mathbb{R}$$

On peut ainsi se débarrasser du paramètre μ

$$\Longleftrightarrow \quad (v_1 w_2 - v_2 w_1)(v_1 z - v_3 x) - (v_1 w_3 - v_3 w_1)(v_1 y - v_2 x) = \overbrace{(v_1 w_2 - v_2 w_1)(v_1 z_0 - v_3 x_0) - (v_1 w_3 - v_3 w_1)(v_1 y_0 - v_2 x_0)}^{\text{pareil qu'à gauche en remplaçant } x \text{ par } x_0,\ y \text{ par } y_0 \text{ et } z \text{ par } z_0}$$

$$\Longleftrightarrow \quad (v_1 w_2 - v_2 w_1) v_1 z - (v_1 w_3 - v_3 w_1) v_1 y - v_1 v_3 w_2 x + v_2 v_3 w_1 x + v_1 v_2 w_3 x - v_2 v_3 w_1 x = \text{pareil, mais avec } x_0,\ y_0 \text{ et } z_0$$

Miraculeusement, deux termes se simplifient

$$\Longleftrightarrow \quad (v_1 w_2 - v_2 w_1) v_1 z - (v_1 w_3 - v_3 w_1) v_1 y - v_1 v_3 w_2 x + v_1 v_2 w_3 x = \text{pareil, mais avec } x_0,\ y_0 \text{ et } z_0$$

$$\Longleftrightarrow \quad (v_1 w_2 - v_2 w_1) v_1 z - (v_1 w_3 - v_3 w_1) v_1 y + (v_2 w_3 - v_3 w_2) v_1 x = \text{pareil, mais avec } x_0,\ y_0 \text{ et } z_0$$

$$\overset{:v_1}{\Longleftrightarrow} \quad (v_1 w_2 - v_2 w_1) z - (v_1 w_3 - v_3 w_1) y + (v_2 w_3 - v_3 w_2) x = \text{pareil, mais avec } x_0,\ y_0 \text{ et } z_0$$

$$\Longleftrightarrow \quad (v_2 w_3 - v_3 w_2) x - (v_1 w_3 - v_3 w_1) y + (v_1 w_2 - v_2 w_1) z = \text{pareil, mais avec } x_0,\ y_0 \text{ et } z_0$$

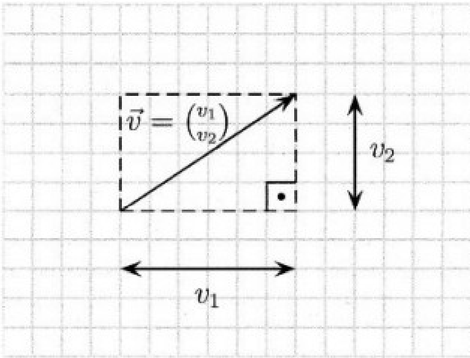
★ Si $\binom{v_1}{v_2} \parallel \binom{w_1}{w_2}$ et $\binom{v_1}{v_3} \parallel \binom{w_1}{w_3}$, alors $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$. Donc par contraposée, on peut sans nuire à la généralité supposer que $\binom{v_1}{v_2} \nparallel \binom{w_1}{w_2}$, c'est-à-dire que $\det\left(\binom{v_1}{v_2}, \binom{w_1}{w_2}\right) = v_1 w_2 - v_2 w_1 \neq 0$. On peut ainsi multiplier la deuxième équation par $(v_1 w_2 - v_2 w_1)$.

12.17 Norme et produit scalaire dans le plan

La norme d'un vecteur

Définition

La longueur d'un vecteur $\vec{v}$ est appelée la *norme de* $\vec{v}$ et est notée $\|\vec{v}\|$.



Formule $\boxed{\|\vec{v}\| = \left\|\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$

En effet, il s'agit d'une application directe du théorème Pythagore.

Le produit scalaire

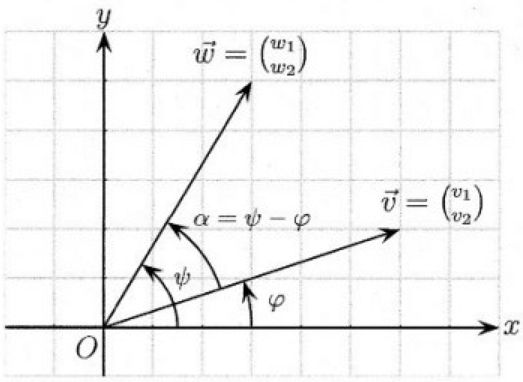
On peut aussi exprimer les composantes d'un vecteur grâce à la trigonométrie.

On a

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \|\vec{v}\|\cos(\varphi) \\ \|\vec{v}\|\sin(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

et

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} \|\vec{w}\|\cos(\psi) \\ \|\vec{w}\|\sin(\psi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$



Grâce à la trigonométrie, on peut exprimer le cosinus de l'angle entre les deux vecteurs ainsi

$$\cos(\psi - \varphi) = \cos(\varphi)\cos(\psi) + \sin(\varphi)\sin(\psi)$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cos(\psi - \varphi) &= \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \big(\cos(\varphi)\cos(\psi) + \sin(\varphi)\sin(\psi)\big) \\ &= \|\vec{v}\|\cos(\varphi) \cdot \|\vec{w}\|\cos(\psi) + \|\vec{v}\|\sin(\varphi) \cdot \|\vec{w}\|\sin(\psi) \\ &= v_1 w_1 + v_2 w_2 \end{aligned}$$

Définitions

Le *produit scalaire* des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est défini comme suit

$$\boxed{\vec{v} \bullet \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2}$$

L'*angle* α entre les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ se calcule grâce à la relation

$$\boxed{\vec{v} \bullet \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos(\alpha)}$$

Propriétés du produit scalaire

Pour tout vecteurs du plan $\vec{v}$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{w}$ et pour tout nombre $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a

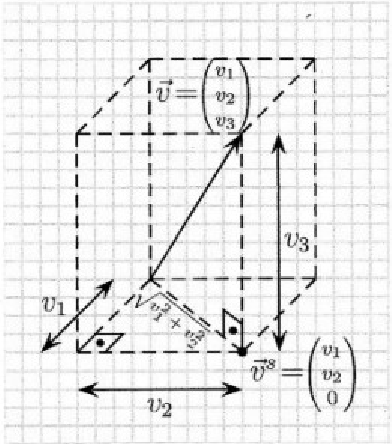
1. $\vec{v} \bullet \vec{w} = 0 \iff \vec{v} \perp \vec{w}$ le produit scalaire est un DÉTECTEUR D'ORTHOGONALITÉ
2. $\vec{v} \bullet \vec{v} = \|\vec{v}\|^2$ on peut définir la norme à l'aide du produit scalaire
3. $\vec{v} \bullet \vec{w} = \vec{w} \bullet \vec{v}$
4. $(\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2) \bullet \vec{w} = \alpha(\vec{v}_1 \bullet \vec{w}) + \beta(\vec{v}_2 \bullet \vec{w})$
5. $\vec{v} \bullet \vec{w} > 0 \iff$ l'angle $\angle(\vec{v}, \vec{w})$ est aigu ; $\vec{v} \bullet \vec{w} < 0 \iff$ l'angle $\angle(\vec{v}, \vec{w})$ est obtus

12.18 Norme et produit scalaire dans l'espace

La norme d'un vecteur

Définition

La longueur d'un vecteur $\vec{v}$ est appelée la *norme de* $\vec{v}$ et est notée $\|\vec{v}\|$.



Formule $\boxed{\|\vec{v}\| = \left\| \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$

En effet, grâce au théorème de Pythagore, on montre que la longueur de $\vec{v}^s$ est $\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$. On conclut en utilisant le théorème de Pythagore une deuxième fois.

$$\sqrt{\left(\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\right)^2 + v_3^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Le produit scalaire

On veut conserver les propriétés du produit scalaire en géométrie plane (voir page 138). Les propriétés 1 et 2, impliquent que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

Par conséquent, en utilisant les propriétés 3 et 4, on trouve que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} &= \left(x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \bullet \left(x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \end{aligned}$$

Définitions

Le *produit scalaire* des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est défini comme suit

$$\boxed{\vec{v} \bullet \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3}$$

L'*angle* α entre les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ se calcule grâce à la relation

$$\boxed{\vec{v} \bullet \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos(\alpha)}$$

cette formule est encore vraie en 3D
car les deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont dans un plan

Propriétés du produit scalaire

Pour tout vecteurs de l'espace $\vec{v}$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{w}$ et pour tout nombre α, $\beta \in \mathbb{R}$, on a

1. $\vec{v} \bullet \vec{w} = 0 \iff \vec{v} \perp \vec{w}$ le produit scalaire est un DÉTECTEUR D'ORTHOGONALITÉ
2. $\vec{v} \bullet \vec{v} = \|\vec{v}\|^2$ on peut définir la norme à l'aide du produit scalaire
3. $\vec{v} \bullet \vec{w} = \vec{w} \bullet \vec{v}$
4. $(\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2) \bullet \vec{w} = \alpha(\vec{v}_1 \bullet \vec{w}) + \beta(\vec{v}_2 \bullet \vec{w})$
5. $\vec{v} \bullet \vec{w} > 0 \iff$ l'angle $\angle(\vec{v}, \vec{w})$ est aigu ; $\vec{v} \bullet \vec{w} < 0 \iff$ l'angle $\angle(\vec{v}, \vec{w})$ est obtus

Calcul rapide d'un vecteur perpendiculaire à un vecteur donné

Grâce au produit scalaire, on peut rapidement donner un vecteur perpendiculaire à un vecteur donné.

En effet, par ce qui précède, trouver un vecteur perpendiculaire au vecteur

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

revient à trouver un vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{v} \bullet \vec{w} = 0$. Pour cela, on échange les composantes de $\vec{v}$ en changeant le signe de l'une d'entre-elles. On obtient deux vecteurs perpendiculaires possibles (parmi une infinité) qui sont

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad -\vec{w} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

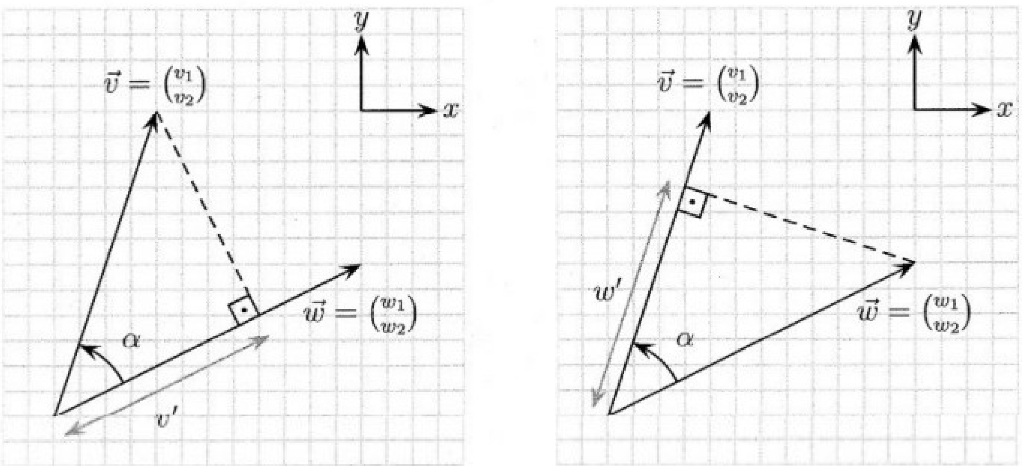
Le lecteur vérifiera à l'aide du produit scalaire que ces vecteurs sont perpendiculaires à $\vec{v}$. On retrouve le vecteur croisé décrit en page 130.

Remarque

Cette technique est très utile en géométrie plane, car elle permet de trouver l'unique direction perpendiculaire à un vecteur donné $\vec{v}$.

Produit scalaire et projection orthogonale

Soit $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs. On projette $\vec{v}$ sur $\vec{w}$ de manière à obtenir un angle droit : on obtient le nombre v'. On peut aussi projeter $\vec{w}$ sur $\vec{v}$ pour obtenir le nombre w'.



On vient de voir que $\vec{v} \bullet \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos(\alpha)$.

De plus, grâce à la trigonométrie, on a $v' = \|\vec{v}\| \cos(\alpha)$ et $w' = \|\vec{w}\| \cos(\alpha)$. Par conséquent, on a les projections orthogonales[6] suivantes.

$$\boxed{v' = \frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{w}\|}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{w' = \frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{v}\|}}$$

6. On utilise ces formules pour définir le produit scalaire lorsque la base n'est pas orthonormée.

Calcul rapide d'un vecteur perpendiculaire à un vecteur donné

Grâce au produit scalaire, on peut rapidement donner un vecteur perpendiculaire à un vecteur donné.

En effet, par ce qui précède, trouver un vecteur perpendiculaire au vecteur

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

revient à trouver un vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{v} \bullet \vec{w} = 0$. Pour cela, on annule une composante et on échange les autres composantes de $\vec{v}$ en changeant le signe de l'une d'entre-elles. On obtient, a priori, 6 vecteurs perpendiculaires à $\vec{v}$ possibles (parmi une infinité) qui sont

$$\vec{w_1} = \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \parallel \vec{w_2} = \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{w_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix} \parallel \vec{w_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ b \end{pmatrix}; \quad \vec{w_5} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \parallel \vec{w_6} = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$

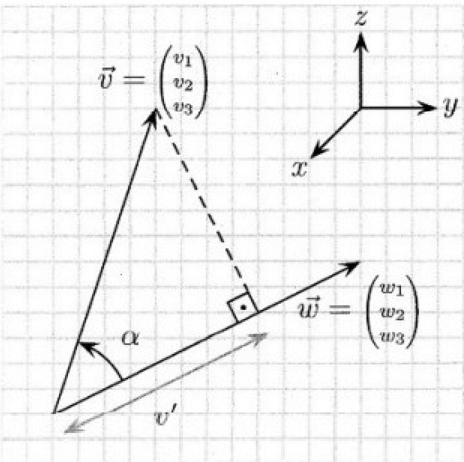
Le lecteur vérifiera à l'aide du produit scalaire que ces vecteurs sont perpendiculaires à $\vec{v}$.

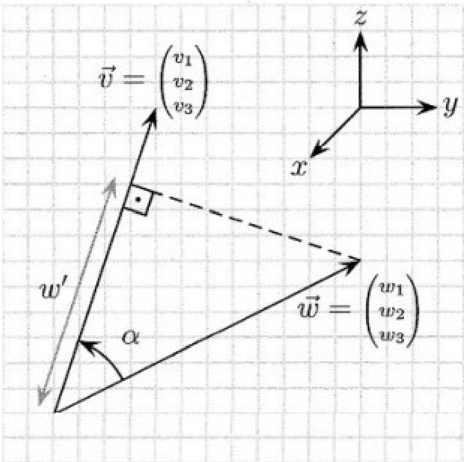
Remarque

Cette technique n'est pas très utile en géométrie spatiale, car elle permet de trouver 3 directions perpendiculaire à un vecteur donné $\vec{v}$. Malheureusement, il existe une infinité de telles directions.

Produit scalaire et projection orthogonale

Soit $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs. On projette $\vec{v}$ sur $\vec{w}$ de manière à obtenir un angle droit : on obtient le nombre v'. On peut aussi projeter $\vec{w}$ sur $\vec{v}$ pour obtenir le nombre w'.





On vient de voir que $\vec{v} \bullet \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos(\alpha)$.

De plus, grâce à la trigonométrie, on a $v' = \|\vec{v}\| \cos(\alpha)$ et $w' = \|\vec{w}\| \cos(\alpha)$. Par conséquent, on a les projections orthogonales[7] suivantes.

$$\boxed{v' = \frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{w}\|}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{w' = \frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{v}\|}}$$

7. On utilise ces formules pour définir le produit scalaire lorsque la base n'est pas orthonormée.

12.19 Droite dans le plan et produit scalaire

Dans le plan, une droite d admet une unique direction perpendiculaire. Notons $\vec{n}$ un vecteur qui va dans cette direction. Un tel vecteur $\vec{n}$ est dit *normal à la droite d*.

Notons $P_0(x_0; y_0)$ un point de la droite d et $\vec{n} = \binom{a}{b}$ un vecteur normal à d. La droite d est définie par la condition.

$$d = \left\{ P(x; y) \in \mathbb{R}^2 : \overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n} \right\}$$

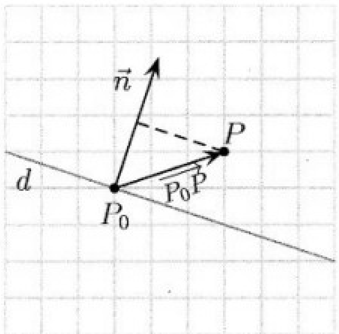
Cherchons des expressions équivalentes à la condition ci-dessus.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n} &\iff \overrightarrow{P_0P} \bullet \vec{n} = 0 \iff \binom{x-x_0}{y-y_0} \bullet \binom{a}{b} = 0 \\ &\iff a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \\ &\iff \boxed{d : ax + by = ax_0 + by_0} \end{aligned}$$

Surprise : c'est une équation cartésienne de la droite d.

Sur le schéma ci-contre, on voit une droite d et son vecteur normal $\vec{n}$.

On constate qu'un point P est sur la droite si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{P_0P}$ est perpendiculaire au vecteur normal (sur le schéma, ce n'est pas le cas).



Rappel

Notons $P_0(x_0; y_0)$ un point de la droite d et $\vec{d} = \binom{d_1}{d_2}$ un vecteur directeur de d.

On avait obtenu en page 130 l'équation cartésienne suivante.

$$\boxed{d : d_2x - d_1y = d_2x_0 - d_1y_0}$$

Résultat (démonstration en exercice)

Si deux équations cartésiennes décrivent la même droite, alors elles sont multiples l'une de l'autre (par un nombre non nul). Et réciproquement.

Conséquence

Comme la droite d admet les deux équations cartésiennes encadrées ci-dessus, alors on retrouve le vecteur croisé de la page 130.

$$\vec{n} \parallel \vec{d}_\perp \quad \text{où} \quad \vec{d}_\perp = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}_\perp = \begin{pmatrix} +d_2 \\ -d_1 \end{pmatrix}$$

12.20 Plan dans l'espace et produit scalaire

Dans l'espace, un plan π admet une unique direction perpendiculaire. Notons $\vec{n}$ un vecteur qui va dans cette direction. Un tel vecteur $\vec{n}$ est dit *normal au plan* π.

Notons $P_0(x_0; y_0; z_0)$ un point du plan π et $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal à π. Le plan π est défini par la condition.

$$\pi = \left\{ P(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n} \right\}$$

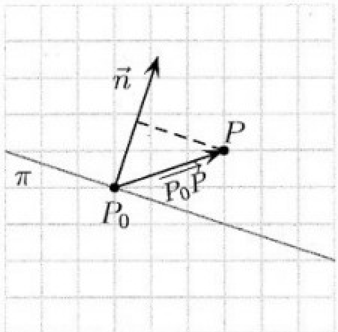
Cherchons des expressions équivalentes à la condition ci-dessus.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n} \iff \overrightarrow{P_0P} \bullet \vec{n} = 0 &\iff \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \\ &\iff \boxed{\pi : ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0} \end{aligned}$$

Surprise : c'est une équation cartésienne du plan π.

Sur le schéma ci-contre, on voit un plan π (vu de «profil») et son vecteur normal $\vec{n}$.

On constate qu'un point P est sur le plan si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{P_0P}$ est perpendiculaire au vecteur normal (sur le schéma, ce n'est pas le cas).



Rappel

Notons $P_0(x_0; y_0; z_0)$ un point du plan π et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ deux vecteurs directeurs de π (non parallèles).

On avait obtenu en page 131 l'équation cartésienne suivante.

$$\boxed{\begin{aligned} \pi : \ & (v_2w_3 - v_3w_2)x - (v_1w_3 - v_3w_1)y + (v_1w_2 - v_2w_1)z \\ & = (v_2w_3 - v_3w_2)x_0 - (v_1w_3 - v_3w_1)y_0 + (v_1w_2 - v_2w_1)z_0 \end{aligned}}$$

Résultat (démonstration en exercice)

Si deux équations cartésiennes décrivent le même plan, alors elles sont multiples l'une de l'autre (par un nombre non nul). Et réciproquement.

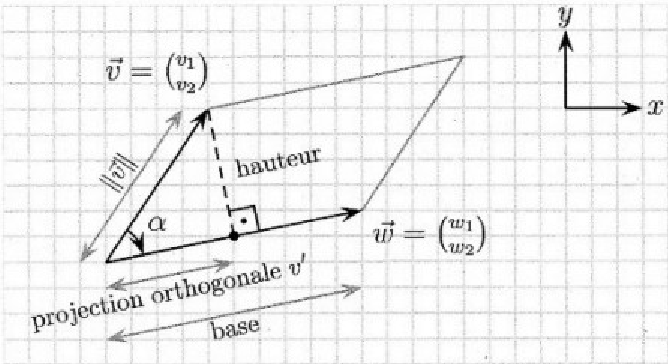
Conséquence

Comme le plan π admet les deux équations cartésiennes encadrées ci-dessus, alors on retrouve le produit vectoriel de la page 131.

$$\vec{n} \parallel \vec{v} \wedge \vec{w} \quad \text{où} \quad \vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +(v_2w_3 - v_3w_2) \\ -(v_1w_3 - v_3w_1) \\ +(v_1w_2 - v_2w_1) \end{pmatrix}$$

12.21 Aire d'un parallélogramme dans le plan

Ci-dessous, on voit que deux vecteurs engendrent un parallélogramme.



Pour calculer l'aire de ce parallélogramme, on multiplie la hauteur par la base. Pour trouver la hauteur, on utilise le théorème de Pythagore à partir de la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur $\vec{w}$, notée v'. Afin que le calcul soit plus élégant, calculons d'abord l'aire au carré.

$$\begin{aligned}
\text{Aire}^2 &= \text{hauteur}^2 \cdot \text{base}^2 = \left(\|\vec{v}\|^2 - \left(\frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{w}\|}\right)^2\right) \cdot \|\vec{w}\|^2 \\
&= \|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 - \frac{(\vec{v} \bullet \vec{w})^2}{\|\vec{w}\|^2}\|\vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 - (\vec{v} \bullet \vec{w})^2 \\
&= (v_1^2 + v_2^2)(w_1^2 + w_2^2) - (v_1 w_1 + v_2 w_2)^2 \\
&= v_1^2 w_1^2 + v_1^2 w_2^2 + v_2^2 w_1^2 + v_2^2 w_2^2 - (v_1^2 w_1^2 + 2 v_1 v_2 w_1 w_2 + v_2^2 w_2^2) \\
&= v_1^2 w_2^2 - 2 v_1 v_2 w_1 w_2 + v_2^2 w_1^2 = (v_1 w_2 - v_2 w_1)^2
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\text{Aire} = \sqrt{(v_1 w_2 - v_2 w_1)^2} = |v_1 w_2 - v_2 w_1|$$

Pour plus de simplicité, on dit que $v_1 w_2 - v_2 w_1$ est l'*aire signée*.

Définition

Le *déterminant* des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est défini comme suit

$$\boxed{\det(\vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} = v_1 w_2 - v_2 w_1}$$

Résultat

Dans le plan, l'aire *signée* du parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est donnée par le déterminant des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

$$\boxed{\text{Aire } \textit{signée} \text{ du parallélogramme engendré par les vecteurs } \vec{v} \text{ et } \vec{w} = \det(\vec{v}, \vec{w})}$$

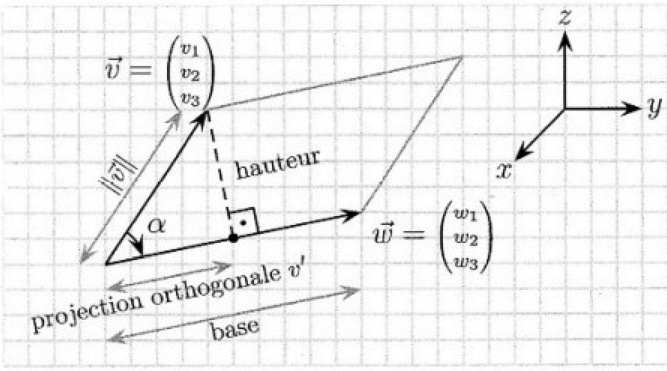
Une autre formule

Si on connaît l'angle α, on voit que grâce à la trigonométrie on a

$$\boxed{\text{Aire } \textit{signée} \text{ du parallélogramme engendré par les vecteurs } \vec{v} \text{ et } \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \sin(\alpha)}$$

12.22 Aire d'un parallélogramme dans l'espace

Ci-dessous, on voit que deux vecteurs engendrent un parallélogramme.



Pour calculer l'aire de ce parallélogramme, on multiplie la hauteur par la base. Pour trouver la hauteur, on utilise le théorème de Pythagore à partir de la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur $\vec{w}$, notée v'. Afin que le calcul soit plus élégant, calculons d'abord l'aire au carré.

$$\begin{aligned}
\text{Aire}^2 &= \text{hauteur}^2 \cdot \text{base}^2 = \left(\|\vec{v}\|^2 - \left(\frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{w}\|} \right)^2 \right) \cdot \|\vec{w}\|^2 \\
&= \|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 - \frac{(\vec{v} \bullet \vec{w})^2}{\|\vec{w}\|^2} \|\vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 - (\vec{v} \bullet \vec{w})^2 \\
&= (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) - (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3)^2 \\
&= v_1^2 w_1^2 + v_1^2 w_2^2 + v_1^2 w_3^2 + v_2^2 w_1^2 + v_2^2 w_2^2 + v_2^2 w_3^2 + v_3^2 w_1^2 + v_3^2 w_2^2 + v_3^2 w_3^2 \\
&\quad -(v_1^2 w_1^2 + 2v_1 v_2 w_1 w_2 + v_2^2 w_2^2 + 2v_1 v_3 w_1 w_3 + 2v_2 v_3 w_2 w_3 + v_3^2 w_3^2) \\
&= v_2^2 w_3^2 - 2v_2 v_3 w_2 w_3 + v_3^2 w_2^2 \\
&\quad + v_1^2 w_3^2 - 2v_1 v_3 w_1 w_3 + v_3^2 w_1^2 \\
&\quad + v_1^2 w_2^2 - 2v_1 v_2 w_1 w_2 + v_2^2 w_1^2 \\
&= (v_2 w_3 - v_3 w_2)^2 + (v_1 w_3 - v_3 w_1)^2 + (v_1 w_2 - v_2 w_1)^2
\end{aligned}$$

À un signe près, on reconnaît les composantes du produit vectoriel (voir page 131) ! Ainsi

$$\text{Aire} = \sqrt{\big(v_2 w_3 - v_3 w_2\big)^2 + \big(-(v_1 w_3 - v_3 w_1)\big)^2 + \big(v_1 w_2 - v_2 w_1\big)^2}$$

Résultat

Dans l'espace, l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est donnée par la norme du produit vectoriel des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

$$\boxed{\text{Aire du parallélogramme engendré par les vecteurs } \vec{v} \text{ et } \vec{w} = \|\vec{v} \wedge \vec{w}\|}$$

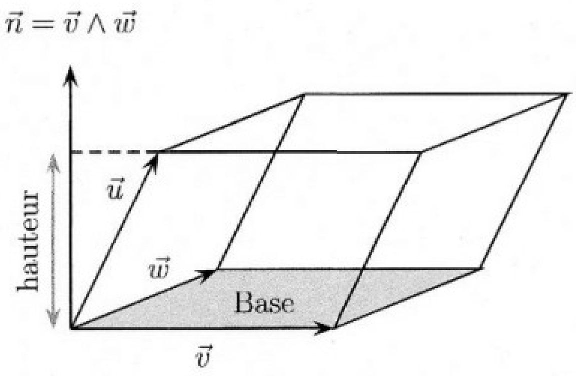
Une autre formule

Si on connaît l'angle α, on voit que grâce à la trigonométrie on a

$$\boxed{\text{Aire } \textit{signée} \text{ du parallélogramme engendré par les vecteurs } \vec{v} \text{ et } \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \sin(\alpha)}$$

12.24 Volume d'un parallélépipède

Ci-dessous, on voit que trois vecteurs engendrent un parallélépipède.



Le traitillé correspond à la projection orthogonale du vecteur $\vec{u}$ sur le vecteur $\vec{v} \wedge \vec{w}$.
Ce trait appartient au plan contenant le 'couvercle'.

On sait que

$$\begin{aligned}\text{Volume du parallélépipède} &= \text{Base du parallélépipède} \cdot \text{Hauteur du parallélépipède}\\ &= \text{Aire du parallélogramme} \cdot \text{Hauteur du parallélépipède}\end{aligned}$$

La hauteur *signée* est obtenue en projetant orthogonalement le vecteur $\vec{u}$ sur $\vec{v} \wedge \vec{w}$. On prend la valeur absolue pour ne pas avoir de signe. Ainsi,

$$\text{Hauteur du parallélépipède} = \frac{|\vec{u} \bullet (\vec{v} \wedge \vec{w})|}{\|\vec{v} \wedge \vec{w}\|}$$

De plus, on a

$$\text{Aire du parallélogramme} = \|\vec{v} \wedge \vec{w}\|$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}\text{Volume du parallélépipède} &= \text{Aire du parallélogramme} \cdot \text{Hauteur du parallélépipède}\\ &= \|\vec{v} \wedge \vec{w}\| \cdot \frac{|\vec{u} \bullet (\vec{v} \wedge \vec{w})|}{\|\vec{v} \wedge \vec{w}\|}\\ &= |\vec{u} \bullet (\vec{v} \wedge \vec{w})|\end{aligned}$$

Définition

Le *produit mixte* des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est défini par $\vec{u} \bullet (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

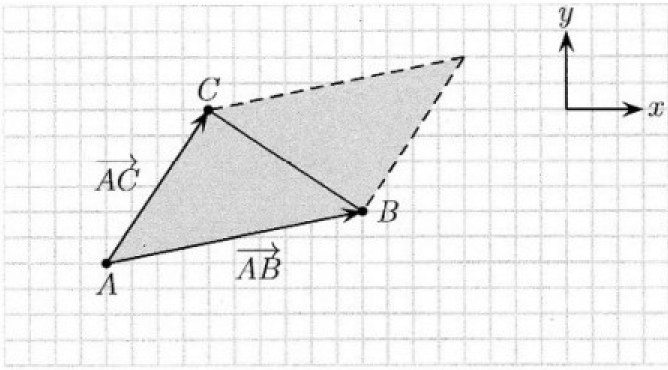
Résultat

Dans l'espace, le volume *signé* du parallélépipède engendré par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est donné par le produit mixte des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

$$\boxed{\text{Volume } \textit{signé} \text{ du parallélépipède engendré par les vecteurs } \vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w} \;=\; \vec{u} \bullet (\vec{v} \wedge \vec{w})}$$

12.25 Aire d'un triangle dans le plan

On considère le triangle ABC de sommets A, B et C.

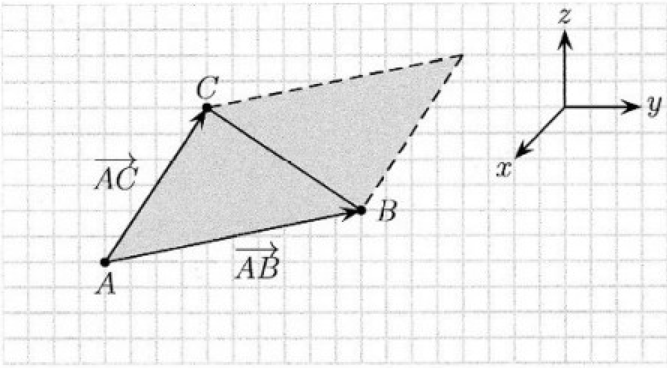


On remarque que l'aire du triangle ABC est égale à la moitié de l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\boxed{\text{Aire } \textit{signée} \text{ du triangle } ABC \;=\; \frac{1}{2}\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)}$$

12.26 Aire d'un triangle dans l'espace

On considère le triangle ABC de sommets A, B et C.

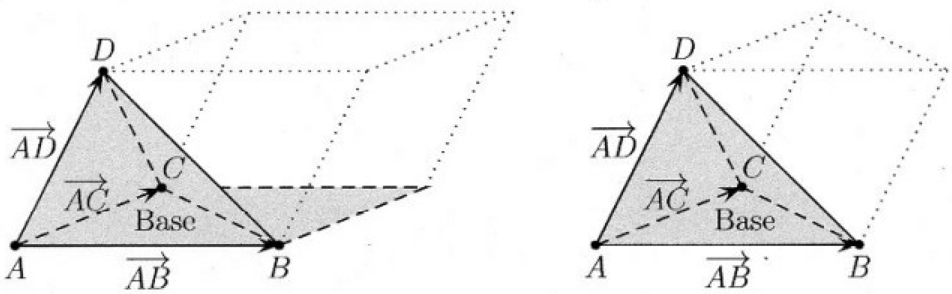


On remarque que l'aire du triangle ABC est égale à la moitié de l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\boxed{\text{Aire du triangle } ABC \;=\; \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}$$

12.28 Volume d'un tétraèdre

On considère le tétraèdre $ABCD$ de sommets A, B, C et D.



Le tétraèdre est une pyramide à base triangulaire inscrit dans le prisme (voir le schéma de droite) qui est la moitié du parallélépipède engendré par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$. Donc,

$$\text{Volume pyramide} = \tfrac{1}{3} \cdot \text{Volume prisme} = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \text{Volume parallélépipède}$$

Ainsi

$$\boxed{\text{Volume } \textit{signé} \text{ du tétraèdre } ABCD \;=\; \tfrac{1}{6}(\overrightarrow{AD} \bullet (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}))}$$

Grâce aux propriétés du produit scalaire (page 139) et du produit vectoriel (page 151), le volume signé ne dépend pas de l'ordre dans lequel on écrit les vecteurs. Néanmoins, il est nécessaire que chaque vecteur ait le même point de départ. Autrement dit, au signe près, les produits mixtes suivants sont les mêmes.

$$\overrightarrow{AD} \bullet (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}),\quad \overrightarrow{BA} \bullet (\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}),\quad \overrightarrow{CB} \bullet (\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CD}),\quad \overrightarrow{DB} \bullet (\overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{DA}),\ \ldots$$

12.29 Propriétés du déterminant dans le plan

1. L'aire A du parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ et $\vec{w} = \binom{w_1}{w_2}$ est égale à la valeur absolue du déterminant, autrement dit :

$$A = |\det(\vec{v}, \vec{w})|$$

2. Soit $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs du plan. On a l'équivalence suivante :

$$\vec{v} \parallel \vec{w} \iff \det(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

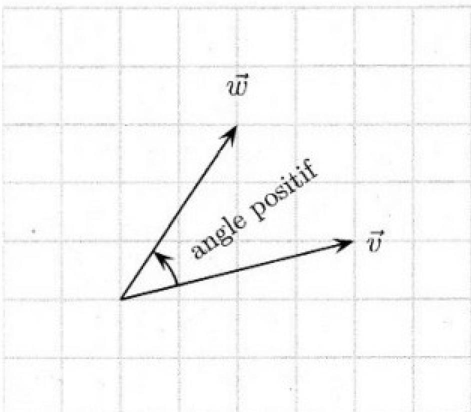
   En effet, l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est nulle si et seulement si les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont parallèles.

   Ainsi, le déterminant à 2 dimensions est un DÉTECTEUR DE PARALLÉLISME.

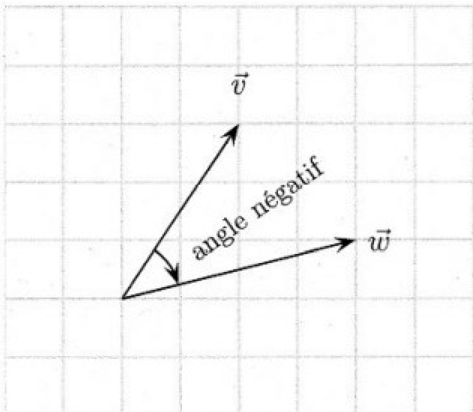
3. Pour tout vecteurs du plan $\vec{v}$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{w}$ et pour tout nombre α, $\beta \in \mathbb{R}$, on a
   (a) $\det(\vec{v}, \vec{w}) = -\det(\vec{w}, \vec{v})$
   (b) $\det(\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2, \vec{w}) = \alpha \det(\vec{v}_1, \vec{w}) + \beta \det(\vec{v}_2, \vec{w})$

4. Le déterminant $\det(\vec{v}, \vec{w})$ est un nombre.

   Son signe est donné par l'orientation des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Le déterminant est positif si l'angle le plus petit entre $\vec{v}$ et $\vec{w}$ (partant de $\vec{v}$) est positif, il est négatif dans le cas contraire.

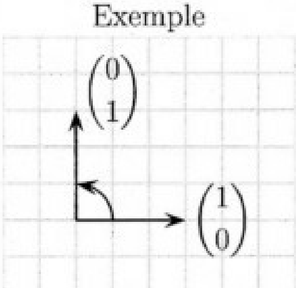


Dans ce cas, $\det(\vec{v}, \vec{w}) > 0$



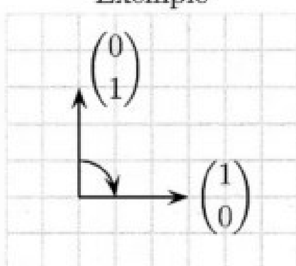
Dans ce cas, $\det(\vec{v}, \vec{w}) < 0$

Exemple



$\det\left(\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\right) = 1 > 0$

Exemple



$\det\left(\binom{0}{1}, \binom{1}{0}\right) = -1 < 0$

12.30 Propriétés du produit vectoriel dans l'espace

1. L'aire A du parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ est égale à la norme du produit vectoriel, autrement dit :

$$A = \|\vec{v} \wedge \vec{w}\|$$

2. Soit $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs de l'espace. On a l'équivalence suivante :

$$\vec{v} \parallel \vec{w} \iff \vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{0}$$

   En effet, l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est nulle si et seulement si les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont parallèles.

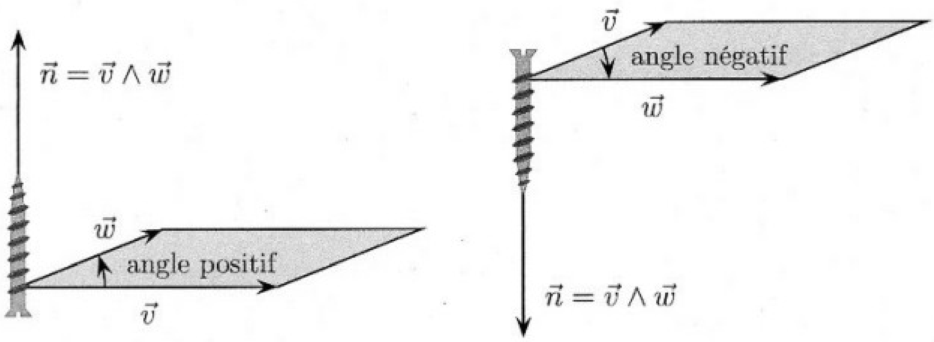
   Ainsi, le produit vectoriel est un DÉTECTEUR DE PARALLÉLISME.

3. Pour tout vecteurs de l'espace $\vec{v}$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{w}$ et pour tout nombre $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a
   (a) $\vec{v} \wedge \vec{w} = -\vec{w} \wedge \vec{v}$
   (b) $(\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2) \wedge \vec{w} = \alpha(\vec{v}_1 \wedge \vec{w}) + \beta(\vec{v}_2 \wedge \vec{w})$

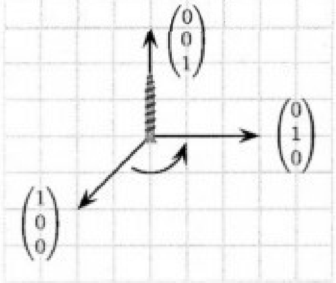
4. Le produit vectoriel $\vec{v} \wedge \vec{w}$ est un vecteur.

   (a) Sa direction est la direction perpendiculaire aux directions données par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

   (b) Son sens est donné de telle manière que les vecteurs $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{v} \wedge \vec{w}$ se positionnent selon l'orientation donnée par les axes x, y et z. C'est la règle du tournevis.

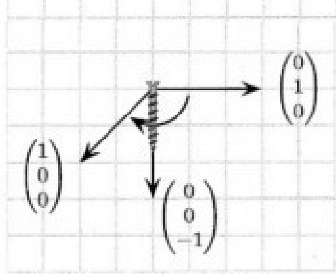


Exemple



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemple



$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   (c) Sa longueur est égale à l'aire du parallélogramme engendré par $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

12.31 Distances dans le plan

Distance d'un point à un point

Soit P_1 et P_2 deux points dans le plan. La *distance entre les points P_1 et P_2* est donnée par

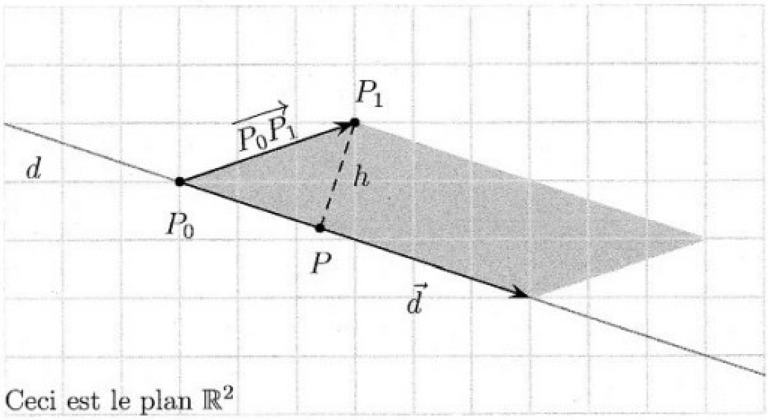
$$\boxed{d(P_1, P_2) = \|\overrightarrow{P_1P_2}\|}$$

Distance d'un point à une droite (vecteur directeur)

Soit d une droite passant par P_0 et de vecteur directeur $\vec{d}$, et P_1 un point dans le plan.

La *distance entre le point P_1 et la droite d* est la plus courte distance parmi toutes les distances possibles entre le point P_1 et un point P sur la droite. On voit, grâce au théorème de Pythagore, que la plus courte distance est donnée lorsque le segment reliant P_1 à P est perpendiculaire à la droite d.

Cette distance $d(P_1, d)$ est donnée par la hauteur du parallélogramme engendré par les vecteurs $\overrightarrow{P_0P_1}$ et $\vec{d}$.



Comme l'aire du parallélogramme est égale à la base fois la hauteur, on peut exprimer la hauteur du parallélogramme comme suit.

$$\text{Hauteur du parallélogramme} = \frac{\text{Aire du parallélogramme}}{\text{base du parallélogramme}} = \frac{\det(\overrightarrow{P_0P_1}, \vec{d})}{\|\vec{d}\|}$$

Ainsi :

$$\boxed{\delta(P_1, d) = \frac{\det(\overrightarrow{P_0P_1}, \vec{d})}{\|\vec{d}\|}}$$

On note δ au lieu de d parce qu'il s'agit d'une *distance signée*

Bien sûr, cette formule est aussi valable si le point P_1 est dans la droite. Dans ce cas, la distance sera évidemment nulle.

12.32 Distances dans l'espace

Distance d'un point à un point

Soit P_1 et P_2 deux points dans l'espace. La *distance entre les points P_1 et P_2* est donnée par

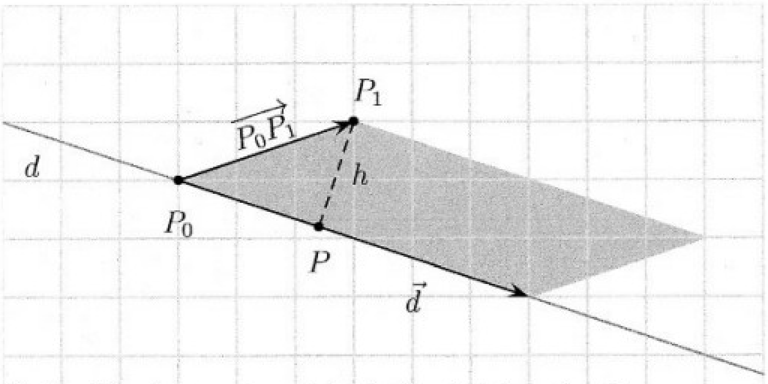
$$\boxed{d(P_1, P_2) = \|\overrightarrow{P_1P_2}\|}$$

Distance d'un point à une droite (vecteur directeur)

Soit d une droite passant par P_0 et de vecteur directeur $\vec{d}$, et P_1 un point dans l'espace.

La *distance entre le point P_1 et la droite d* est la plus courte distance parmi toutes les distances possibles entre le point P_1 et un point P sur la droite. On voit, grâce au théorème de Pythagore, que la plus courte distance est donnée lorsque le segment reliant P_1 à P est perpendiculaire à la droite d.

Cette distance $d(P_1, d)$ est donnée par la hauteur du parallélogramme engendré par les vecteurs $\overrightarrow{P_0P_1}$ et $\vec{d}$.



Ceci est le plan contenant la droite d et le point P_1

Comme l'aire du parallélogramme est égale à la base fois la hauteur, on peut exprimer la hauteur du parallélogramme comme suit.

$$\text{Hauteur du parallélogramme} = \frac{\text{Aire du parallélogramme}}{\text{base du parallélogramme}} = \frac{\|\overrightarrow{P_0P_1} \wedge \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$$

Ainsi :

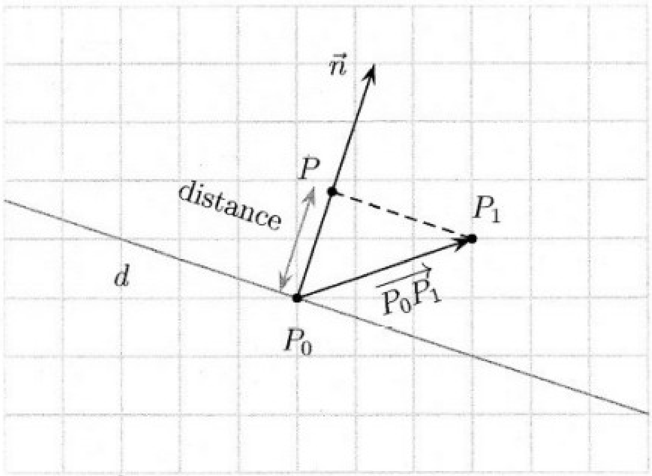
$$\boxed{d(P_1, d) = \frac{\|\overrightarrow{P_0P_1} \wedge \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}}$$

Bien sûr, cette formule est aussi valable si le point P_1 est dans la droite. Dans ce cas, la distance sera évidemment nulle.

Distance d'un point à une droite (vecteur normal)

Soit d une droite passant par P_0 et de vecteur normal $\vec{n}$, et P_1 un point dans le plan.

La *distance entre le point* P_1 *et la droite* d est égale à la distance entre le point P_0 et la projection orthogonale P du point P_1 sur la droite perpendiculaire à la droite d, passant par P_0 (grâce à Pythagore).



Ainsi, la distance *signée*, notée $\delta(P_1, d)$, du point P_1 à la droite d est la projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{P_0P_1}$ sur le vecteur normal $\vec{n}$.

$$\boxed{\delta(P_1, d) = \frac{\overrightarrow{P_0P_1} \bullet \vec{n}}{\|\vec{n}\|}}$$

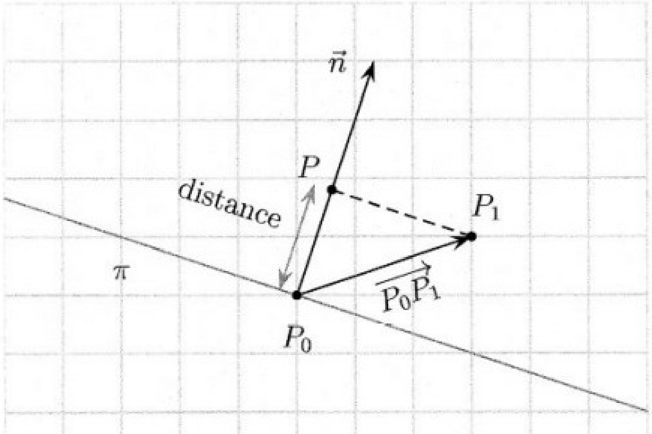
On note δ au lieu de d parce qu'il s'agit d'une *distance signée*

Bien sûr, cette formule est aussi valable si le point P_1 est dans la droite. Dans ce cas, la distance sera évidemment nulle.

Distance d'un point à un plan (vecteur normal)

Soit π un plan passant par P_0 et de vecteur normal $\vec{n}$, et P_1 un point dans l'espace.

La *distance entre le point* P_1 *et le plan* π est égal à la distance entre le point P_0 et la projection orthogonale P du point P_1 sur la droite perpendiculaire au plan π, passant par P_0 (grâce à Pythagore).



On regarde le plan de «profil»

Ainsi, la distance *signée*, notée $\delta(P_1, \pi)$, du point P_1 au plan π est la projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{P_0P_1}$ sur le vecteur normal $\vec{n}$.

$$\boxed{\delta(P_1, \pi) = \frac{\overrightarrow{P_0P_1} \bullet \vec{n}}{\|\vec{n}\|}}$$

On note δ au lieu de d parce qu'il s'agit d'une *distance signée*

Bien sûr, cette formule est aussi valable si le point P_1 est dans le plan. Dans ce cas, la distance sera évidemment nulle.

Distance d'une droite à une droite

Soit d_1 une droite passant par P_1 et de vecteur directeur $\vec{d_1}$. Soit aussi d_2 une droite passant par P_2 et de vecteur directeur $\vec{d_2}$.

La *distance entre deux droites* est la plus courte distance parmi toutes les distances entre un point de la première droite et un point de la deuxième droite.

On distingue deux cas.

1. Les vecteurs directeurs $\vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$ sont parallèles.

   Par conséquent, les droites sont soit confondues, soit parallèles.

   La distance entre les deux droites est donnée par la distance du point P_1 (qui est un point de d_1) à la droite d_2 (et on utilise une formule vue précédemment).

   $$d(d_1, d_2) = d(P_1, d_2)$$

   On est donc ramené au problème du calcul de la distance d'un point à une droite.

2. Les vecteurs directeurs $\vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$ ne sont pas parallèles.

   Par conséquent, les droites sont forcément sécantes. Ainsi la distance est nulle.

   $$d(d_1, d_2) = 0$$

Distance d'une droite à une droite

Soit d_1 une droite passant par P_1 et de vecteur directeur $\vec{d_1}$. Soit aussi d_2 une droite passant par P_2 et de vecteur directeur $\vec{d_2}$.

La *distance entre deux droites* est la plus courte distance parmi toutes les distances entre un point de la première droite et un point de la deuxième droite.

On distingue deux cas.

1. Les vecteurs directeurs $\vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$ sont parallèles.

   Par conséquent, les droites sont soit confondues, soit parallèles.

   La distance entre les deux droites est donnée par la distance du point P_1 (qui est un point de d_1) à la droite d_2 (et on utilise une formule vue précédemment).

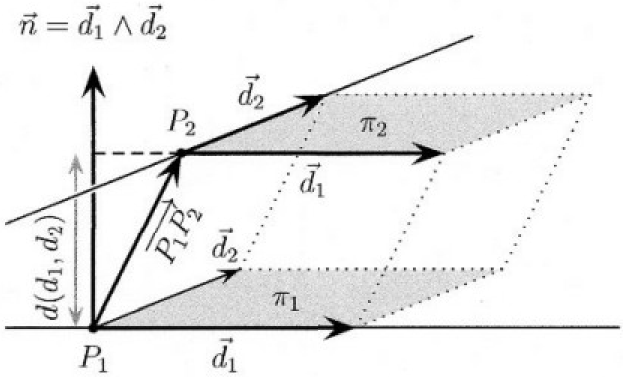
   $$d(d_1, d_2) = d(P_1, d_2)$$

   On est donc ramené au problème du calcul de la distance d'un point à une droite.

2. Les vecteurs directeurs $\vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$ ne sont pas parallèles.

   Par conséquent, les droites sont gauches ou sécantes.

   Considérons les plans π_1 et π_2 dont les deux vecteurs directeurs sont $\vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$ et passant respectivement par P_1 et P_2. Ces plans sont bien définis, car $\vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$ ne sont pas parallèles. On a donc la situation suivante :



   Ainsi la distance *signée* entre les deux droites est donnée par la projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$ sur le vecteur $\vec{d_1} \wedge \vec{d_2}$. D'où la formule suivante.

   $$\boxed{\delta(d_1, d_2) = \frac{\overrightarrow{P_1P_2} \bullet \vec{n}}{\|\vec{n}\|} \quad \text{où} \quad \vec{n} = \vec{d_1} \wedge \vec{d_2}}$$

   On note δ au lieu de d parce qu'il s'agit d'une *distance signée*

   Remarques :

   (a) Comme $\vec{d_1}$ et $\vec{d_2}$ sont non parallèles, le produit vectoriel $\vec{d_1} \wedge \vec{d_2}$ n'est pas égal au vecteur nul. On ne divise donc pas par zéro !

   (b) Le dessin correspond à la situation de deux droites gauches. si les droites étaient sécantes, les deux plans π_1 et π_2 serait confondus et la méthode décrite ci-dessus resterait valide. En effet, dans ce cas le vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$ serait perpendiculaire à $\vec{n}$ et ainsi la distance entre les droites serait nulle.

Distance d'une droite à un plan

Soit d une droite passant par P_1 et de vecteur directeur $\vec{d}$. Soit aussi π un plan passant par P_2 et de vecteur normal $\vec{n}$.

La *distance entre une droite et un plan* est la plus courte distance parmi toutes les distances entre un point de la droite et un point du plan.

On distingue deux cas.

1. Les vecteurs $\vec{d}$ et $\vec{n}$ sont perpendiculaires.

   Par conséquent, la droite et le plan sont parallèles ou confondus.

   La distance entre la droite et le plan est donnée par la distance du point P_1 (qui est un point de d) au plan π (et on utilise une formule vue précédemment).

   $$d(d, \pi) = d(P_1, \pi)$$

   On est donc ramené au problème du calcul de la distance d'un point à un plan.

   Attention à ne pas calculer la distance d'un point quelconque du plan à la droite d, car cela ne donnera pas forcément la bonne distance.

2. Les vecteurs $\vec{d}$ et $\vec{n}$ ne sont pas perpendiculaires.

   Par conséquent, la droite coupe forcément le plan. Ainsi la distance est nulle.

   $$d(d, \pi) = 0$$

Distance d'un plan à un plan

Soit π_1 un plan passant par P_1 et de vecteur directeur $\vec{n}_1$. Soit aussi π_2 un plan passant par P_2 et de vecteur normal $\vec{n}_2$.

La *distance entre deux plans* est la plus courte distance parmi toutes les distances entre un point du premier plan et un point du deuxième plan.

On distingue deux cas.

1. Les vecteurs normaux $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont parallèles.

   Par conséquent, les plans sont soit confondus, soit parallèles.

   La distance entre les deux plans est donnée par la distance du point P_1 (qui est un point de π_1) au plan π_2 (et on utilise une formule vue précédemment).

   $$d(\pi_1, \pi_2) = d(P_1, \pi_2)$$

   On est donc ramené au problème du calcul de la distance d'un point à un plan.

2. Les vecteurs normaux $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas parallèles.

   Par conséquent, les plans sont forcément sécants. Ainsi la distance est nulle.

   $$d(\pi_1, \pi_2) = 0$$

12.33 Cercle dans le plan

Définition

Un *cercle* est l'ensemble des points du plan qui sont à une même distance r, $r > 0$, appelée *rayon*, d'un point $C(x_c; y_c)$, appelé *centre*.

En notation ensembliste

$$\mathcal{C} = \{P \in \mathbb{R}^2 : d(C, P) = r\}$$

Équation cartésienne d'un cercle

En notant $P(x; y)$ les points sur le cercle, on peut transformer la condition $d(C, P) = r$.

$$d(C,P) = r \iff \|\overrightarrow{CP}\| = r \iff \left\| \begin{pmatrix} x - x_c \\ y - y_c \end{pmatrix} \right\| = r \iff \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} = r$$

Puisque le rayon r est positif, on conserve l'équivalence en élevant au carré. Ainsi

$$d(C, P) = r \iff (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

On voit donc que l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ centré en $C(x_c, y_c)$ et de rayon r est :

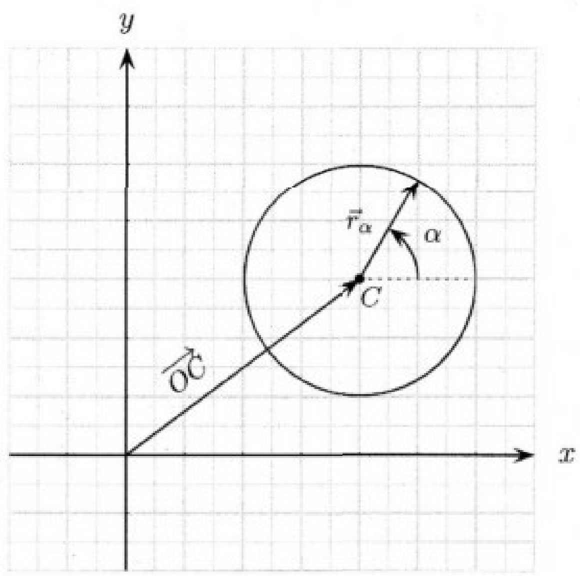
$$\boxed{\mathcal{C} : (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2}$$

*Équation paramétrique d'un cercle

Une équation paramétrique possible pour un cercle $\mathcal{C}$ centré en $C(x_c, y_c)$ et de rayon r est :

$$\boxed{\mathcal{C} : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \vec{r}_\alpha \quad \text{où} \quad \vec{r}_\alpha = r \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \alpha \in [0, 2\pi]}$$

$$\boxed{\mathcal{C} : \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & = & x_c & + & r\ \cos(\alpha) \\ y & = & y_c & + & r\ \sin(\alpha) \end{array} \right. \quad \text{avec } \alpha \in [0, 2\pi]}$$



12.34 Sphère dans l'espace

Définition

Une *sphère* est l'ensemble des points de l'espace qui sont à une même distance r, $r > 0$, appelée *rayon*, d'un point $C(x_c; y_c; z_c)$, appelé *centre*.

En notation ensembliste

$$\mathcal{S} = \{P \in \mathbb{R}^3 : d(C, P) = r\}$$

Équation cartésienne d'une sphère

En notant $P(x; y; z)$ les points sur le cercle, on peut transformer la condition $d(C, P) = r$.

$$d(C,P) = r \iff \|\overrightarrow{CP}\| = r \iff \left\| \begin{pmatrix} x - x_c \\ y - y_c \\ z - z_c \end{pmatrix} \right\| = r \iff \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2} = r$$

Puisque le rayon r est positif, on conserve l'équivalence en élevant au carré. Ainsi

$$d(C,P) = r \iff (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = r^2$$

On voit donc que l'équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$ centré en $C(x_c; y_c; z_c)$ et de rayon r est :

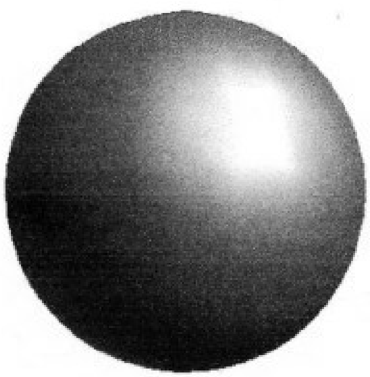
$$\boxed{\mathcal{S} : (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = r^2}$$

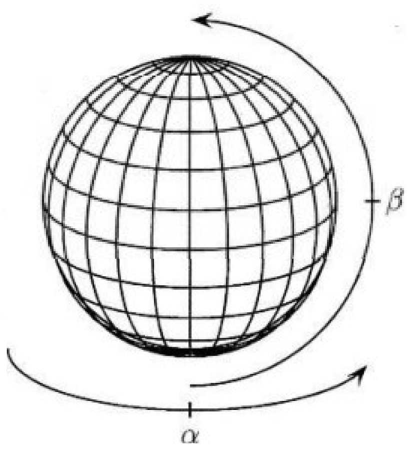
*Équation paramétrique d'une sphère

Une équation paramétrique possible pour une sphère $\mathcal{S}$ centrée en $C(x_c; y_c; z_c)$ et de rayon r est :

$$\boxed{\mathcal{S} : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \vec{r}_\alpha \quad \text{où} \quad \vec{r}_\alpha = r \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \alpha \in [0, 2\pi],\ \beta \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]}$$

$$\boxed{\mathcal{S} : \begin{cases} x = x_c + r\cos(\alpha)\cos(\beta) \\ y = y_c + r\sin(\alpha)\cos(\beta) \\ z = z_c + r\sin(\beta) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \alpha \in [0, 2\pi],\ \beta \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]}$$





12.35 Rappel : déterminant en dimension 2

Afin de pouvoir généraliser la notion de déterminant en dimension 2, le déterminant entre les deux vecteurs du plan

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

peut être conçu ainsi.

$$\begin{aligned} \det(\vec{v}, \vec{w}) &= \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \\ &= \quad v_1 w_2 \quad - \quad v_2 w_1 \end{aligned}$$

Une propriété du déterminant en dimension 2

En dimension 2, le déterminant détecte si deux vecteurs sont *colinéaires* (c'est-à-dire parallèles à une même droite).

$$\boxed{\det(\vec{v}, \vec{w}) = 0 \iff \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont colinéaires}}$$

12.36 Complément : déterminant en dimension 3

Il s'agit d'une généralisation de la technique vue en dimension 2. Le déterminant entre les trois vecteurs de l'espace

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

est défini comme suit.

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$= u_1 \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}$$

Une propriété du déterminant en dimension 3

En dimension 3, le déterminant détecte si deux vecteurs sont *coplanaires* (c'est-à-dire parallèles à un même plan).

$$\boxed{\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0 \iff \vec{u},\ \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont coplanaires}}$$

Le produit mixte et le déterminant en dimension 3

On considère les trois vecteurs suivants.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

La formule suivante permet de constater qu'un déterminant en dimension 3 est un produit mixte.

$$\boxed{\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \vec{u} \bullet (\vec{v} \wedge \vec{w})}$$

Preuve

En effet :

$$\begin{aligned} \vec{u} \bullet (\vec{v} \wedge \vec{w}) &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} +(v_2w_3 - v_3w_2) \\ -(v_1w_3 - v_3w_1) \\ +(v_1w_2 - v_2w_1) \end{pmatrix} \\ &= u_1(v_2w_3 - v_3w_2) - u_2(v_1w_3 - v_3w_1) + u_3(v_1w_2 - v_2w_1) \\ &= u_1 \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

□

12.37 Sur le cercle inscrit à un triangle

Théorème

On considère le cercle inscrit à un triangle ABC. Notons a, b, c les longueurs respectives des côtés opposés aux sommets A, B, C et $P = a + b + c$ le périmètre du triangle. Alors le centre Ω et le rayon r du cercle inscrit sont donnés par

$$\overrightarrow{O\Omega} = \frac{1}{P}\left(a\,\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB} + c\,\overrightarrow{OC}\right) \quad \text{et} \quad r = 2 \cdot \frac{\text{aire du triangle}}{\text{périmètre du triangle}}$$

Preuve

L'unicité du cercle inscrit vient du fait que le centre Ω est à l'intersection des bissectrices intérieures au triangle.

Montrons que le cercle est soit inscrit, soit exinscrit[8] au triangle en montrant que la distance de Ω à n'importe quelle droite contenant une arête du triangle vaut bien le rayon annoncé. Comme Ω est une moyenne pondérée des sommets du triangle, alors Ω est bien à l'intérieur du triangle et il s'agit du centre du cercle inscrit.

Commençons par écrire le vecteur $\overrightarrow{A\Omega}$ à l'aide de la règle de Chasles en utilisant le fait que $a - P = -b - c$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A\Omega} &= \overrightarrow{O\Omega} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{P}\left((a-P)\,\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB} + c\,\overrightarrow{OC}\right) \\
&= \frac{1}{P}\left((-b-c)\,\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB} + c\,\overrightarrow{OC}\right) \\
&= \frac{1}{P}\left(b\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) + c\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right)\right) \\
&= \frac{1}{P}\left(b\,\overrightarrow{AB} + c\,\overrightarrow{AC}\right)
\end{aligned}$$

On peut maintenant calculer la distance signée entre le point Ω et la droite (AB) en utilisant les propriétés du déterminant (voir page 150).

$$\begin{aligned}
\delta(\Omega,(AB)) &= \frac{\det(\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{AB})}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\det\left(\frac{1}{P}\left(b\,\overrightarrow{AB} + c\,\overrightarrow{AC}\right), \overrightarrow{AB}\right)}{c} \\
&= \frac{b}{Pc}\underbrace{\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})}_{=0} + \frac{c}{Pc}\det(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \\
&= \frac{1}{P}\det(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{2}{P} \cdot \text{Aire signée du triangle } ABC
\end{aligned}$$

Ainsi, la distance est égale à $2\frac{\text{aire du triangle}}{\text{périmètre du triangle}}$. Et, comme la conclusion est indépendante de la droite utilisée (ici (AB)), on aura exactement la même réponse pour les deux autres droites. Ainsi, on a le rayon et le centre désiré. □

8. La définition de cercle exinscrit dépasse le cadre de ce cours ; le lecteur intéressé pourra se référer à wikipédia `http://fr.wikipedia.org/wiki/Cercles_inscrit_et_exinscrits_d'un_triangle`. Il y trouvera notamment une image très explicite.

12.38 Sur le cercle inscrit à un triangle

On retrouve exactement le même énoncé qu'en géométrie plane. La preuve change un petit peu, car on doit utiliser la norme du produit vectoriel au lieu du déterminant, ce qui ne change rien car les propriétés du déterminant utilisées dans la preuve sont aussi vérifiées pour le produit vectoriel en géométrie spatiale (comparer les pages 150 et 151).

12.40 Sur la sphère inscrite à un tétraèdre

Théorème

On considère la sphère inscrite à un tétraèdre $ABCD$. Notons S_a, S_b, S_c, S_d les surfaces respectives des faces opposées aux sommets A, B, C, D et $S = S_a + S_b + S_c + S_d$ la surface du tétraèdre. Alors le centre Ω et le rayon r de la sphère inscrite sont donnés par

$$\overrightarrow{O\Omega} = \frac{1}{S}\left(S_a\overrightarrow{OA} + S_b\overrightarrow{OB} + S_c\overrightarrow{OC} + S_d\overrightarrow{OD}\right) \quad \text{et} \quad r = 3 \cdot \frac{\text{volume du tétraèdre}}{\text{surface du tétraèdre}}$$

Preuve

L'unicité de la sphère inscrite vient du fait que le centre Ω est à l'intersection des plans bissecteurs intérieurs au tétraèdre.

Montrons que la sphère est soit inscrite, soit exinscrite au tétraèdre en montrant que la distance de Ω à n'importe quel plan contenant une face du tétraèdre vaut bien le rayon annoncé. Comme Ω est une moyenne pondérée des sommets du tétraèdre, alors Ω est bien à l'intérieur du tétraèdre et il s'agit du centre de la sphère inscrite.

Commençons par écrire le vecteur $\overrightarrow{A\Omega}$ à l'aide de la règle de Chasles en utilisant le fait que $S_a - S = -S_b - S_c - S_d$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A\Omega} &= \overrightarrow{O\Omega} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{S}\left((S_a - S)\,\overrightarrow{OA} + S_b\overrightarrow{OB} + S_c\overrightarrow{OC} + S_d\overrightarrow{OD}\right) \\
&= \frac{1}{S}\left((-S_b - S_c - S_d)\,\overrightarrow{OA} + S_b\overrightarrow{OB} + S_c\overrightarrow{OC} + S_d\overrightarrow{OD}\right) \\
&= \frac{1}{S}\left(S_b\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) + S_c\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right) + S_d\left(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}\right)\right) \\
&= \frac{1}{S}\left(S_b\overrightarrow{AB} + S_c\overrightarrow{AC} + S_d\overrightarrow{AD}\right)
\end{aligned}$$

On peut maintenant calculer la distance signée entre le point Ω et le plan (ABC) en utilisant les propriétés du produit scalaire (voir page 138).

$$\begin{aligned}
\delta(\Omega, (ABC)) &= \frac{\overrightarrow{A\Omega} \bullet \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|} = \frac{\frac{1}{S}\left(S_b\overrightarrow{AB} + S_c\overrightarrow{AC} + S_d\overrightarrow{AD}\right) \bullet \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}}{2S_d} \\
&= \frac{S_b}{S\ 2S_d}\underbrace{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}}_{=0} + \frac{S_c}{S\ 2S_d}\underbrace{\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}}_{=0} + \frac{S_d}{S\ 2S_d}\overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \\
&= \frac{1}{2S}\overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \frac{6}{2S} \cdot \text{Volume signé du tétraèdre } ABCD
\end{aligned}$$

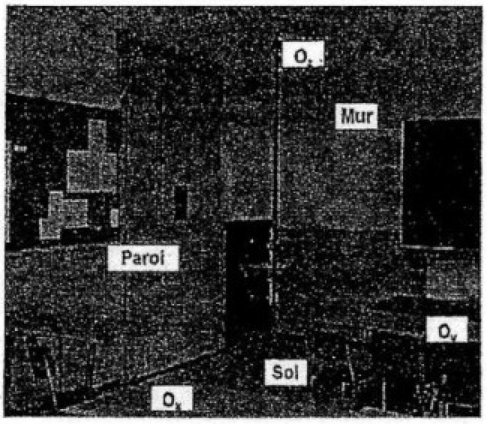
Ainsi, la distance est égale à $3\frac{\text{volume du tétraèdre}}{\text{surface du tétraèdre}}$. Et, comme la conclusion est indépendante du plan utilisé (ici (ABC)), on aura exactement la même réponse pour les trois autres plans. On a donc le rayon et le centre désiré. □

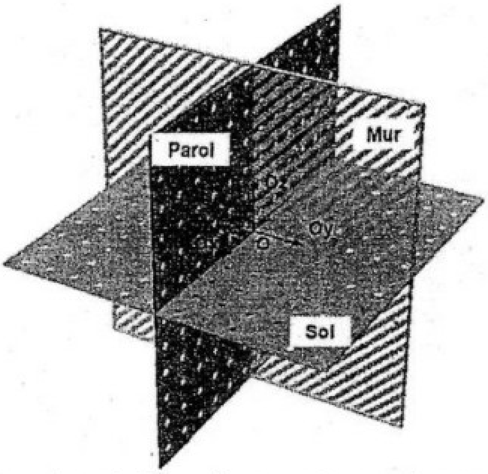
12.41 Constructions dans l'espace

Pour ce chapitre, on estime connues les notions vues dans l'espace à 2 dimensions, notamment la notion de point, de vecteur, de droite, d'indépendance linéaire, de base et de repère orthonormé ainsi que la notion de plan.

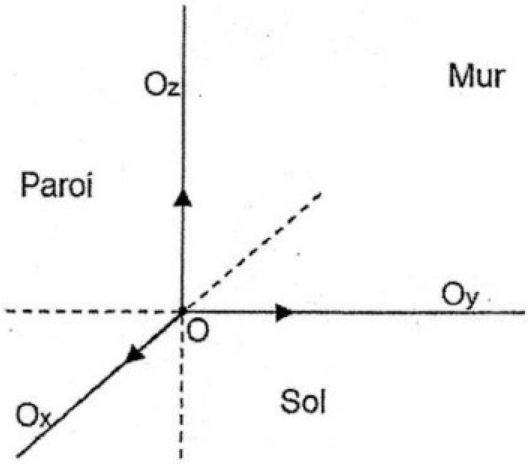
Par soucis de simplification, nous n'aborderons que la géométrie à 3 dimensions basées sur 3 vecteurs orthogonaux que nous nommerons $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ et $\vec{e_3}$.

A l'aide d'un point fixe, noté O et nommé origine, nous pouvons définir 3 axes, Ox, Oy et Oz.





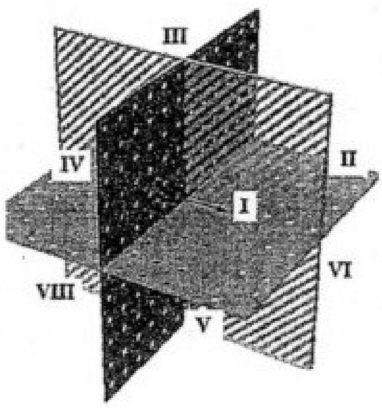
Représentation d'un repère orthonormé 3D à l'aide du logiciel Cabri 3D. Bien entendu, il s'agit d'une représentation en 2D.



Représentation d'un repère orthonormé 3D à l'aide du "papier-crayon". Bien entendu, il s'agit d'une représentation en 2D.
ATTENTION : Dans cette représentation, le parallélisme est conservé, pas les angles

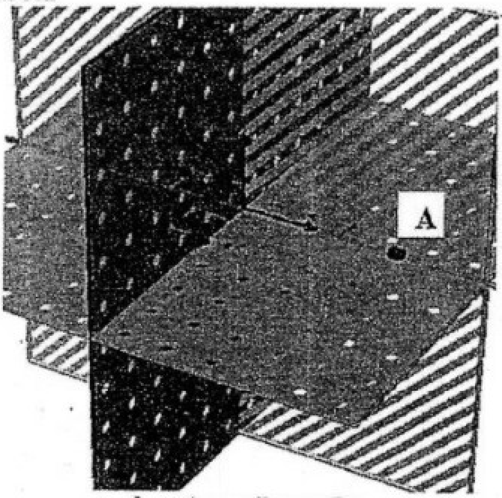
On appelle "**Sol**", l'ensemble des points P tels que $\overrightarrow{OP} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$ où $x,y \in \mathbb{R}$, les coordonnées de P sont P(x;y;0).
On appelle "**Mur**", l'ensemble des points P tels que $\overrightarrow{OP} = y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$ où $y,z \in \mathbb{R}$, les coordonnées de P sont P(0;y;z).
On appelle "**Paroi**", l'ensemble des points P tels que $\overrightarrow{OP} = x\vec{e_1} + z\vec{e_3}$ où $x,z \in \mathbb{R}$, les coordonnées de P sont P(x;0;z).
Ces 3 ensembles sont appelés **plans de référence**.

L'espace, par ces 3 plans de référence est divisé en 8 **octants**

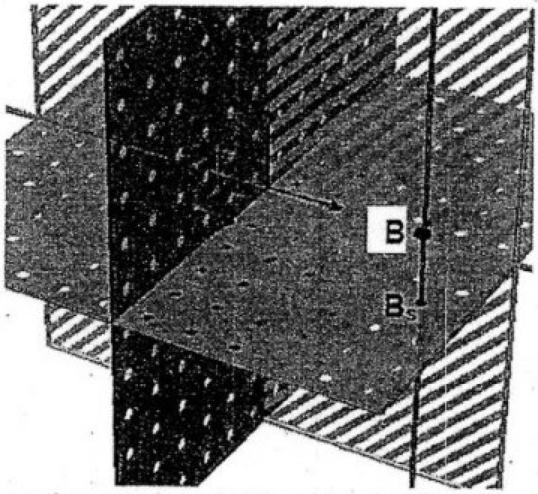


12.41.1 Représentation d'un point

En observant les 2 points ci-dessous, on voit que pour A sur l'axe Oy et pour B, légèrement en dessus du sol, leur représentation sur la feuille de papier les placent apparemment au même endroit.

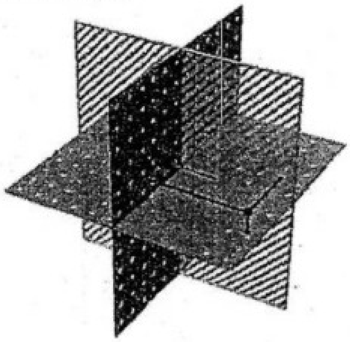


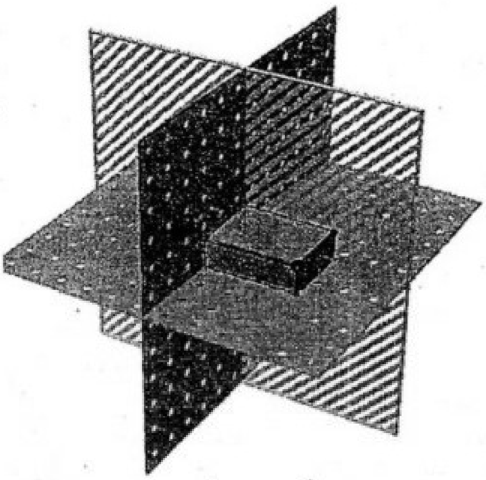
A est sur l'axe Oy

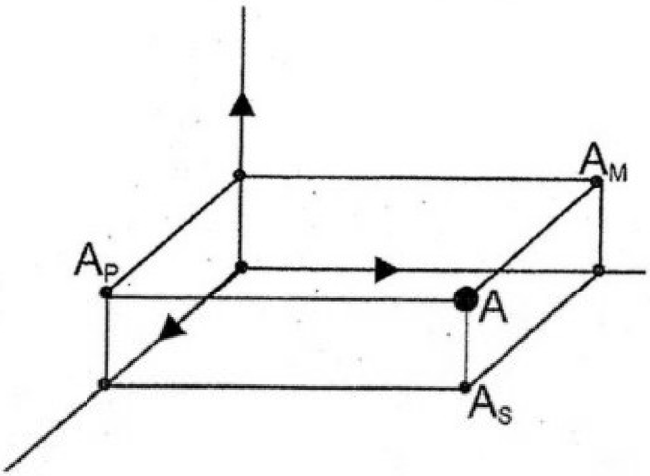


B est en-dessus du sol, Sa projection Bs aide à s'en rendre compte

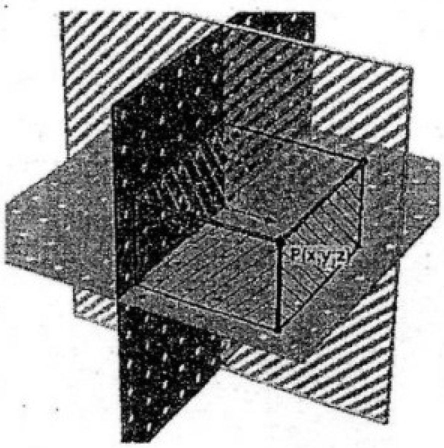
Il n'est pas possible de représenter un point en 3D par un seul point sur le papier (le papier est en 2D). On représente donc un point en 3D à l'aide l'une de ses **projections** dans un des 3 plans de référence. La projection du point B dans le sol se note Bs et est l'intersection de la droite parallèle à Oz passant par B et le sol.
Chaque point a donc 3 projections notées à l'aide des indices "M", "P" et "S", donc A_M, A_P et A_S pour le point A







On peut créer un parallélépipède rectangle dit **parallélépipède de construction** pour chaque point, les 8 sommets étant l'origine, le point lui-même, ses projections dans les plans de référence et sur les axes (qui sont en fait les projections de ses projections).

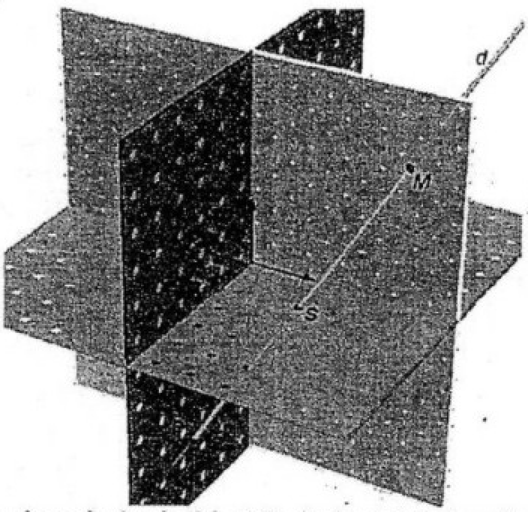


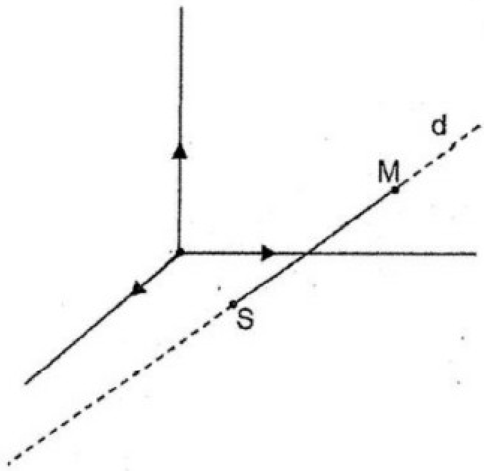
Par analogie avec la géométrie 2D, tout point P(x;y;z) engendre un rayon- vecteur $\overline{OP} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$ que l'on note $\overline{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

x,y,z sont les **coordonnées** du point P et les **composantes** du vecteur $\overline{OP}$.

12.41.2 Représentation d'une droite

Pour que la représentation d'une droite sur papier soit univoque, il faut que 2 de ses points soient représentés sans ambigüité. L'utilisation des **traces** d'une droite permet de représenter avantageusement une droite.
(Définition : les **traces** d'une droite sont les intersections de la droite et des plans de référence, on les note M, P et S)



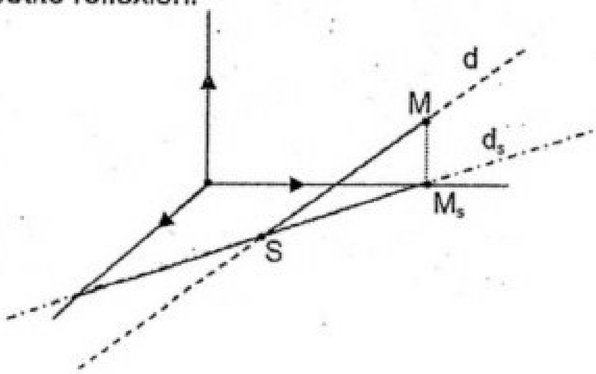


Avec les choix de M et S, le logiciel dessine d et place P.

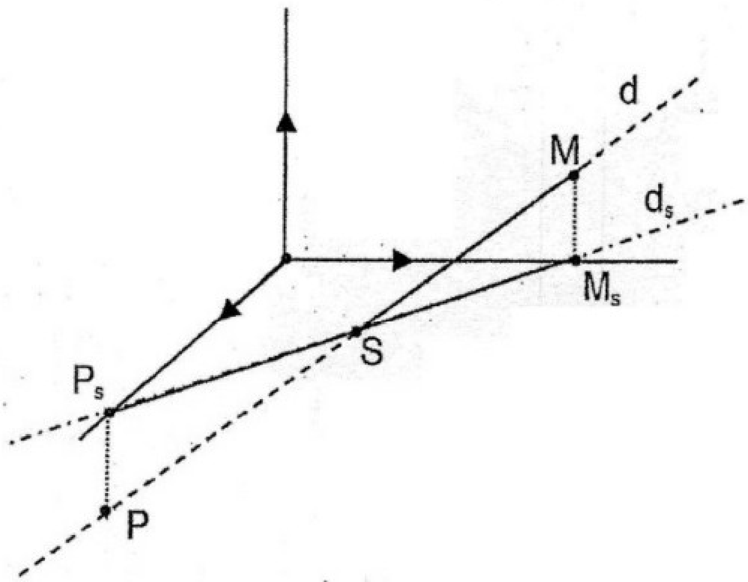
Avec les choix de M et S, comment placer P ?

Comme on le voit sur la représentation "papier-crayon" ci-dessus, la question de la position de la 3ème trace à partir des 2 premières nécessite une petite réflexion.
Il faut d'abord définir la notion de projection de droite.

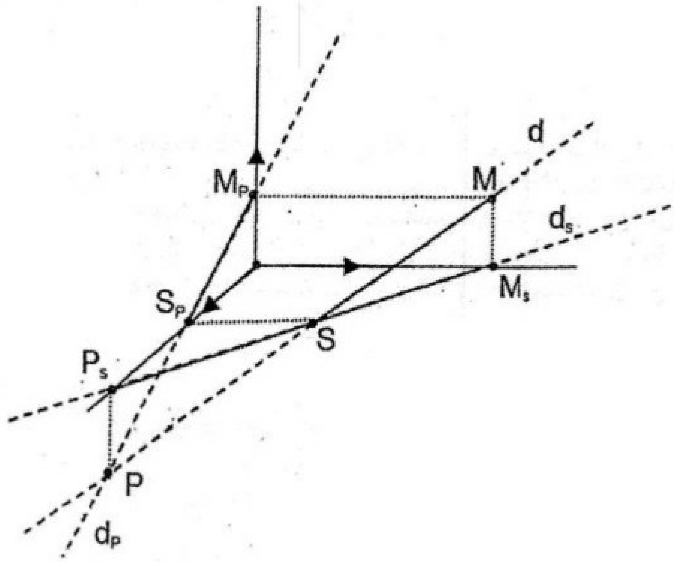
La **projection d'une droite** d dans le sol, notée d_s est la droite formée de la projection dans le sol des points de la droite d, dans l'exemple ci-dessus, il n'est pas difficile de positionner M_s et S_s (S_s = S !!) et donc de dessiner la projection d_s .
NB : Toute partie de droite non située dans le premier octant est **traitillée**.



L'intersection de d_s avec Ox est P_s et celle avec Oy est M_s. P_s permet de positionner P



NB : Bien entendu, on peut aussi définir la projection d'une droite dans le mur et dans la projection d'une droite dans la paroi. Pa exemple pour d_p, il faut positionner 2 points parmi M_p, S_p et P

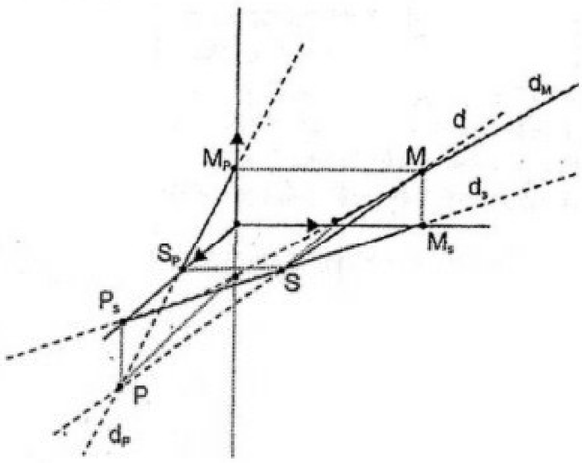


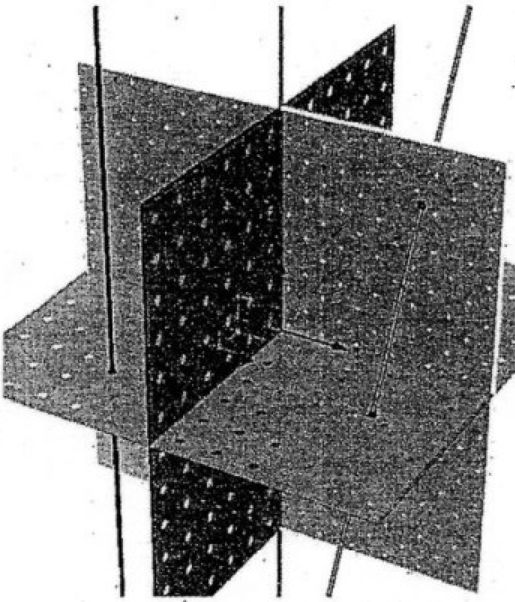
Il n'est pas souhaitable de représenter sur un même dessin une droite d avec ces 3 projections

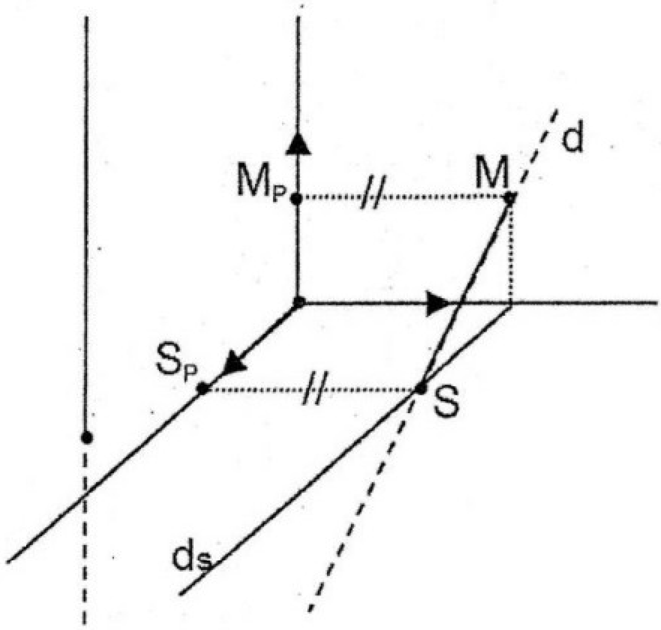
Il n'en demeure pas moins qu'il faut se souvenir que :

- Les projections des traces d'une droite sont sur les axes.
- Une droite coupe ses projections en ses traces

et être capable d'appliquer ces 2 principes avec n'importe lequel des 3 plans de référence.







Quelques cas particuliers de droites :

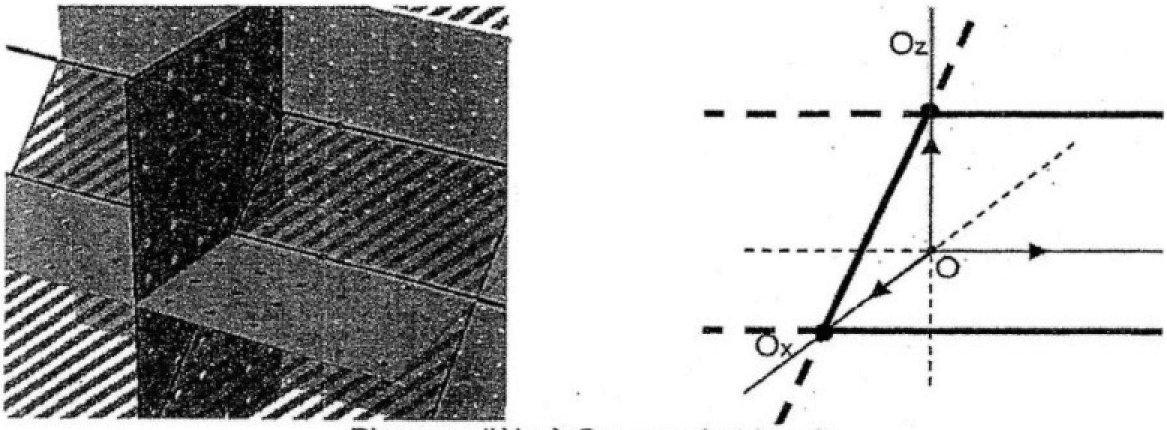
- Si une droite est parallèle à un des axes, la droite n'a alors qu'une trace (ci-dessus, cas d'une droite verticale)
- Si une droite est parallèle à un des plans de référence (ci-dessus pas d'intersection entre la droite et la paroi) , la droite n'a alors que deux traces.
- Si une droite passe par l'origine elle n'a qu'une seule trace (L'origine !!), cas non représenté ci- dessus.

12.41.3 Représentation d'un plan

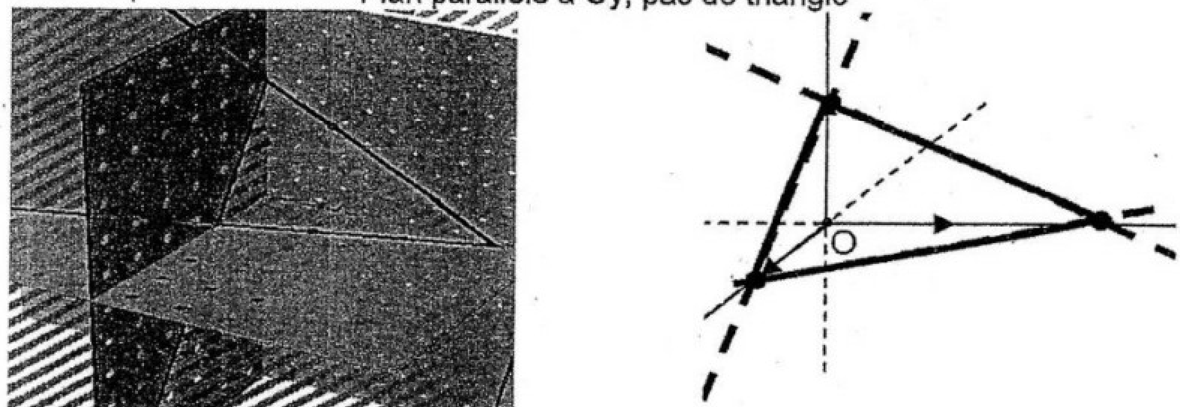
Définition :

On appelle **traces du plan** dans les plans de référence les intersections du plan avec les plans de référence. Il s'agit de droites
Par analogie les traces du plan sur les axes sont les intersections du plan avec les axes de référence. Il s'agit de points.
On représente un plan dans un repère par ses traces. S'il n'y a pas de parallélisme du plan avec les axes et/ou les plans de référence, les 3 traces dans les plans de référence forment un triangle dont les sommets sont les traces sur les axes

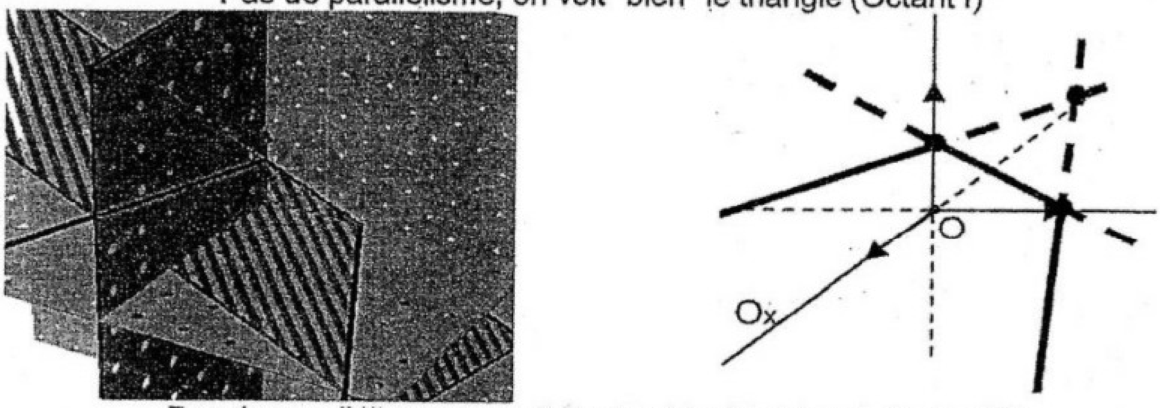
Découvrons quelques exemples …



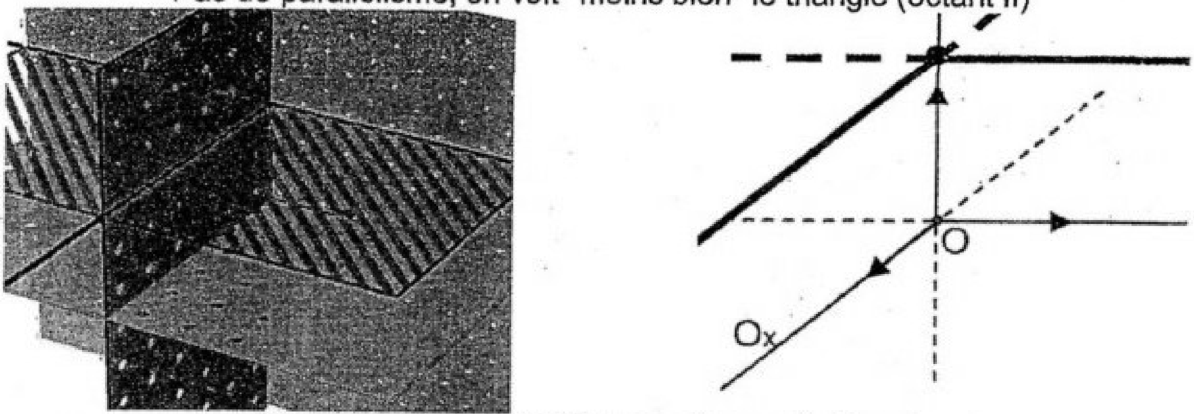
Plan parallèle à Oy, pas de triangle



Pas de parallélisme, on voit "bien" le triangle (Octant I)



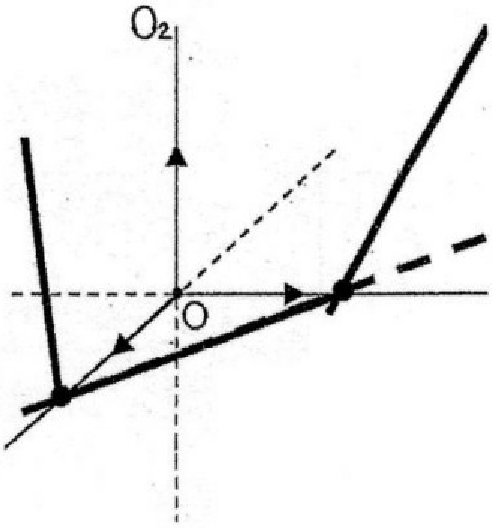
Pas de parallélisme, on voit "moins bien" le triangle (octant II)



Plan horizontal (parallèle au sol), pas de triangle

La représentation partielle des "traces" peut induire en erreur. Par exemple, ci-contre on peut penser que les 3 droites sont les traces d'un plan ....
Ce qui n'est pas le cas !!

Il est laissé au lecteur le soin d'en découvrir la raison

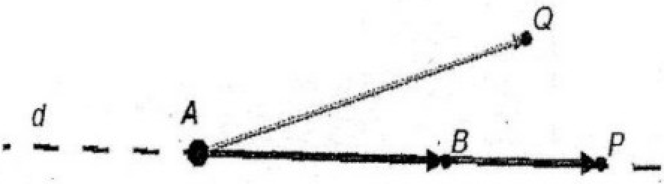


12.41.4 Equations

1. Droite

Définition :

Soit A et B 2 points.
Soit $\vec{v} = \overline{AB}$



On appelle **droite** contenant A et B l'ensemble des points P tels que :

$$\overline{AP} = \lambda \cdot \vec{v} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} .$$

NB : On dit $\overline{AP}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** ou parallèles
On note généralement une droite à l'aide de la lettre d

Par Chasles, $\overline{AP} = \overline{OP} - \overline{OA}$ et donc :

$$\boxed{P \in d \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overline{OP} = \overline{OA} + \lambda \cdot \vec{v}}$$ *(équation paramétrique vectorielle de d)*

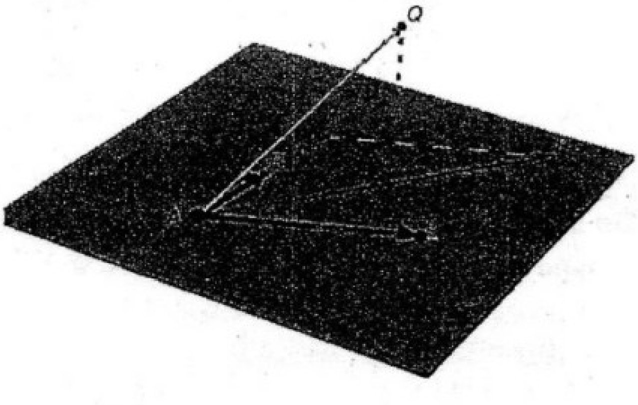
Observons qu'avec un point Q n'appartenant pas à d on ne peut pas écrire $\overline{OQ} = \overline{OA} + \lambda \cdot \vec{v}$.

On définit la droite d par 3 **équations paramétriques** scalaires ; $\boxed{d: \begin{cases} x = a_1 + \lambda \cdot v_1 \\ y = a_2 + \lambda \cdot v_2 \\ z = a_3 + \lambda \cdot v_3 \end{cases}}$

où :

- $P(x;y;z)$ est le point variable de d,
- $A(a_1; a_2; a_3)$ est un point donné de d,
- $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ est un vecteur donné parallèle à d

2. Plan



Définition :

Soit A; B et C, 3 points non alignés.
Soit $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$.

On appelle **plan** contenant A,B et C l'ensemble des points P tels que :

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w} \text{ où } \lambda, \mu \in \square .$$

NB : On dit : Les 3 vecteurs $\overrightarrow{AP}, \vec{v}, \vec{w}$ sont **coplanaires**
On note généralement les plans à l'aide de la lettre π

Par Chasles, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$ et donc :

$$\boxed{P \in \pi \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \square \text{ tels que } \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w}}$$ *(équation paramétrique vectorielle de π)*

Observons qu'avec un point Q n'appartenant pas à π on ne peut écrire $\overrightarrow{AQ} = \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w}$.

On définit le plan π par 3 **équations paramétriques** scalaires ; $\boxed{\pi : \begin{cases} x = a_1 + \lambda \cdot v_1 + \mu \cdot w_1 \\ y = a_2 + \lambda \cdot v_2 + \mu \cdot w_2 \\ z = a_3 + \lambda \cdot v_3 + \mu \cdot w_3 \end{cases}}$

où :

- $P(x;y;z)$ est le point variable de π,
- $A(a_1; a_2; a_3)$ est un point donné de π,
- $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ est un vecteur donné parallèle à π *("parallèle à un segment AB inclus dans π")*
- $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ est un vecteur donné parallèle à π *("parallèle à un segment AC inclus dans π")*

Remarque :

On constate qu'il y a une inconnue de plus que d'équations (4 contre 3) pour les équations paramétriques de la droite et deux inconnues de plus que d'équations (5 contre 3) pour les équations paramétriques du plan. On parle de **degré de liberté**, il y a 1 degré de liberté pour la droite : la droite est un ensemble à 1 dimension; alors qu'il y a 2 degrés de liberté pour le plan : le plan est un ensemble à 2 dimensions.

3. Déterminant d'ordre 3

Soit 3 vecteurs $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ et $\vec{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$

On dit que $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont **linéairement dépendants** si et seulement si $\vec{c}$ peut être exprimé comme combinaison linéaire de $\vec{a}$ et de $\vec{b}$, Ces vecteurs sont alors coplanaires.
Si $\vec{c}$ ne peut pas être exprimé comme combinaison linéaire de $\vec{a}$ et de $\vec{b}$, on dit que $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont **linéairement indépendants** . Ces 3 vecteurs forment alors une **base** de l'espace à 3 dimensions et ne sont pas coplanaires

La notion de dépendance linéaire *(ou d'indépendance linéaire)* est fondamentale en géométrie : elle détermine la dimension de l'espace dans lequel on travaille. Le fait qu'il est possible de trouver au maximum 3 vecteurs linéairement indépendants dans l'espace définit que l'espace est à 3 dimensions.
Pour déterminer si 3 vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont linéairement dépendants ou indépendants il faut trouver α et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{c}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b}$. Si cela est possible les 3 vecteurs sont linéairement dépendants, sinon, ils sont linéairement indépendants.

On peut montrer que le nombre $a_1\cdot b_2\cdot c_3+b_1\cdot c_2\cdot a_3+c_1\cdot a_2\cdot b_3-a_3\cdot b_2\cdot c_1-b_3\cdot c_2\cdot a_1-c_3\cdot a_2\cdot b_1$ permet de répondre à la question "$\vec{c}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b}$ a-t-elle une solution ?".
Ce nombre est appelé **déterminant** de $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ et est noté $D\left(\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right)$.
Pour ce souvenir de ce nombre, on utilise le schéma ci-dessous (règle de Sarrus) :

$$\left.\begin{matrix}-a_3b_2c_1\\-b_3c_2a_1\\-c_3a_2b_1\end{matrix}\right\}=-a_3\cdot b_2\cdot c_1-b_3\cdot c_2\cdot a_1-c_3\cdot a_2\cdot b_1$$

$$D\left(\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}\underset{\text{notation}}{=}\begin{matrix}a_1&b_1&c_1&a_1&b_1\\a_2&b_2&c_2&a_2&b_2\\a_3&b_3&c_3&a_3&b_3\end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix}+c_1a_2b_3\\+b_1c_2a_3\\+a_1b_2c_3\end{matrix}\right\}=a_1\cdot b_2\cdot c_3+b_1\cdot c_2\cdot a_3+c_1\cdot a_2\cdot b_3$$

$$\Rightarrow\boxed{D\left(\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right)=a_1\cdot b_2\cdot c_3+b_1\cdot c_2\cdot a_3+c_1\cdot a_2\cdot b_3-a_3\cdot b_2\cdot c_1-b_3\cdot c_2\cdot a_1-c_3\cdot a_2\cdot b_1}$$

Se souvenir :

$$\boxed{D\left(\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right)\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right)\text{ est une base}\\\vec{a};\vec{b};\vec{c}\text{ sont linéairement indépendants}\\\vec{a};\vec{b};\vec{c}\text{ ne sont pas coplanaires}\end{cases}}$$

NB: On peut montrer $\left|D\left(\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right)\right|$ est le volume du parallélépipède engendré par $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$.

4. Equation cartésienne d'un plan

Soit un plan π donné (comme ci-dessus) par 3 de ses points (non alignés) A; B et C.
On construit les vecteurs $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{AC}$

On a $P\in\pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires donc : $\boxed{P\in\pi \Leftrightarrow D\left(\overrightarrow{AP};\vec{v};\vec{w}\right)=0}$

Equation cartésienne du plan π

<u>Exemple</u> de recherche d'une équation cartésienne :
Soit le plan π contenant les points A(1;3;2), B(2;5;0) et C(2;-1;3)

- $\vec{v}=\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$
- $D\left(\overrightarrow{AP};\vec{v};\vec{w}\right)=\begin{vmatrix}x-1 & 1 & 1\\ y-3 & 2 & -4\\ z-2 & -2 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}x-1 & 1\\ y-3 & 2\\ z-2 & -2\end{matrix}=2(x-1)-4(z-2)-2(y-3)-2(z-2)-8(x-1)-(y-3)$

$\Rightarrow D\left(\overrightarrow{AP};\vec{v};\vec{w}\right)=-6(x-1)-6(z-2)-3(y-3)=-6x-3y-6z+27=0$

$\Rightarrow$ Equation cartésienne de $\boxed{\pi: 2x+y+2z+9=0}$ (*le lecteur peut vérifier que* A,B et C $\in\pi$)

<u>NB</u> : Une équation cartésienne de plan est une équation à 3 inconnues, on retrouve les 2 degrés de liberté mentionnés ci-dessus
Une équation de la forme "x – 5 = 0" ou de la forme "2x – y + 1 = 0" représente, dans l'espace à 3 dimensions, un plan car il y a bien 2 degrés de liberté !!
<u>Corolaire</u> : Il n'y a pas d'équation cartésienne de droite en 3 dimensions

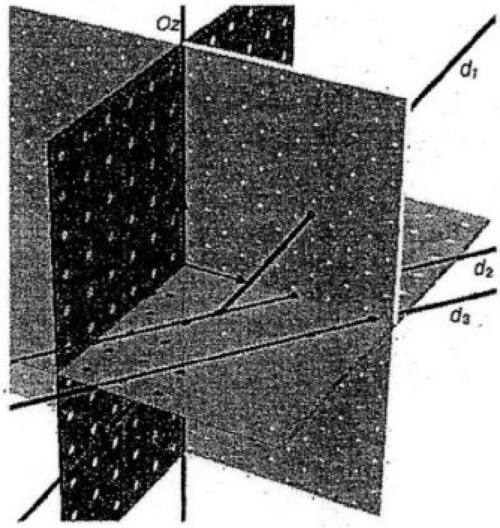
Il est fortement conseillé (dans la mesure du possible) de privilégier la forme cartésienne au détriment de la forme paramétrique.

12.41.5 Intersections

Nous considérons 4 cas

- 1. Intersection de deux droites
- 2. Intersection de deux plans
- 3. Intersection d'une droite et d'un plan
- 4. Intersection de 3 plans

1. Intersection de deux droites



Remarque préliminaire :

2 droites distinctes peuvent être :

- sécantes (ci-contre d_1 et d_2),
- parallèles (ci-contre d_2 et d_3),
- gauches (ci-contre Oz et n'importe laquelle des droites d_1 à d_3).

On parle de **position relative** de 2 droites

Par définition 2 droites sont dites **gauches** si elles ne sont ni sécantes, ni parallèles, donc **pas coplanaires**.

Remarque :

Il n'est en général facile de déterminer si 2 droites données sont parallèles ou non parallèles; par contre il est plus délicat de déterminer si 2 droites données sont gauches ou sécantes.

Exemple : Détermination de la position relative de 2 droites

Soit $d_1 : \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = \quad \lambda \\ z = -1-\lambda \end{cases}$ et $d_2 : \begin{cases} x = 5+\mu \\ y = 1+\mu \\ z = 4-\mu \end{cases}$, on voit de suite que ces 2 droites ne sont pas parallèles.

1ère méthode : Recherche de l'éventuelle intersection :

En comparant les 2 premières équations de chacune des droites on a $\left| \begin{array}{l} 1+2\lambda = 5+\mu \\ \lambda = 1+\mu \end{array} \right. \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} \lambda = 3 \\ \mu = 2 \end{array} \right.$

En calculant le "z" de l'éventuel point d'intersection, on obtient ici $\left\langle \begin{array}{ll} z_1 = -4 & (\text{pour } d_1) \\ z_2 = 2 & (\text{pour } d_2) \end{array} \right.$

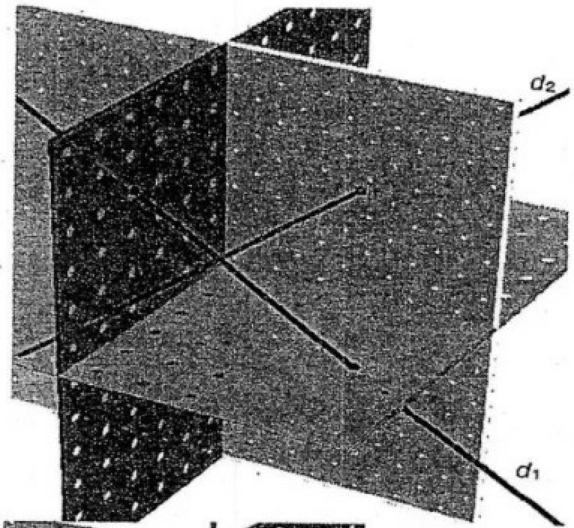
Comme $z_1 \neq z_2$ il n'y a pas d'intersection et ces 2 droites sont gauches.

2ème méthode : Par calcul d'un déterminant

Le déterminant $D\left(\overrightarrow{A_1A_2};\overrightarrow{v_1};\overrightarrow{v_2}\right)$ permet de différencier les cas où les droites sont coplanaires ou non, donc si elles sont sécantes ou gauches. NB : $A_1(1;0;1)$, $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A_2(5;1;4)$ et $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

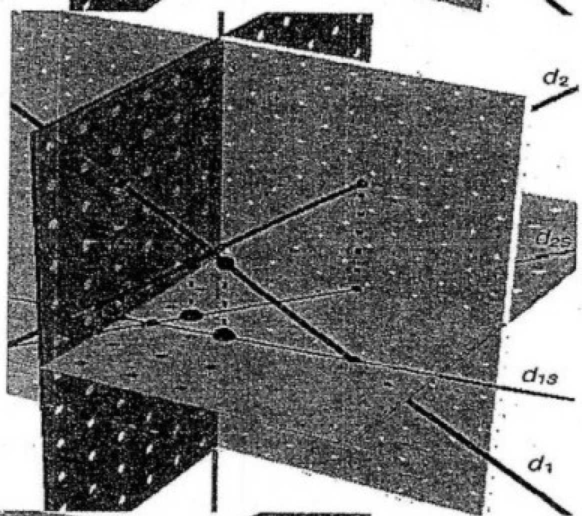
<u>3ème méthode</u> : Graphiquement

On représente les droites dans un repère
(Attention, les droites montrées ici ne sont pas les mêmes que dans l'exemple numériques ci-dessus).

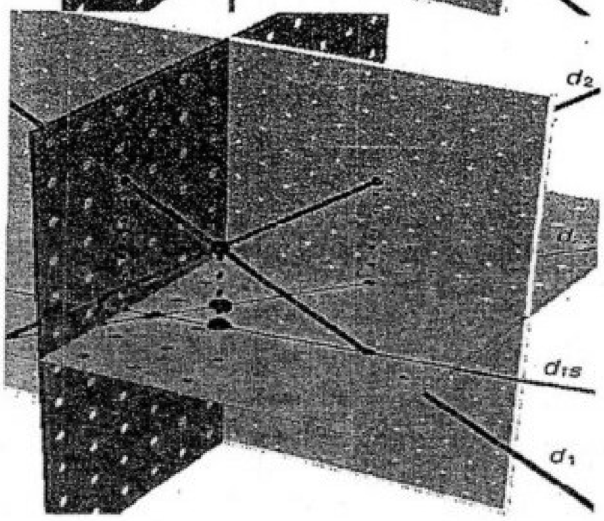


Impossible de se prononcer sans autres sur la position relative des 2 droites.

Il y a bien un "point" sur la feuille de papier qui pourrait être l'intersection, mais ... ??



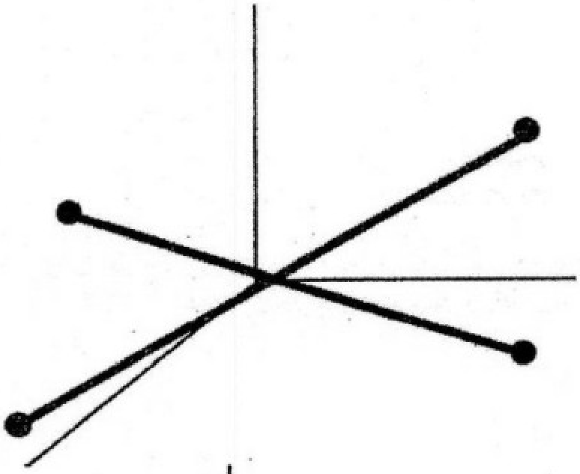
A l'aide de projections (dans le sol par exemple), on voit que ...



...
il y a 2 projections distinctes dans le sol pour le "point" sur la feuille.

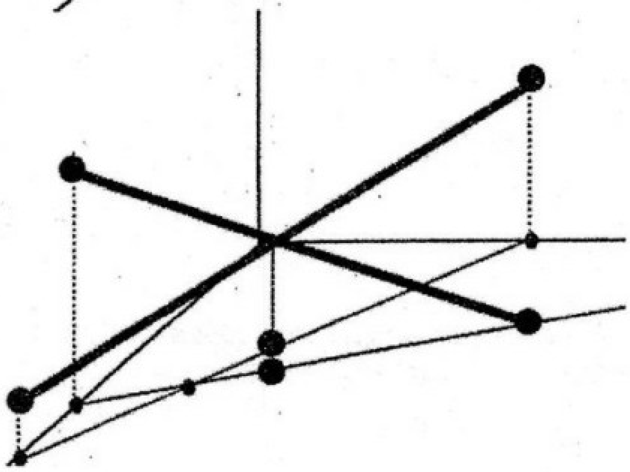
Pour que les droites soient sécantes il aurait fallu que la projection du point d'intersection corresponde à l'intersection des projections des droites.

Construction avec "papier-crayon"



Impossible de se prononçer sans autres sur la position relative des 2 droites.

Il y a bien un "point" sur la feuille de papier qui pourrait être l'intersection, mais ... ??



A l'aide de projections (dans le sol par exemple), on voit que ...

il y a 2 projections distinctes dans le sol pour le "point" sur la feuille.

Pour que les droites soient sécantes il aurait fallu que la projection du point d'intersection corresponde à l'intersection des projections des droites.

2. Intersection de 2 plans

Lorsque l'on recherche l'éventuelle intersection de 2 plans, on peut se trouver dans l'un des 2 cas suivants :

a) Les 2 plans sont parallèles
b) Les 2 plans sont sécants selon une droite.

(Situation qui a une certaine analogie avec les positions relatives de 2 droites en 2 dimensions)

Pour déterminer la position relative et donc l'(les) éventuelle(s) intersections, nous allons voir 2 méthodes :

1ère méthode : Algébriquement

Nous partons du principe que les 2 plans sont donnés chacun par une équation cartésienne, nous disposons donc de 2 équations à 3 inconnues (Tiens, un degré de liberté ...)
Si on pense à la droite i d'intersection des 2 plans (celle que l'on doit trouver donc), on peut supposer que i coupe le sol en $S(x_S;y_S;0)$ et donc on peut en remplaçant z par 0 dans les 2 équations, calculer x_S et y_S et donc calculer le point S
De même on peut imaginer que i coupe le mur en $M(0;\ y_M.\ z_M)$ et de manière analogue calculer le point M.
Une fois que 2 points de i sont connus, la droite i elle-même est connue.
Objection ?
Bien sûr ... il n'est pas impossible qu'au cas où la droite i soit parallèle à un axe ou/et à un plan de référence, ou lorsqu'elle passe par l'origine, la recherche de 2 points puisse être moins idyllique que la démarche proposée ci-dessus, mais le principe reste le même, il faut trouver 2 points et choisir une des coordonnées pour chacun des points.
Une variante intéressante consiste à poser $x = \lambda$, ce qui permet de trouver les équations de i sans passer par les points (*l'objection ci-dessus demeure toutefois aussi dans ce cas*)

Si les 2 plans sont parallèles, le calcul n'aboutira pas ... mais dans ce cas une étude rapide des équations données pour les plans permet de détecter le parallélisme.

Exemple où 2 plans données sont parallèles :

Si $\pi_1 : 2x - y + 3z + 6 = 0$ et $\pi_2 : 4x - 2y + 6z - 1 = 0$, on peut se convaincre facilement que ses 2 plans sont parallèles car on a :

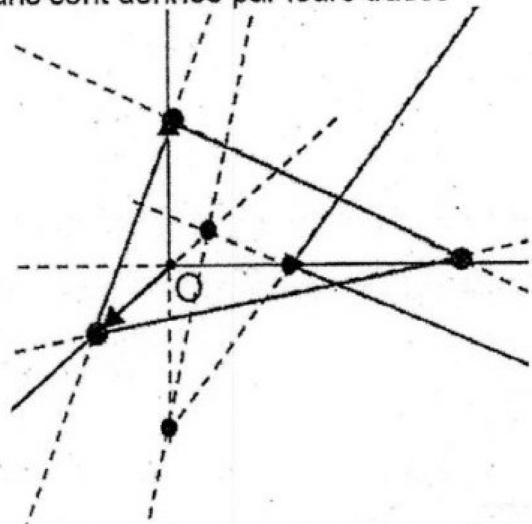
- Pour $\pi_1 : 2x - y + 3z = -6$
- Pour $\pi_2 : 2x - y + 3z = \frac{1}{2}$,

et comme 2x-y+3z ne peut valoir simultanément "-6" et "$\frac{1}{2}$", il n'a a pas de P(x;y;z) satisfaisant les 2 solutions, donc les 2 plans sont parallèles.

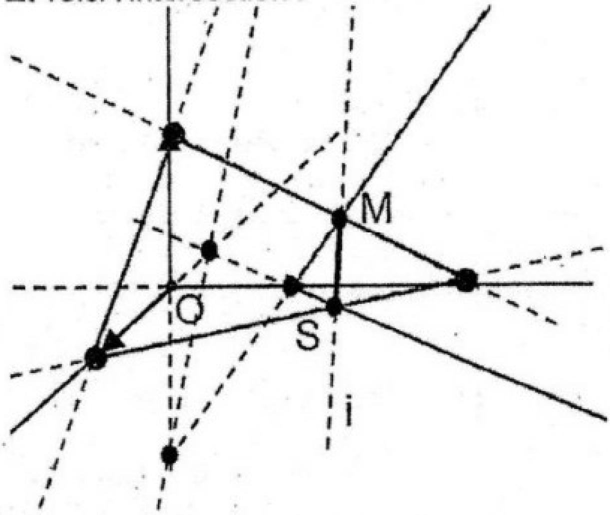
De manière générale, avec $\begin{cases} \pi_1 : a_1x + b_1 + c_1 + d_1 = 0 \\ \pi_2 : a_2x + b_2 + c_2 + d_2 = 0 \end{cases}$, on a : $\boxed{\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$

<u>2ème méthode</u> : Par construction

2 plans sont donnés par leurs traces



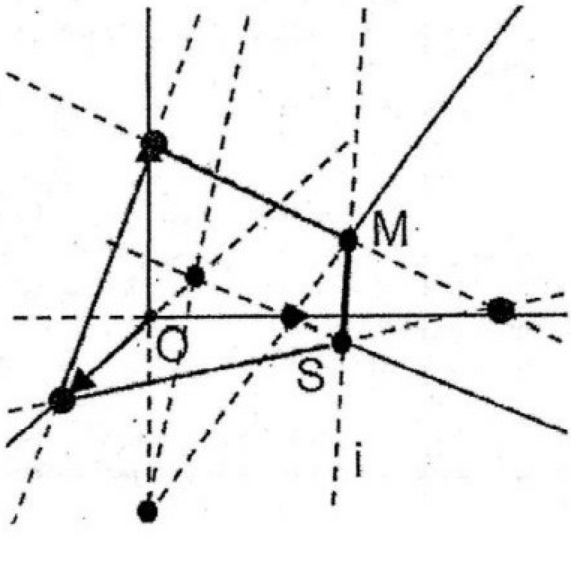
Et voici l'intersection :



On part du principe que chacun des plans est donné par ses traces. L'intersection des 2 traces dans le sol dont le point S, l'intersection des 2 traces dans le mur donne le point M … et le tour est joué.

<u>Remarque</u> : toute ligne qui est derrière un plan doit être dessinée en traitillés, la solution donnée ci-dessus peut donc être améliorée comme ci-contre.

Un léger hachurage des parties visibles (Octant I et pas "caché" par un autre plan) permet d'améliorer encore la visualisation.



3. Intersection d'une droite et d'un plan

Lorsque l'on recherche l'éventuelle intersection d'une droite d et d'un plan π, on peut se trouver dans l'un des 3 cas suivants :

a) La droite coupe le plan en un seul point (Exemple : Oz et le sol)
b) La droite est incluse dans le plan : tous les points de la droite sont "intersection"
c) La droite ne coupe pas le plan, elle est dite parallèle au plan.

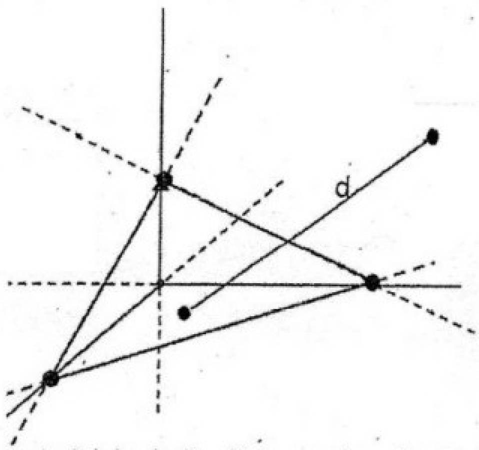
Pour déterminer la position relative et l'éventuelle intersection, nous allons voir 2 méthodes :

1ère méthode : Algébriquement

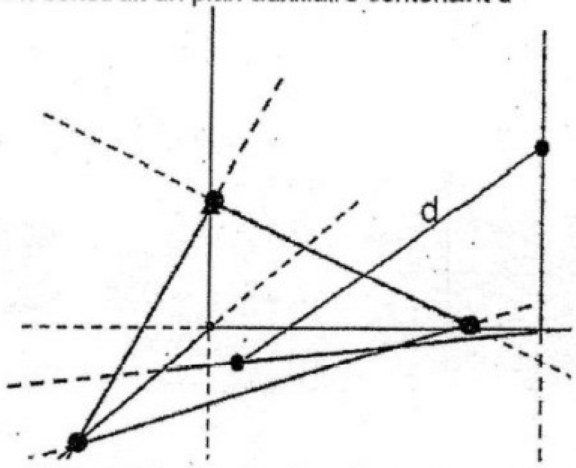
On se limitera à la situation où la droite est donnée par 3 équations paramétriques et le plan par une équation cartésienne. La recherche de l'intersection revient donc à résoudre un système de 4 équations à 4 inconnues (x,y,z et λ) : la substitution simultanée du x, du y et du z dans l'équation cartésienne par les expressions issues des équations paramétriques permet de se ramener facilement à une équation à une seule inconnue (λ).
Le problème est donc élémentaire et est laissée au lecteur.

2ème méthode : Par construction

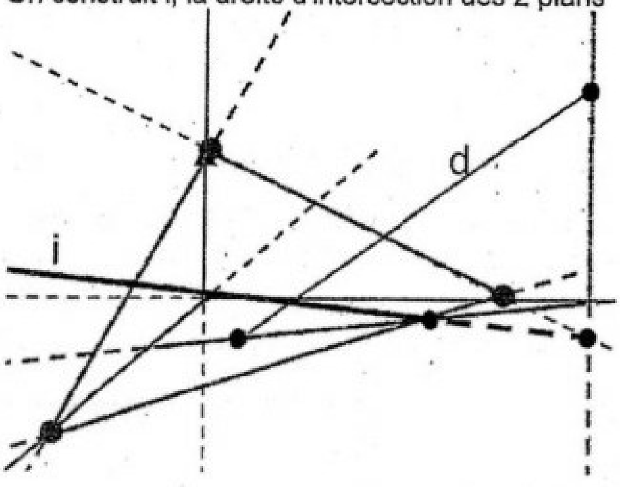
1 plans et 1 droite sont donnés par leurs traces



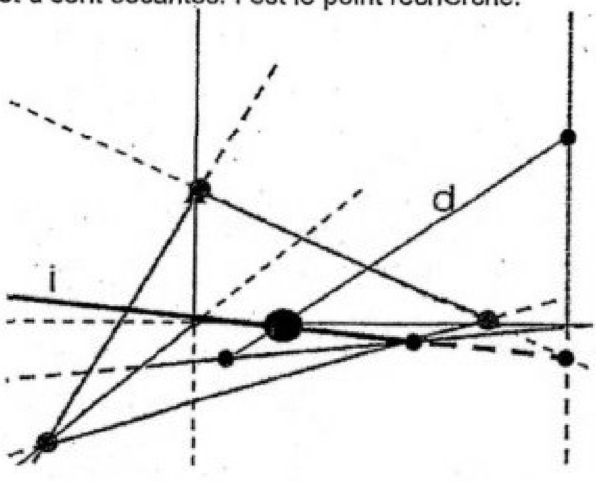
On construit un plan auxiliaire contenant d



On construit i, la droite d'intersection des 2 plans



i et d sont sécantes. I est le point recherché.

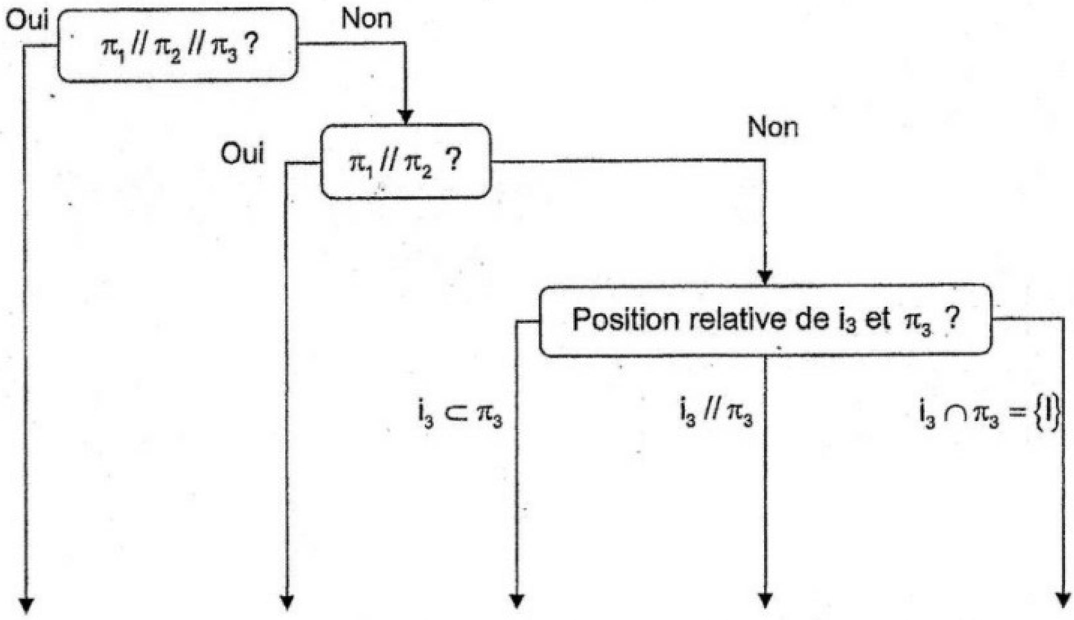


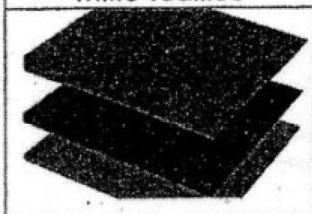
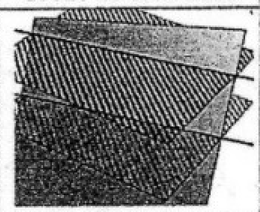
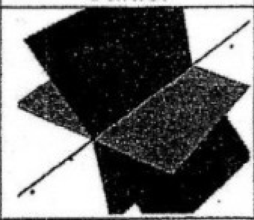
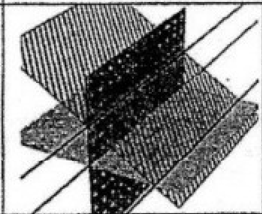
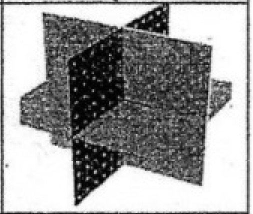
A titre d'exercice, le lecteur est encouragé à "traitiller" les droites d et i, ainsi que les plans ...

4. Intersection de 3 plans

Soit π_1, π_2 et π_3 3 plans distincts.

On distingue 5 positions relatives possibles pour 3 plans donnés que l'on peut déterminer à l'aide du schéma ci-dessous :



Position Mille-feuilles	Position Croix de Lorraine	Position Cahier	Position Toblerone	**Position Repère**
				
Aucune intersection	$i_1 // i_2$ *avec* $i_1 = \pi_2 \cap \pi_3$ *et* $i_2 = \pi_1 \cap \pi_3$	$i = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$	$i_1 // i_2 // i_3$ *avec* $i_1 = \pi_2 \cap \pi_3$, $i_2 = \pi_1 \cap \pi_3$ *et* $i_3 = \pi_1 \cap \pi_2$	$\{I\} = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$

<u>Convention</u> :

La droite d'intersection (si elle existe) entre π_1 et π_2 se note i_3 et de manière analogue on note les éventuelles autres droites d'intersection de 2 plans.

<u>Remarque</u>

Par souci de concision pour le diagramme ci-dessus, les 2 plans éventuellement parallèles ont été désignés arbitrairement comme étant π_1 et π_2.