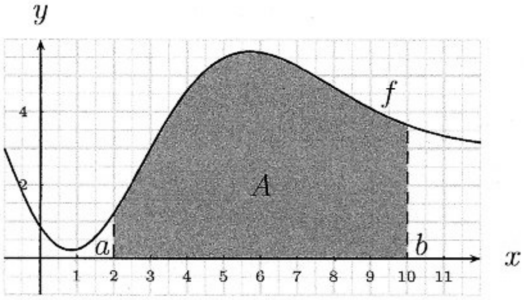
Chapitre 17

Intégrales et primitives

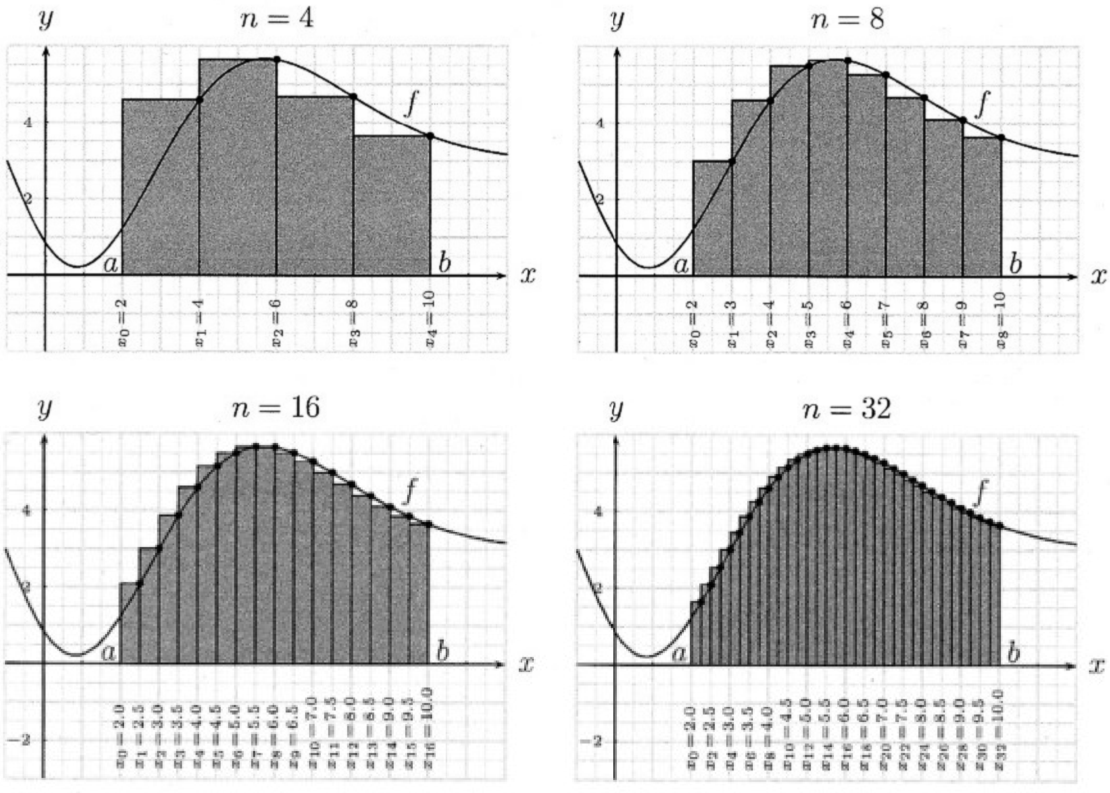
17.1 Définition intuitive

L'*intégrale de la fonction f entre les bornes a et b* est l'aire signée entre la fonction, l'axe des x et les axes verticaux $x = a$ et $x = b$.



17.2 Définition formelle

Commençons par supposer que $a < b$.
Pour calculer cette aire, on découpe l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles.



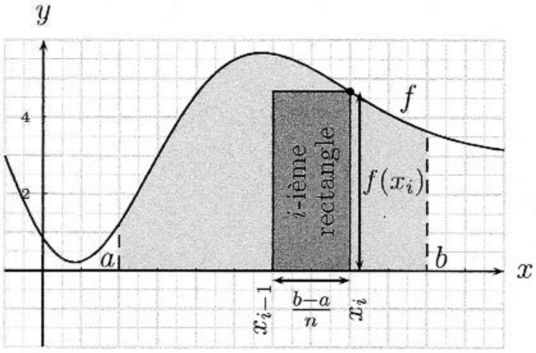
Ainsi, lorsque $n \to +\infty$, alors la somme des aires des rectangles tend vers l'intégrale A.

Formellement, on procède ainsi :

1. On commence par subdiviser l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles $[x_{i-1}, x_i]$ avec $i \in \{1, \ldots, n\}$. Cela permet d'approcher l'aire cherchée en calculant l'aire des n rectangles dont le coin droit touche le graphe de la fonction, donc la hauteur du i-ième rectangle est $f(x_i)$.

   L'aire du i-ième rectangle est donnée par la célèbre formule "hauteur fois base", ainsi
   $$\text{Aire du } i\text{-ième rectangle } = f(x_i) \cdot \frac{b-a}{n}$$
   De ce fait, l'aire de tous les rectangles vaut :

   $$\sum_{i=1}^{n} \overbrace{\Bigg(\underbrace{f(x_i)}_{\substack{\text{hauteur}\\ \text{du } i\text{-ème}\\ \text{rectangle}}} \cdot \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\substack{\text{base}\\ \text{du } i\text{-ème}\\ \text{rectangle}}} \Bigg)}^{\text{Aire du } i\text{-ième rectangle}}$$

2. On fait ensuite tendre n vers l'infini (et par conséquent la longueur des intervalles de la subdivision vers 0), l'aire totale de tous les rectangles va tendre vers l'aire A cherchée.

On peut donc écrire :
$$A = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) \cdot \frac{b-a}{n} \right) \right)$$

Comme la longueur de chaque intervalle de la subdivision tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, on peut la remplacer par Δx (le lecteur se rappellera le chapitre de la dérivée où Δx symbolisait un nombre étant sensé être très petit). Autrement dit, la formule devient
$$A = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x \right) \quad \text{si on note } \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Notation

De nos jours, on note l'aire sous le graphe de la fonction f entre les points a et b de la façon suivante.

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)\,dx}$$

a, b	*bornes d'intégration*
x	*variable d'intégration*

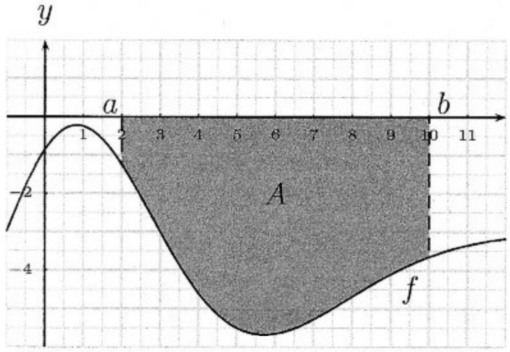
Il s'agit de l'*intégrale (définie) de la fonction f de a à b.*

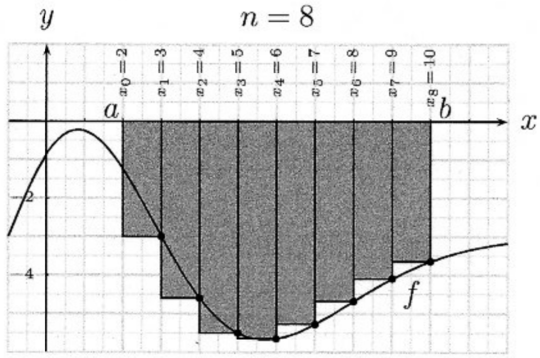
C'est une transformation visuelle de l'écriture ci-dessus, on remplace Δx par dx et la limite de la somme par un S déformé en $\int$. On bascule aussi les bornes a et b en dessous et en dessus de ce symbole afin de ne pas les oublier.

17.3 Pourquoi l'intégrale est une aire signée

Première possibilité d'avoir un signe négatif

La même technique de calcul que celle vue ci-dessus pour la fonction dessinée ci-dessous, ne donne pas une aire positive.





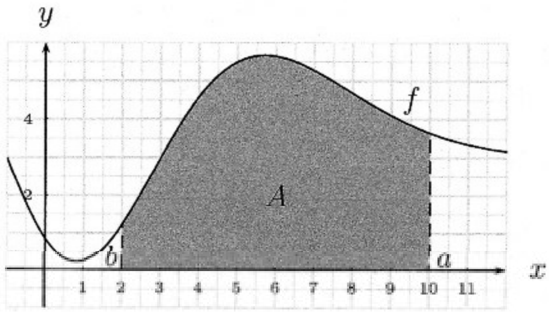
En effet, si on regarde l'expression

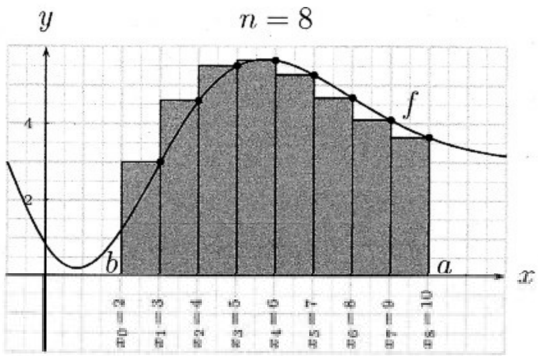
$$A = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) \cdot \frac{b-a}{n} \right) \right)$$

On voit que $f(x_i)$ est négatif et qu'ainsi chaque terme de la somme est négatif. L'aire sera donc calculée au signe près.

Deuxième possibilité d'avoir un signe négatif

Une autre possibilité d'avoir une intégrale négative est d'inverser les bornes d'intégration.





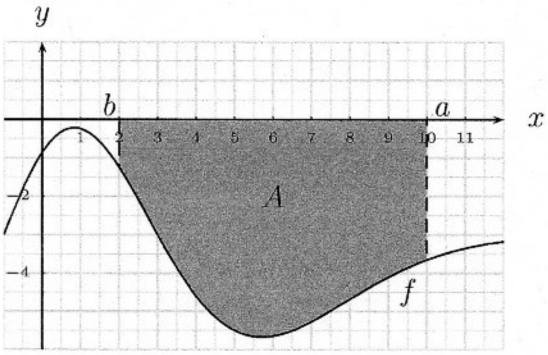
En effet, si on regarde l'expression

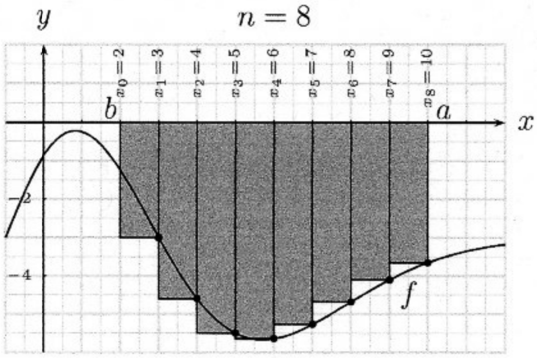
$$A = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) \cdot \frac{b-a}{n} \right) \right)$$

On voit que $\frac{b-a}{n}$ est négatif et qu'ainsi chaque terme de la somme est négatif. L'aire sera donc calculée au signe près.

Ces deux cas peuvent se produire en même temps

Si la fonction est négative et que les bornes d'intégration sont inversées, la règle des signes s'applique et l'intégrale est positive.





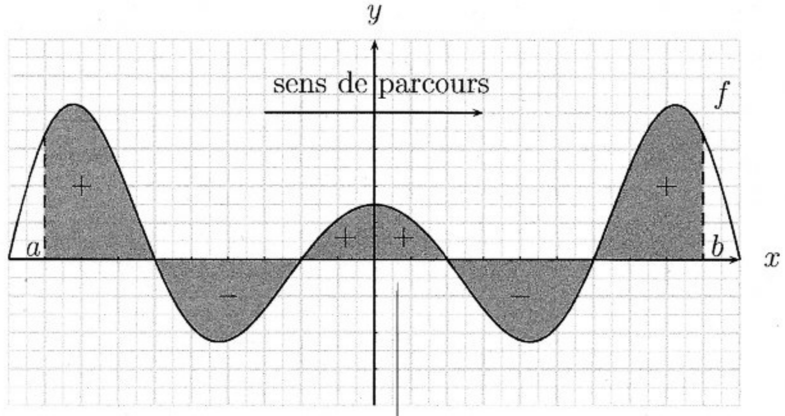
En effet, si on regarde l'expression

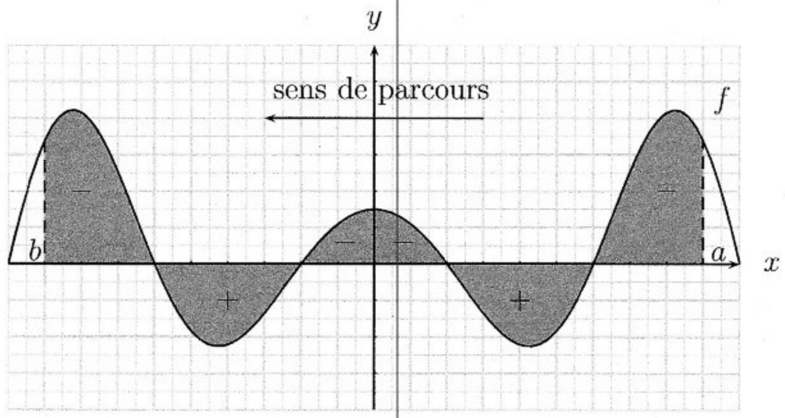
$$A = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) \cdot \frac{b-a}{n} \right) \right)$$

On voit que $f(x_i)$ et que $\frac{b-a}{n}$ sont négatifs et qu'ainsi chaque terme de la somme est positif (règle des signes). Le résultat sera vraiment égal à l'aire.

En résumé

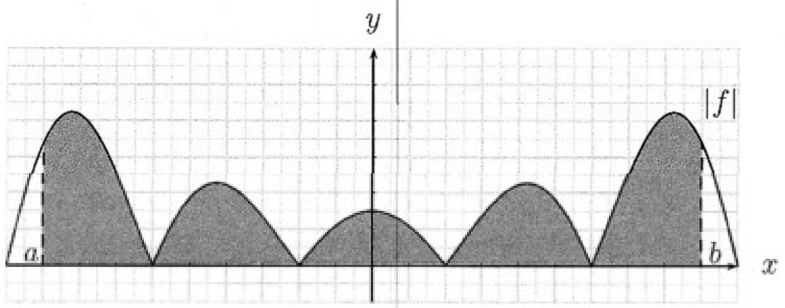
Lorsque la fonction change de signe, l'intégrale ne donne pas l'aire entre le graphe et l'axe horizontal. En effet, d'après ce qui précède, l'aire sur chaque morceau sera comptée avec un signe. On a un deuxième changement de signe lorsque $a > b$ (au lieu de $a < b$).





17.3.1 Pour être sûr d'avoir l'aire

Si on désire vraiment calculer la surface entre le graphe et l'axe, on utilise la valeur absolue pour passer tout le graphe au dessus de l'axe horizontal.



On peut réaliser cela grâce à la valeur absolue [1]. Il faut donc calculer

$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$

et s'assurer que a est bien plus petit que b.

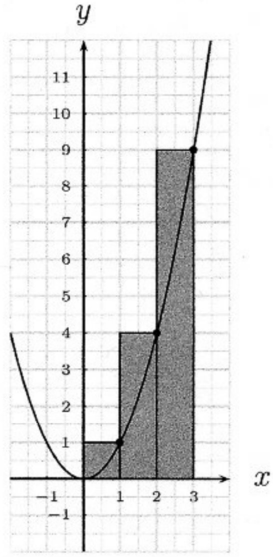
1. On peut aussi intégrer sur chaque morceau et tenir compte des signes 'à la main'.

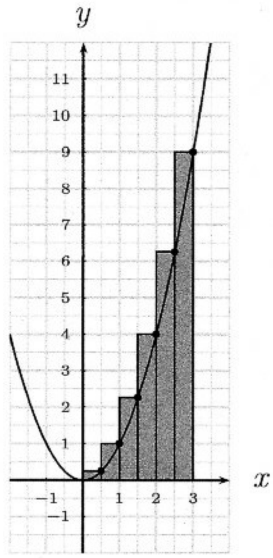
17.4 Exemples

Aire sous une parabole

Calculons l'aire sous la parabole $f(x) = x^2$ entre 0 et $b > 0$.

On commence par subdiviser l'intervalle $[0, b]$ en n morceaux (ci-contre, l'intervalle $[0, 3]$ est subdivisé en 3, puis en 6 morceaux).





Les x_i sont ici donnés par $x_i = \frac{b}{n} \cdot i$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ainsi, le i-ième rectangle est de hauteur $f(x_i)$ et de base $\frac{b}{n}$. On calcule l'aire de tous les rectangles, notée A_n, comme suit :

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) \cdot \frac{b}{n} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 \cdot \frac{b}{n} \right)$$

En substituant x_i, on obtient :

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{b}{n} \right)^3 i^2 \right) = \left(\frac{b}{n} \right)^3 \sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= \left(\frac{b}{n} \right)^3 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \end{aligned}$$

On peut faire progresser le calcul en utilisant la formule (qui peut se démontrer par récurrence) suivante :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} A_n &= \left(\frac{b}{n} \right)^3 \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \\ &= \frac{b^3}{6} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{n \cdot n \cdot n} \\ &= \frac{b^3}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

Lorsqu'on fait tendre le nombre de tranches n vers l'infini, on obtient l'aire suivante

$$A = \lim_{n \to +\infty} A_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{b^3}{6} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n} \right)}_{\to 1} \underbrace{\left(2 + \frac{1}{n} \right)}_{\to 2} = \frac{b^3}{3}$$

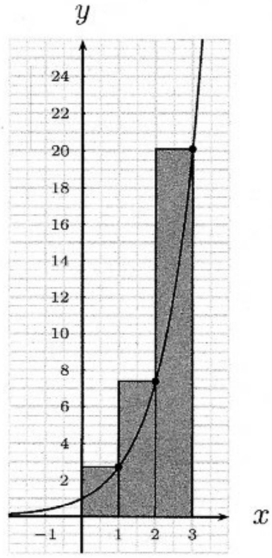
Ainsi, on a montré que :

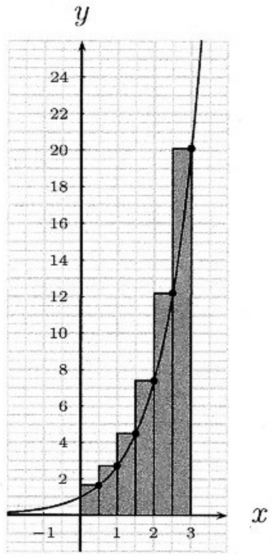
$$\int_0^b x^2 \, dx = \frac{b^3}{3}$$

Aire sous une exponentielle

Calculons l'aire sous l'exponentielle $f(x) = e^x$ entre 0 et $b > 0$.

On commence par subdiviser l'intervalle $[0, b]$ en n morceaux (ci-contre, l'intervalle $[0, 3]$ est subdivisé en 3, puis en 6 morceaux).





Les x_i sont aussi donnés par $x_i = \frac{b}{n} \cdot i$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ainsi, le i-ième rectangle est de hauteur $f(x_i)$ et de base $\frac{b}{n}$. On calcule l'aire de tous les rectangles, notée A_n, comme suit :

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) \cdot \frac{b}{n} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(e^{x_i} \cdot \frac{b}{n} \right)$$

En substituant x_i, on obtient :

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{i=1}^{n} \left(e^{\frac{b}{n} i} \frac{b}{n} \right) = \frac{b}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{b}{n} i} \\ &= \frac{b}{n} \left(e^{\frac{b}{n}} + \left(e^{\frac{b}{n}}\right)^2 + \left(e^{\frac{b}{n}}\right)^3 + \cdots + \left(e^{\frac{b}{n}}\right)^n \right) \\ &= e^{\frac{b}{n}} \frac{b}{n} \left(1 + \left(e^{\frac{b}{n}}\right) + \left(e^{\frac{b}{n}}\right)^2 + \cdots + \left(e^{\frac{b}{n}}\right)^{n-1} \right) \end{aligned}$$

Il s'agit d'une progression géométrique dont la formule est

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad \left(= \frac{1 - r^n}{1 - r} \right)$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} A_n &= e^{\frac{b}{n}} \frac{b}{n} \cdot \frac{\left(e^{\frac{b}{n}}\right)^n - 1}{e^{\frac{b}{n}} - 1} \\ &= e^{\frac{b}{n}} \frac{b}{n} \cdot \frac{e^b - 1}{e^{\frac{b}{n}} - 1} \end{aligned}$$

Pour obtenir l'aire sous la courbe, on utilise le théorème de l'Hospital pour calculer la limite de l'aire A_n lorsque le nombre de tranches n tend vers l'infini (ici, n est la variable).

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \to +\infty} A_n = \lim_{n \to +\infty} e^{\frac{b}{n}} \frac{b}{n} \cdot \frac{e^b - 1}{e^{\frac{b}{n}} - 1} = \lim_{n \to +\infty} (e^b - 1)\, e^{\frac{b}{n}} \cdot \frac{\frac{b}{n}}{e^{\frac{b}{n}} - 1} \\ &= (e^b - 1) \cdot \underbrace{\lim_{n \to +\infty} e^{\frac{b}{n}}}_{\to 1} \cdot \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{b}{n}}{e^{\frac{b}{n}} - 1} \overset{\text{Hospital}}{=} (e^b - 1) \cdot \lim_{n \to +\infty} \frac{-\frac{b}{n^2}}{e^{\frac{b}{n}} \cdot \left(-\frac{b}{n^2}\right)} \\ &= (e^b - 1) \cdot \underbrace{\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{e^{\frac{b}{n}}}}_{\to 1} = e^b - 1 \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que :

$$\int_0^b e^x \, dx = e^b - 1$$

17.5 Propriétés de l'intégrale

En considérant l'intégrale comme une aire signée, on voit que l'intégrale satisfait les propriétés suivantes.

1. **Propriétés de linéarité**

   (a) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \Big(f(x) + g(x)\Big)\,dx$

   (b) $\int_a^b \lambda \cdot f(x)\,dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\,dx$

2. **Sens de parcours**

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

3. **Contiguïté**

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

4. **Préservation d'inégalité**

   Si $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

17.6 La valeur moyenne d'une fonction

L'intégrale permet de définir la *moyenne d'une fonction f sur un intervalle* $[a; b]$.

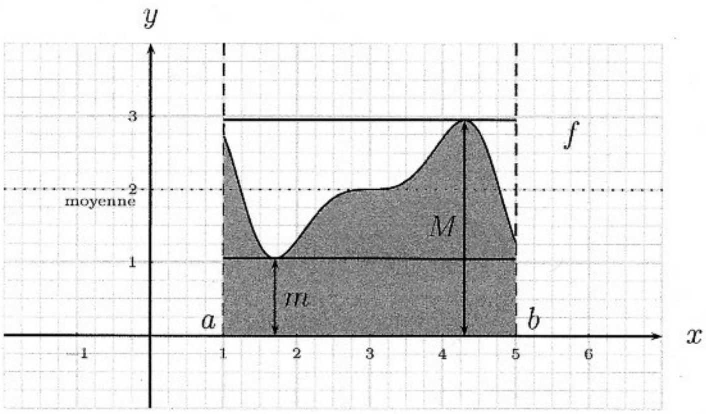
On peut définir la moyenne d'une fonction f entre a et b de la façon suivante.

$$\boxed{\text{moyenne}(f; a, b) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx}$$

Cette formule est analogue au cas non continu du calcul de la moyenne des notes d'un élève.

$$\text{moyenne} = \frac{1}{\text{nombre de notes}} \cdot \sum \text{notes}$$

Illustration



Sur ce dessin, la moyenne est évidemment 2 puisque la fonction est symétrique par rapport au point (3 ;2).

Théorème

Soit f une fonction continue définie sur l'intervalle $[a; b]$.
Alors, il existe (au moins) un nombre $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = \text{moyenne}(f; a, b)$.

Preuve

En effet, il est évident que la moyenne satisfait

$$m \leqslant \text{moyenne}(f; a, b) \leqslant M$$

où m est la valeur minimale atteinte par f sur l'intervalle $[a; b]$, tandis que M est la valeur maximale atteinte par f sur ce même intervalle.

Comme f est continue, elle va atteindre toutes les valeurs entre m et M, dont la moyenne. □

Remarque

Ce théorème n'est valable que pour une fonction continue. Dans l'exemple des notes d'un élève, la moyenne de ses notes n'est pas forcément égale à l'une des notes.

17.7 Primitives

17.7.1 Le théorème fondamental du calcul intégral

Ingrédient 1

Soit f une fonction continue définie sur l'intervalle $[a; b]$.
Posons

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Alors, F_a est une fonction définie sur $[a; b]$ qui satisfait $F_a'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a; b]$.

Remarque

Dans l'énoncé ci-dessus, on est obligé d'écrire $\int_a^x f(t)\, dt$ au lieu de $\int_a^x f(x)\, dx$.
En effet, ceci est dû au fait que la variable de F_a est x et que x est une des deux bornes de l'intégrale. Ainsi, le nom de la variable d'intégration ne peut pas être x.

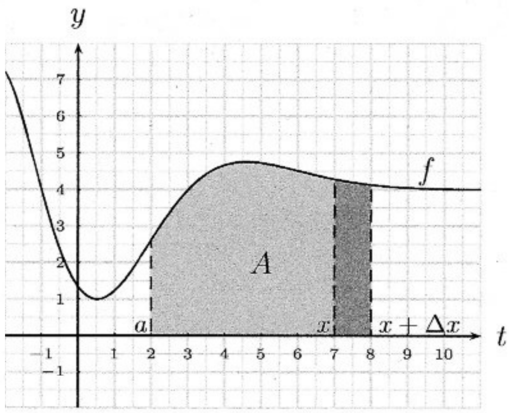
Preuve

Dérivons la fonction $F_a(x)$. Par définition de la dérivée, on a

$$F_a'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_a(x + \Delta x) - F_a(x)}{\Delta x}$$

On remarque que $F_a(x + \Delta x) - F_a(x)$ correspond à l'aire en gris foncé. On peut ainsi écrire

$$F_a(x + \Delta x) - F_a(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt$$



Donc, par définition de la moyenne, on a

$$\frac{F_a(x + \Delta x) - F_a(x)}{\Delta x} = \text{moyenne}(f; x, x + \Delta x)$$

On voit que lorsque Δx tend vers 0, alors la moyenne ci-dessus va se rapprocher de $f(x)$.
On a ainsi démontré que $F_a'(x) = f(x)$. $\square$

Définition

Si f et F sont des fonctions réelles telle que $F' = f$.
Alors, on dit que F *est une primitive de* f.

Ingrédient 2

Soit F_1 et F_2 deux primitives d'une même fonction f définie sur un intervalle.
Alors, il existe un nombre $C \in \mathbb{R}$, appelé *constante*, tel que

$$F_1(x) = F_2(x) + C$$

Preuve

Comme F_1 et F_2 sont des primitives de f, on a $F_1'(x) = f(x)$ et $F_2'(x) = f(x)$. Par conséquent, on a

$$(F_1 - F_2)'(x) = (F_1' - F_2')(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Cela signifie que la fonction $(F_1 - F_2)$ est une fonction constante (puisque sa dérivée est nulle et que l'on travaille sur un intervalle[2]).

Ainsi, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $C = (F_1 - F_2)(x) = F_1(x) - F_2(x)$. $\square$

Théorème fondamental du calcul intégral

Soit f une fonction réelle continue définie sur l'intervalle $[a, b]$.

Alors on a

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = F(x)\Big|_a^b} \qquad \text{où} \qquad F(x)\Big|_a^b \overset{\text{Notation}}{=} F(b) - F(a)$$

et où F est une primitive quelconque de f (c'est-à-dire une fonction telle que $F' = f$).

Preuve

Soit F une primitive quelconque de f. Par l'ingrédient 1 : $F_a(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ est aussi une primitive de f. Donc, par l'ingrédient 2, on a

$$F_a(x) = F(x) + C \iff \int_a^x f(t)\, dt = F(x) + C$$

1. En prenant $x = a$, on trouve la valeur de C.

$$\int_a^a f(t)\, dt = F(a) + C \iff 0 = F(a) + C \iff C = -F(a)$$

Donc, on a

$$\int_a^x f(t)\, dt = F(x) - F(a)$$

2. En prenant $x = b$, on conclut la preuve.

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a)$$

$\square$

Remarque

À la dernière ligne de la preuve, on a écrit $\int_a^b f(t)\, dt$. C'est une aire signée, donc un nombre. Ainsi le nom de la variable d'intégration n'a aucune importance (sauf si une borne contient une variable, comme dans l'énoncé de l'ingrédient 1, mais pas ici).

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b f(x)\, dx$$

2. Si la fonction f était définie sur deux intervalles disjoints, alors la fonction $(F_1 - F_2)$ pourrait être constante sur chaque intervalle sans pour autant être constante sur son domaine de définition.

Notation

Lorsque f est une fonction continue, on utilise la notation de l'*intégrale indéfinie* pour noter une primitive de f.

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C \text{ où } C \text{ est une constante}}$$

Remarques

1. Cette notation est compatible avec les ingrédients et le théorème fondamental.
2. Cette notation implique que

$$\boxed{\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\int f'(x)\,dx = f(x) + C}$$

17.8 Trois façons de résoudre une intégrale

17.8.1 Intégration par devinette

On devine une primitive de la fonction. Pour cela, on peut se référer à une table de dérivation (qui se trouve à la page 198) ou faire appel à sa mémoire. Il s'agit d'une application directe du théorème fondamental du calcul intégral.

Exemples

1. Pour calculer, l'intégrale définie

$$\int_0^\pi \sin(x)\,dx$$

on se souvient que la fonction $\cos(x)$ à pour dérivée la fonction $-\sin(x)$, ainsi $-\cos(x)$ est une primitive de $\sin(x)$. Par le théorème fondamental du calcul intégral, on a

$$\int_0^\pi \sin(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_0^\pi = (-\cos(\pi)) - (-\cos(0)) = 1 + 1 = 2$$

2. Pour calculer, l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

on se souvient que la fonction $\sqrt{x}$ à pour dérivée la fonction $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, ainsi $2\sqrt{x}$ est une primitive de $\frac{1}{\sqrt{x}}$. Ainsi, on a

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C \text{ où } C \text{ est une constante}$$

On peut même vérifier le résultat en dérivant la réponse, $2\sqrt{x} + C$, pour retrouver l'expression à l'intérieur de l'intégrale, $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

17.8.2 Intégration par parties : intégrale définie

Théorème

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et g une fonction dont la dérivée est continue sur l'intervalle $[a, b]$. Notons F une primitive de f. Alors

$$\boxed{\int_a^b \overset{\uparrow}{f}(x)\overset{\downarrow}{g}(x)\,dx = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx}$$

On note avec «↑» la fonction dont on prend une primitive et avec «↓» celle qu'on dérive.

Preuve

Commençons par préciser que F existe et est définie sur $[a, b]$ car f est continue sur $[a, b]$. La règle du produit dit que

$$\Big(F(x)g(x)\Big)' = f(x)g(x) + F(x)g'(x)$$

Ainsi (en notant TFCI pour le théorème fondamental du calcul intégral), on a

$$F(x)g(x)\Big|_a^b \overset{\text{TFCI}}{=} \int_a^b \Big(F(x)g(x)\Big)'\,dx \overset{\substack{\text{propriété de}\\ \text{l'intégrale}}}{=} \int_a^b f(x)g(x)\,dx + \int_a^b F(x)g'(x)\,dx$$

On peut donc isoler l'intégrale de $f(x)g(x)$.

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx \qquad \square$$

Exemples

1. Pour cette intégration par parties, le bon choix est de prendre une primitive de $2x$ et de dériver $\ln(x)$.

$$\int_1^e \overset{\uparrow}{2x} \cdot \overset{\downarrow}{\ln(x)}\,dx = x^2 \cdot \ln(x)\Big|_1^e - \int_1^e x^2 \cdot \frac{1}{x}\,dx = x^2 \cdot \ln(x)\Big|_1^e - \int_1^e x\,dx$$
$$= x^2\ln(x)\Big|_1^e - \tfrac{1}{2}x^2\Big|_1^e = \Big(e^2\ln(e) - 1\ln(1)\Big) - \Big(\tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{2}\Big) = \tfrac{1}{2}e^2 + \tfrac{1}{2}$$

2. Pour cette intégration par parties, le bon choix est de dériver x et de prendre une primitive de e^{3x}.

$$\int_0^1 \overset{\downarrow}{x} \cdot \overset{\uparrow}{e^{3x}}\,dx = x \cdot \tfrac{1}{3}e^{3x}\Big|_0^1 - \int_0^1 1 \cdot \tfrac{1}{3}e^{3x}\,dx = x \cdot \tfrac{1}{3}e^{3x}\Big|_0^1 - \tfrac{1}{3}\int_0^1 e^{3x}\,dx$$
$$= \tfrac{1}{3}xe^{3x}\Big|_0^1 - \tfrac{1}{9}e^{3x}\Big|_0^1 = \Big(\tfrac{1}{3}e^3 - 0\Big) - \Big(\tfrac{1}{9}e^3 - \tfrac{1}{9}\Big) = \tfrac{2}{9}e^3 + \tfrac{1}{9}$$

17.8.3 Intégration par parties : intégrale indéfinie

Théorème

Soit f une fonction continue et g une fonction dont la dérivée est continue. Notons F une primitive de f. Alors, si C est une constante, on a

$$\boxed{\int \overset{\uparrow}{f}(x)\overset{\downarrow}{g}(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx + C}$$

On note avec «↑» la fonction dont on prend une primitive et avec «↓» celle qu'on dérive.

Preuve

Commençons par préciser que F existe car f est continue. La règle du produit dit que

$$\Big(F(x)g(x)\Big)' = f(x)g(x) + F(x)g'(x)$$

Ainsi, à l'aide de la notation de l'intégrale indéfinie, on a

$$F(x)g(x) + C \overset{\text{notation}}{=} \int \Big(F(x)g(x)\Big)'\,dx \overset{\substack{\text{propriété des}\\ \text{primitives}}}{=} \int f(x)g(x)\,dx + \int F(x)g'(x)\,dx$$

On peut donc isoler l'intégrale de $f(x)g(x)$.

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx + C$$

□

Exemples

1. Pour cette intégration par parties, le bon choix est de prendre une primitive de $2x$ et de dériver $\ln(x)$.

$$\int \overset{\uparrow}{2x} \cdot \overset{\downarrow}{\ln(x)}\,dx \;=\; x^2 \cdot \ln(x) \;-\; \int x^2 \cdot \frac{1}{x}\,dx + C \;=\; x^2 \cdot \ln(x) \;-\; \int x\,dx + C$$

$$=\; x^2 \ln(x) \;-\; \tfrac{1}{2}x^2 \;+\; D \quad \text{où } D \text{ est une constante}$$

On peut vérifier le calcul en dérivant.

$$\Big(x^2 \ln(x) \;-\; \tfrac{1}{2}x^2 + D\Big)' = 2x\ln(x) + x^2\frac{1}{x} - x = 2x\ln(x)$$

2. Pour cette intégration par parties, le bon choix est de dériver x et de prendre une primitive de e^{3x}.

$$\int \overset{\downarrow}{x} \cdot \overset{\uparrow}{e^{3x}}\,dx \;=\; x \cdot \tfrac{1}{3}e^{3x} \;-\; \int 1 \cdot \tfrac{1}{3}e^{3x}\,dx + C \;=\; x \cdot \tfrac{1}{3}e^{3x} \;-\; \tfrac{1}{3}\int e^{3x}\,dx + C$$

$$=\; \tfrac{1}{3}xe^{3x} \;-\; \tfrac{1}{9}e^{3x} \;+\; D \quad \text{où } D \text{ est une constante}$$

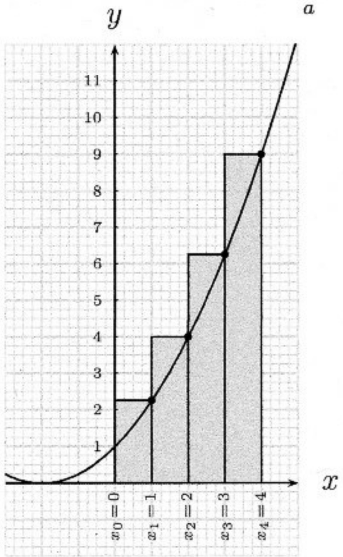
On peut vérifier le calcul en dérivant.

$$\Big(\tfrac{1}{3}xe^{3x} \;-\; \tfrac{1}{9}e^{3x} + D\Big)' = \tfrac{1}{3}e^{3x} + xe^{3x} - \tfrac{1}{3}e^{3x} = xe^{3x}$$

17.8.4 Intégration par substitution : à partir de la définition

On considère la fonction $f(x) = (\frac{1}{2}x + 1)^2$ et les bornes d'intégration $a = 0$ et $b = 4$.

On considère aussi l'intégrale $\int\limits_a^b f(x)\,dx$

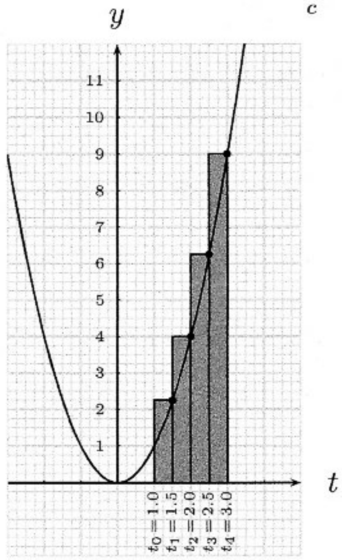


Par définition de l'intégrale, en utilisant la subdivision en n tranches $[x_{i-1}, x_i]$ de l'intervalle $[a, b]$, on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

On considère la fonction $g(t) = t^2$ et les bornes d'intégration $c = 1$ et $d = 3$.

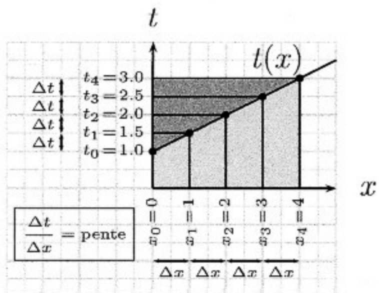
On considère aussi l'intégrale $\int\limits_c^d g(t)\,dt$



Par définition de l'intégrale, en utilisant la subdivision en n tranches $[t_{i-1}, t_i]$ de l'intervalle $[c, d]$, on a

$$\int_c^d g(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} g(t_i)\Delta t$$

On passe de droite à gauche en posant $\boxed{t = t(x)} = \frac{1}{2}x+1$.



Sur le graphe ci-contre de la fonction $t(x) = \frac{1}{2}x+1$, on voit comment la subdivision de l'intervalle $[a, b]$ se transforme en la subdivision de l'intervalle $[c, d]$.

Sur notre exemple, $a = 0$ et $c = 1 = t(a)$. De même, $b = 4$ et $d = 3 = t(b)$. On voit sur les graphes que la hauteur des tranches est la même : $f(x_i) = g(t_i)$.

Par contre la largeur des tranches change : $\Delta t = \frac{1}{2}\Delta x$

Ce changement se justifie ainsi : lorsque $n \to +\infty$, avec la notation de l'intégrale, on a

$$\frac{dt}{dx} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\Delta t}{\Delta x} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(t+\Delta t) - t}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{t(x+\Delta x) - t(x)}{\Delta x} \overset{\text{def}}{=} t'(x) \overset{\text{ici}}{=} \frac{1}{2}$$

On a donc $\boxed{dt = t'(x)dx}$ et la relation entre les deux intégrales est :

$$\int\limits_c^d g(t)\,dt = \int\limits_{t(a)}^{t(b)} g(t)\,dt \overset{\boxed{\begin{array}{c} t = t(x) \\ dt = t'(x)dx \end{array}}}{=} \int\limits_a^b g(t(x)) \cdot t'(x)\,dx \underset{\text{ici}}{\overset{\boxed{\begin{array}{c} g(t(x)) = f(x) \\ t'(x) = \frac{1}{2} \end{array}}}{=}} \frac{1}{2} \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

17.8.5 Intégration par substitution : intégrale définie

Théorème

Soit t une fonction dont la dérivée est continue sur $[a, b]$. Soit f une fonction dont la dérivée est continue sur $[t(a), t(b)]$. Alors

$$\boxed{\int_a^b f(t(x)) \cdot t'(x)\, dx \overset{\boxed{\begin{array}{c} t = t(x) \\ dt = t'(x)\, dx \end{array}}}{=} \int_{t(a)}^{t(b)} f(t)\, dt}$$

Preuve

Soit F une primitive de f (F existe car f est continue sur $[a, b]$). La règle de la dérivation en cascade nous dit que

$$\big(F(t(x))\big)' = f(t(x)) \cdot t'(x)$$

Ainsi, par le théorème fondamental du calcul intégral, on a

$$\int_a^b f(t(x)) \cdot t'(x)\, dx = F(t(x))\Big|_a^b = F(t(b)) - F(t(a))$$

Mais on a aussi
$$\int_{t(a)}^{t(b)} f(t)\, dt = F(t)\Big|_{t(a)}^{t(b)} = F(t(b)) - F(t(a))$$

Les deux termes de droites étant les mêmes, on a démontré le théorème. □

Exemples

1. Pour le calcul suivant, on lit la formule du théorème de droite à gauche.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \int_{\sin(0)}^{\sin(\frac{\pi}{2})} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \overset{\boxed{\begin{array}{c} t = \sin(x) \\ dt = \cos(x)\, dx \end{array}}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} \cdot \cos(x)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\cos^2(x)}} \cdot \cos(x)\, dx \overset{\substack{\cos(x) > 0 \\ \text{entre } 0 \text{ et } \frac{\pi}{2}}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dx = \frac{\pi}{2}$$

On aurait aussi pu utiliser directement le théorème fondamental en regardant la table de dérivation (qui se trouve à la page 198).

2. Pour le calcul suivant, on lit la formule du théorème de gauche à droite.

$$\int_2^3 \frac{2x}{1+x^2}\, dx = \int_2^3 \frac{1}{\underbrace{1+x^2}_{t(x)}} \cdot \underbrace{2x}_{t'(x)}\, dx \overset{\boxed{\begin{array}{c} t = 1+x^2 \\ dt = 2x\, dx \end{array}}}{=} \int_5^{10} \frac{1}{t}\, dt = \ln(t)\Big|_5^{10}$$

La réponse est ainsi $\ln(10) - \ln(5) = \ln(2)$.

17.8.6 Intégration par substitution : intégrale indéfinie

Théorème

Soit f et t deux fonctions dont la dérivée est continue. Alors on a un lien entre deux «mondes» (ci-dessous C est une constante).

$$\underbrace{\boxed{\int f(t(x)) \cdot t'(x)\,dx \;=\; F(t(x)) + C}}_{\text{«monde des fonctions en } x\text{»}} \quad \overset{t = t(x)}{\underset{dt = t'(x)\,dx}{=}} \quad \underbrace{\boxed{\int f(t)\,dt \;=\; F(t) + C}}_{\text{«monde des fonctions en } t\text{»}}$$

Preuve

Les formules des deux «mondes» proviennent de la notation de l'intégrale définie et de la règle de la dérivation en cascade. □

Exemples

1. Pour le calcul suivant, on part du «monde des fonctions en t», on passe dans le «monde des fonctions en x» on avance le calcul et on termine en revenant dans le «monde de départ».

$$\begin{aligned}
\overbrace{\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt}^{\substack{\text{définie seulement}\\ \text{pour } t \in\,]-1,1[}} &= \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \;\overset{\boxed{\substack{t = \sin(x)\\ dt = \cos(x)\,dx}}}{=}\; \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} \cdot \cos(x)\,dx \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{\cos^2(x)}} \cdot \cos(x)\,dx \overset{(\bigstar)}{=} \int 1\,dx \\
&= x + C \;\overset{\boxed{\substack{t = \sin(x)\\ x = \sin^{-1}(t)}}}{=}\; \sin^{-1}(t) + C \text{ où } C \text{ est une constante}
\end{aligned}$$

On peut vérifier en regardant la table de dérivation (qui se trouve à la page 198).

Concernant ($\bigstar$), on sait que si $t = \sin(x)$, alors $x = \sin^{-1}(t)$, ainsi $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Sur cet intervalle, $\cos(x) > 0$ et ainsi la simplification ($\bigstar$) peut avoir lieu.

2. Pour le calcul suivant, on part du «monde des fonctions en x», on passe dans le «monde des fonctions en t» on avance le calcul et on termine en revenant dans le «monde de départ».

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx &= \int \frac{1}{\underbrace{1+x^2}_{t(x)}} \cdot \underbrace{2x}_{t'(x)}\,dx \;\overset{\boxed{\substack{t = 1+x^2\\ dt = 2x\,dx}}}{=}\; \int \frac{1}{t}\,dt \\
&= \ln(t) + C \;\overset{\boxed{t = 1+x^2}}{=}\; \ln(1+x^2) + C \text{ où } C \text{ est une constante}
\end{aligned}$$

On peut vérifier le calcul en dérivant.

$$\Big(\ln(1+x^2) + C\Big)' = \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2}$$