Chapitre 11

Herbier de fonctions réelles

Rappelons que lorsque les domaines de définition et d'arrivée d'une fonction f sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$, on parle de *fonctions réelles*.

Les mathématiciens ont classé les fonctions réelles en différentes catégories décrites ci-dessous.

Les fonctions continues

- **Les fonctions polynomiales**
  1. Les fonctions affines (ou fonctions polynomiales de degré $\leqslant 1$).
     (a) Les fonctions constantes.
     (b) Les fonctions linéaires.
  2. Les fonctions quadratiques (ou fonctions polynomiales de degré 2).
  3. Les fonctions cubiques (ou fonctions polynomiales de degré 3).
  4. Les fonctions polynomiales de degré $\geqslant 4$.
- **Les fonctions algébriques**
  1. Les fonctions polynomiales.
  2. Les homographies.
  3. Les fonctions rationnelles.
  4. Les racines carrées de fonctions rationnelles (racine carrée, valeur absolue, ...).
  5. Les mélanges entre fonctions rationnelles et racines n-ièmes.
- **Les fonctions transcendantes**
  1. Les fonctions trigonométriques et leur réciproque.
  2. Les fonctions exponentielles et les logarithmes.
  3. Les fonctions hyperboliques.
  4. ...

Herbier de fonctions réelles

Rappelons que lorsque les domaines de définition et d'arrivée d'une fonction f sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$, on parle de *fonctions réelles*.

Les mathématiciens ont classé les fonctions réelles en différentes catégories décrites ci-dessous.

Les fonctions continues

Intuitivement, une fonction est *continue* lorsque son graphe au-dessus du domaine de définition se dessine sans lever le crayon. Voici 3 types de fonctions continues.

Premier type de fonctions : les fonctions polynomiales

1. **Les fonctions affines (ou fonctions polynomiales de degré $\leqslant 1$)**
   Les *fonctions affines* ont l'expression fonctionnelle suivante

$$f(x) = a_1x + a_0 \quad \text{avec} \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}$$

   Parmi les fonctions affines, on trouve :
   (a) Les *fonctions constantes* d'expression fonctionnelle

$$f(x) = a_0 \quad \text{avec} \quad a_0 \in \mathbb{R}$$

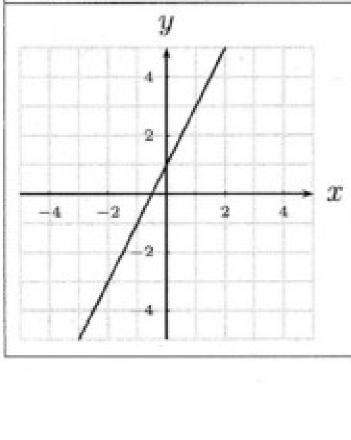
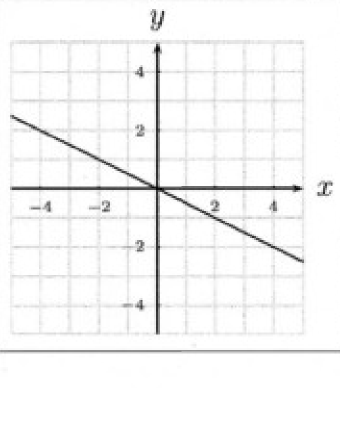
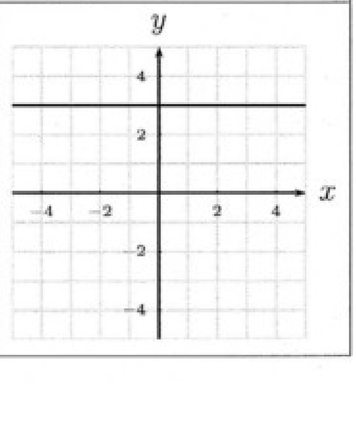
   (b) Les *fonctions linéaires* d'expression fonctionnelle

$$f(x) = a_1x \quad \text{avec} \quad a_1 \in \mathbb{R}$$

   Le graphe des fonctions affines est une *droite*. Le nombre a_1 représente la *pente* de la droite (quand on avance de 1 sur l'axe horizontal, la fonction monte ou descend de a_1) et le nombre a_0 représente la *hauteur* de la droite (l'image de $x = 0$).

   Ainsi
   (a) La droite est horizontale lorsque la fonction est constante.
   (b) La droite passe par l'origine lorsque la fonction est linéaire.

   Voici des exemples de graphes de fonctions affines.

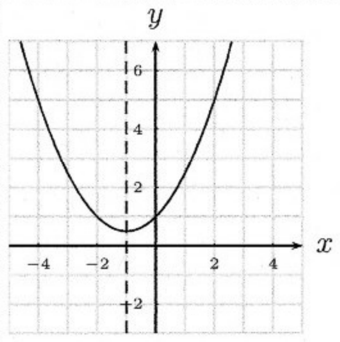
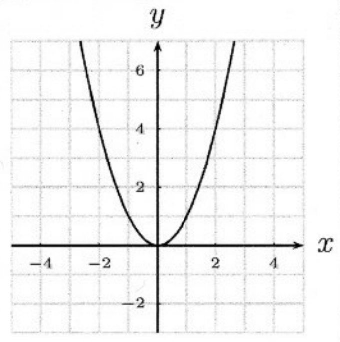
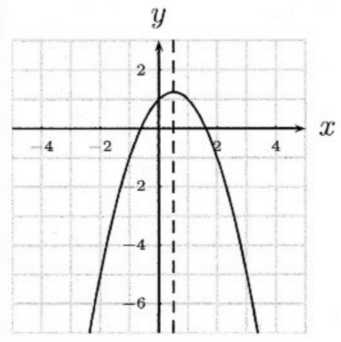
$f(x) = 2x + 1$ (affine)	$f(x) = -\frac{1}{2}x$ (linéaire)	$f(x) = 3$ (constante)
		

2. **Les fonctions quadratiques (ou fonctions polynomiales de degré 2)**
   Les *fonctions quadratiques* ou *fonctions polynomiales du deuxième degré* ont l'expression fonctionnelle suivante

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad \text{avec} \quad a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}, a_2 \neq 0$$

   Le graphe des fonctions quadratiques est une *parabole.*

   Voici des exemples de graphes de fonctions quadratiques.

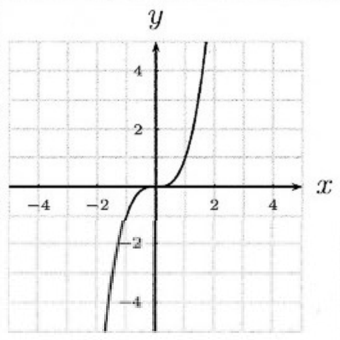
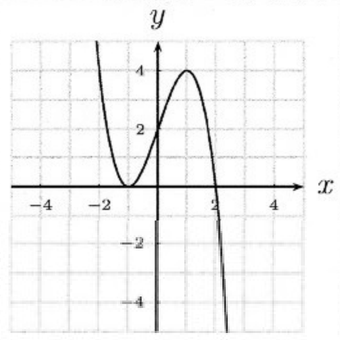
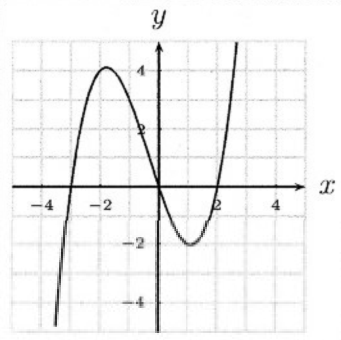
$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$	$f(x) = x^2$	$f(x) = -x^2 + x + 1$
$= \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{2}$	$= (x-0)^2 + 0$	$= -(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4}$
		

   On voit sur ces graphes que les fonctions quadratiques peuvent avoir 0, 1 ou 2 zéros !

3. **Les fonctions cubiques (ou fonctions polynomiales de degré 3)**
   Les *fonctions cubiques* ou *fonctions polynomiales du troisième degré.*
   Les fonctions cubiques ont l'expression fonctionnelle suivante.

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad \text{avec} \quad a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}, a_3 \neq 0$$

   Voici des exemples de graphes de fonctions cubiques.

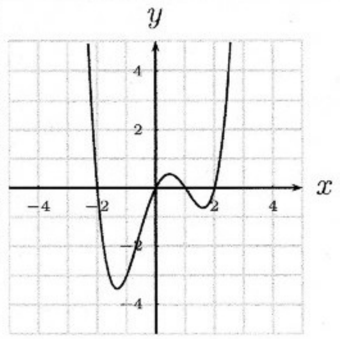
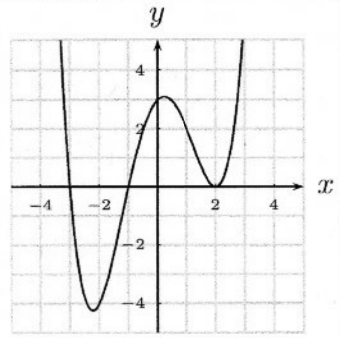
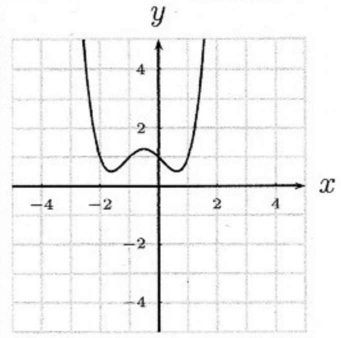
$f(x) = x^3$	$f(x) = -x^3 + 3x + 2$	$f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x$
		

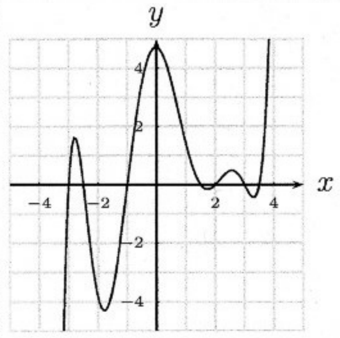
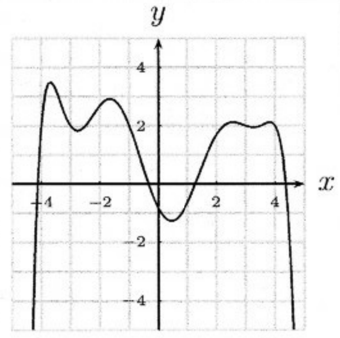
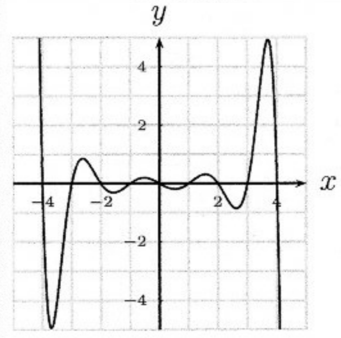
   Les fonctions cubiques ont toujours au moins 1 zéro et au plus 3 zéros.

4. **Les fonctions polynomiales de degré $\geqslant 4$**
   Par exemple :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 + 3x^2 - \sqrt{2}\,x + \pi \\ g(x) &= x^6 - x^3 + 1 \\ h(x) &= x^{15} - 1 \end{aligned}$$

Voici des exemples de graphes de fonctions polynomiales de degré $\geqslant 4$.

Voici trois graphes de fonctions polynomiales de degré 4.		
$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - 2x$	$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{4}x^2 + x + 3$	$f(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + 1$
		

Voici trois graphes de fonctions polynomiales de degré $\geqslant 5$.		
		

Deuxième type de fonctions : les fonctions algébriques

Une fonction algébrique est une fonction qui peut être exprimée par un nombre fini de sommes, de différences, de multiplications, de quotients ou de racines de fonctions polynomiales.

Par exemple :

1. Les fonctions polynomiales (voir ci-dessus).
2. Les *homographies* ou fonctions dont le graphe est une hyperbole ou une droite (non horizontale) ont l'expression fonctionnelle suivante.

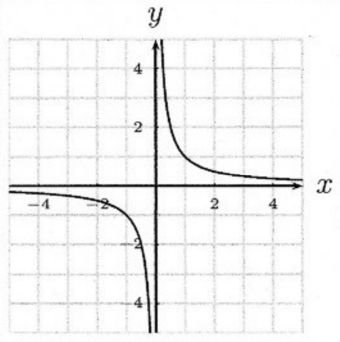
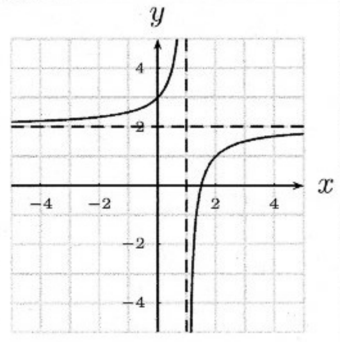
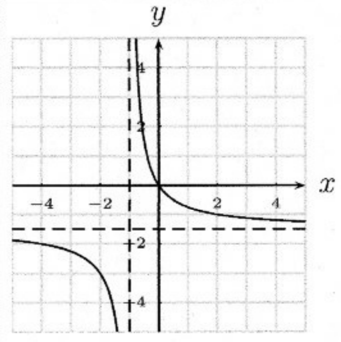
$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad \text{avec } ad - bc \neq 0$$

Le domaine de définition d'une telle fonction est $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ si $c \neq 0$ (cas où le graphe est une hyperbole) et $D = \mathbb{R}$ si $c = 0$ (cas où le graphe est une droite).

La condition $ad - bc \neq 0$ est présente afin que cette fonction soit injective. Si on avait $ad - bc = 0$, le graphe de f serait une droite horizontale, car la fraction pourrait se simplifier et le x disparaîtrait. Par exemple, si $a = 2$, $b = 1$, $c = 6$ et $d = 3$, la fraction est simplifiable car

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{2x+1}{6x+3} = \frac{2x+1}{3(2x+1)} = \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad x \neq -\frac{1}{2}$$

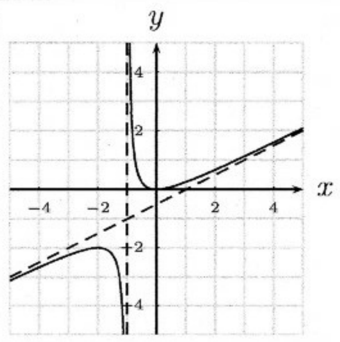
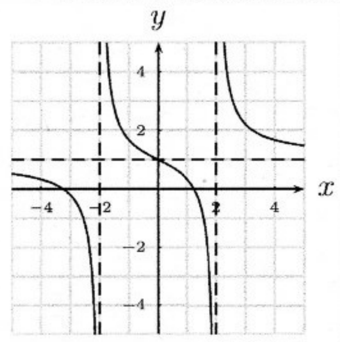
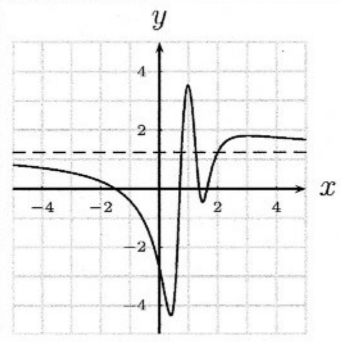
Voici des exemples de graphes d'homographies.

$f(x) = 1/x$	$f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$	$f(x) = -\frac{3x}{2x+2}$
		

3. Les *fonctions rationnelles*, qui sont des quotients de fonctions polynomiales. Par exemple

$$f(x) = \frac{x^2}{2x+2} \qquad g(x) = \frac{x^2+2x-4}{x^2-4} \qquad h(x) = \frac{x^4+3x^2+\pi}{x^6-x^3+1}$$

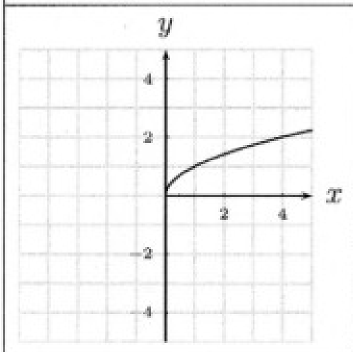
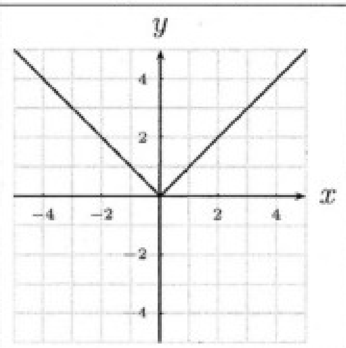
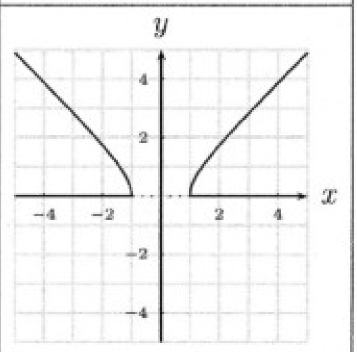
Voici des exemple de graphes de fonctions rationnelles.

Voici trois graphes de fonctions rationnelles.		
		

4. La *racine carrée* et la *valeur absolue* sont des racines de fonctions rationnelles.

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad g(x) = |x| = \sqrt{x^2} \qquad h(x) = \sqrt{x^2-1}$$

Voici les graphes des fonctions ci-dessus.

$f(x) = \sqrt{x}$	$g(x) = \lvert x\rvert$	$h(x) = \sqrt{x^2-1}$
		

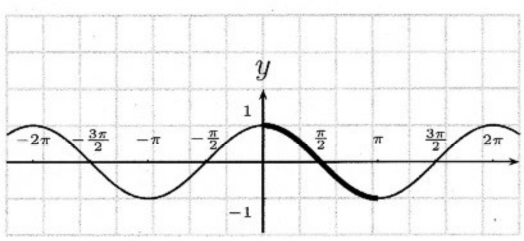
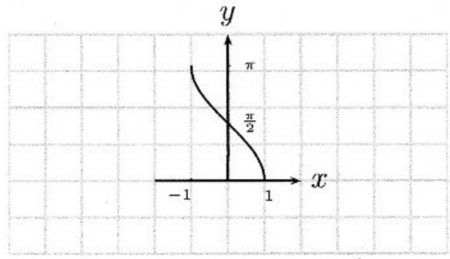
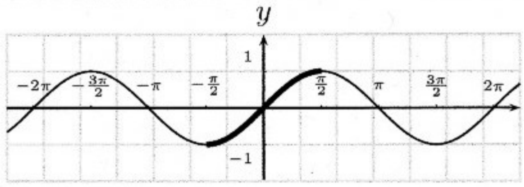
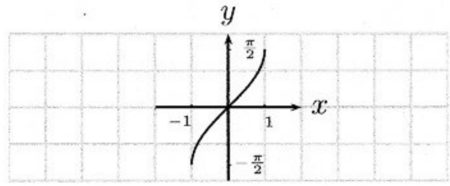
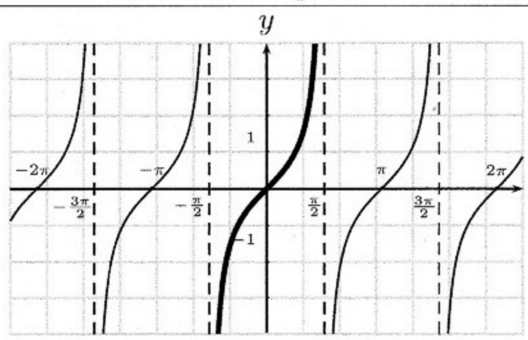
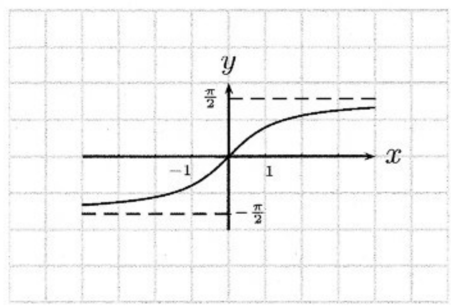
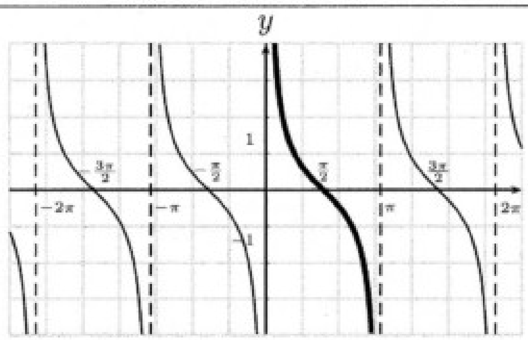
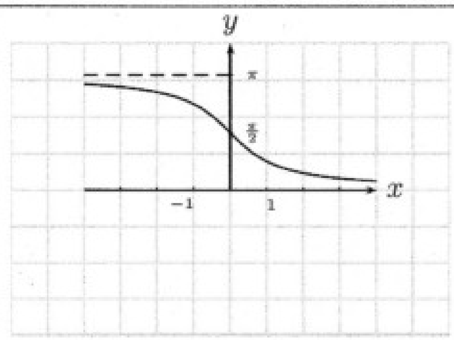
5. Un mélange de fonctions rationnelles et de racines n-ièmes. Par exemple

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+|x|}{\sqrt{x}}} - (4x+1)\frac{x^2 + \frac{1}{x} + 5\sqrt[3]{x^2+5}}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt{x}}$$

Troisième type de fonctions : les fonctions transcendantes

Les fonctions qui ne sont pas algébriques sont *transcendantes*.
Voici quelques types de fonctions transcendantes importantes.

1. **Les fonctions trigonométriques** et leur réciproque.

$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$\arccos = \cos^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi]$
	
$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$\arcsin = \sin^{-1} : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
	
$\tan : \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$	$\arctan = \tan^{-1} : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
	
$\cot : \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$	$\text{arccot} = \cot^{-1} : \mathbb{R} \to]0,\pi[$
	

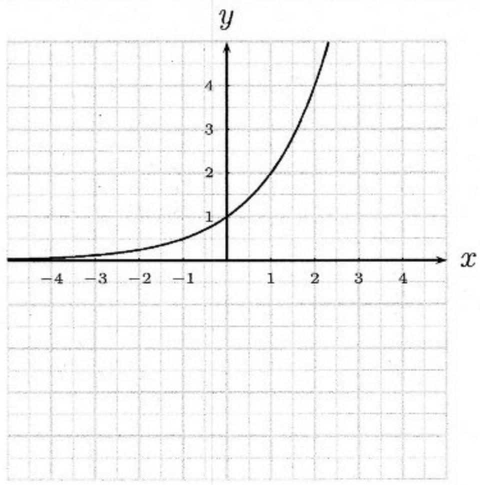
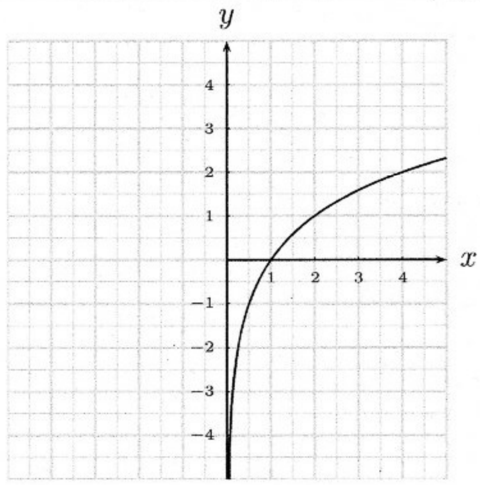
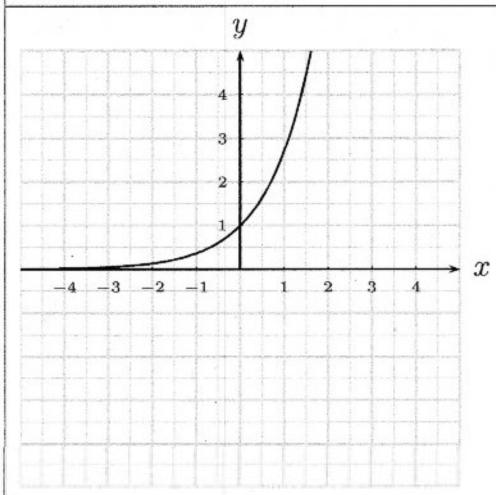
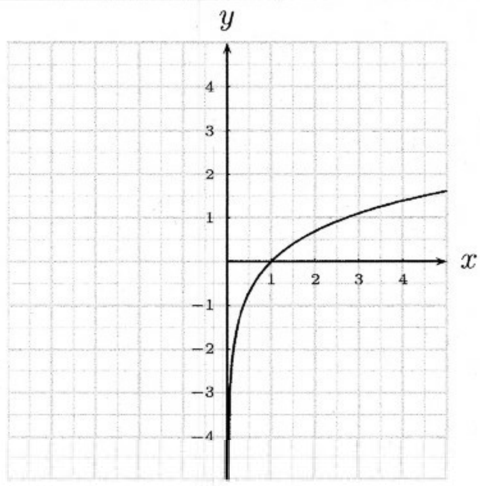
2. **Les fonctions exponentielles et logarithmes.**
Les *fonctions exponentielles* ont l'expression fonctionnelle suivante.

$$f(x) = \exp_a(x) = a^x \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}, a > 0$$

Les *fonctions logarithmes* ont l'expression fonctionnelle suivante.

$$f(x) = \log_a(x) \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$$

Voici des exemples de graphes de fonctions exponentielles et logarithmes.

$\exp_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0};\ x \mapsto 2^x$	$\exp_2^{-1} = \log_2 : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}$
	
$\exp_e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0};\ x \mapsto e^x$	$\exp_e^{-1} = \log_e = \ln : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}$
	

Il existe un nombre irrationnel pour lequel les fonctions exponentielles et logarithmes ont de bonnes propriétés. Ce nombre est le nombre d'Euler

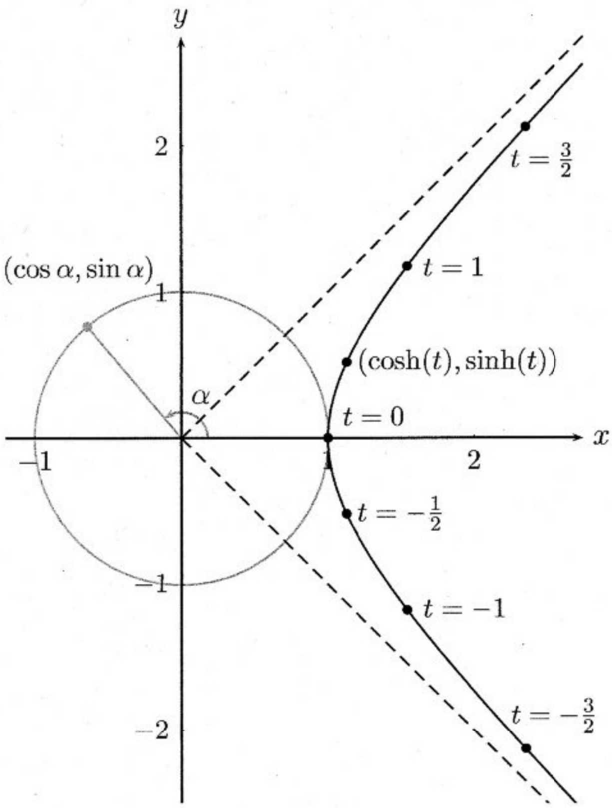
$$e \cong 2.718281828459045$$

Ce nombre est présenté dans le courant de la deuxième année. Lorsque l'on travaille dans cette base, le logarithme change de nom : il devient le *logarithme népérien* ou *logarithme naturel* et il s'écrit

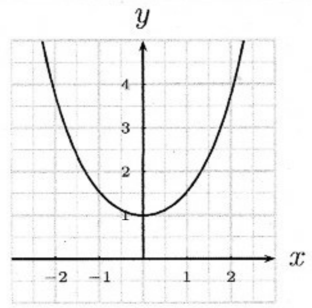
$$\log_e(x) = \ln(x)$$

3. **Les fonctions hyperboliques.**
(à ne pas confondre avec les homographies dont le graphe est une hyperbole.)
Tandis que les fonctions trigonométriques parcourent le cercle trigonométrique d'équation $x^2 + y^2 = 1$, les fonctions hyperboliques parcourent l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$ avec $x \geqslant 1$. On peut les exprimer grâce à la fonction exponentielle.

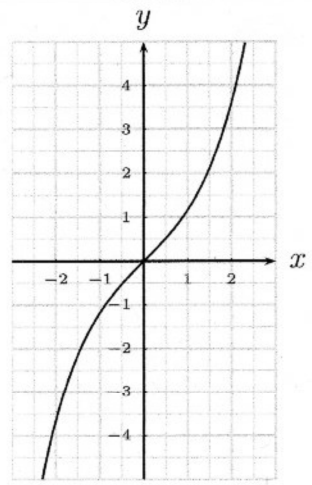
$$\boxed{\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$$



$\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 1};\ x \mapsto \cosh(x)$

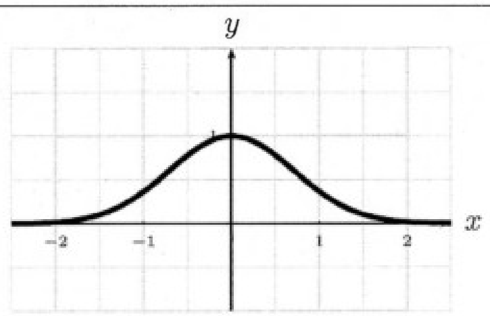


$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \sinh(x)$

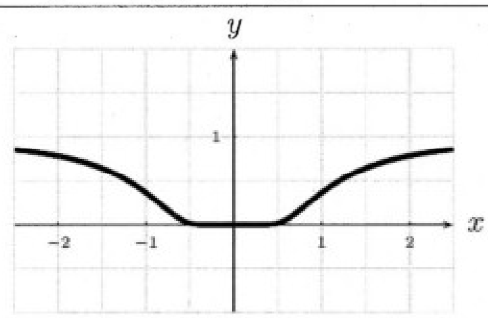


4. **Deux fonctions intéressantes.**
Voici deux fonctions que les mathématiciens aiment bien !

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0};\ x \mapsto e^{-x^2}$



$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0};\ x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$



La deuxième fonction, surnommée la casserole, peut-être prolongée par continuité en 0 par $g(0) = 0$ (cela se voit sur le dessin : on a envie de dire $g(0) = 0$).

5. **Et bien d'autres...**