



# Les intégrales

### UNE NOTION RÉCENTE

$\int f(x)dx$ , la plupart des étudiants de terminale font sûrement des cauchemars à l'approche de l'épreuve de mathématique du baccalauréat en pensant à cette notation mystérieuse sous la forme d'un S allongé. Et pourtant, si l'intégrale est enseignée aujourd'hui à tous les lycéens, cet objet mathématique n'a qu'un peu plus de 300 ans. C'est en effet à la fin du XVII<sup>e</sup> siècle que le mathématicien allemand **Gottfried Wilhelm Leibniz**, à qui l'on doit cette



notation particulière du signe intégrale, et que le scientifique anglais Isaac Newton ont initié indépendamment le calcul

infinitésimal, avec d'une part le calcul intégral et d'autre part le calcul différentiel. Ils ont tous les deux formalisé l'étude des variations d'une fonction mathématique sur un intervalle donné en subdivisant celui-ci en une infinité de petites portions, pour ensuite observer le comportement local de la fonction sur chacune de ces portions ; l'idée étant que sur un intervalle infiniment petit (infinitésimal), les variations de la fonction seraient moins complexes et il serait alors beaucoup plus facile de réaliser une approximation à l'aide de fonctions connues. Dans le cas du calcul de surface, par exemple, l'aire comprise entre une courbe et l'axe des abscisses (axe horizontal) peut être coupée en une infinité de petites surfaces qu'il est

plus aisé de calculer. C'est l'interprétation directe de l'opération qu'effectue une intégrale sur une fonction à une seule variable. Par extension, l'intégrale peut être également utilisée pour calculer la longueur d'une courbe ou un volume. Mais ce n'est là qu'une facette de l'intégrale car derrière cet outil se cache une foule de notions qui définissent les fondements de l'analyse mathématique moderne : la fonction mathématique, la notion de continuité d'une fonction, la notion de limite et donc d'infini et également la notion de dérivée. L'efficacité de l'intégrale est telle qu'on la retrouve aujourd'hui dans tous les champs de la connaissance où les mathématiques jouent un rôle essentiel ; par exemple dans de nombreux domaines de la physique tels que la mécanique, l'électricité ou l'optique mais aussi en traitement de l'image et du son, ou encore en économie.

### LES PRÉCURSEURS

Le calcul infinitésimal s'est développé au XVI<sup>e</sup> puis au XVII<sup>e</sup> siècle pour tenter de répondre à deux problèmes mathématiques majeurs : tout d'abord la détermination des aires et des volumes, qui nous concerne directement puisqu'il s'agit là du développement du concept d'intégrale, et puis aussi le calcul des tangentes à une courbe et la recherche de ses maxima et minima, il s'agit ici du concept de dérivée. Et comme nous le verrons par la suite, ces deux notions sont étroitement liées, mais intéressons-nous plus particulièrement à la question du calcul des surfaces et des volumes. Dès l'Antiquité, les premières

grandes civilisations se sont intéressées à cette question, notamment les égyptiens. Ainsi, dans le papyrus Rhind, une des principales sources des connaissances mathématiques égyptiennes, le scribe Ahmès a consigné vers 1650 avant notre ère une série de 87 problèmes avec leur solution. Parmi les sujets abordés, on trouve des calculs de surfaces et de volumes, appliqués à des cas concrets : par exemple, les Égyptiens déterminaient la surface des champs (carrés, rectangles, triangles et disques), le volume des greniers à grains (parallélépipèdes) ou celui des pyramides, qu'elles soient



entières ou bien tronquées. Si les résultats énoncés sont exacts lorsqu'ils sont traduits dans le langage mathématique moderne, ils ne sont en revanche pas démontrés. Ce sont les Grecs qui vont faire des mathématiques une discipline à part entière et qui vont développer l'art de la démonstration. Ainsi, pour déterminer des aires ou des volumes, Eudoxe de Cnide (v. 408 - v. 355 av. J.-C.) et Antiphon (v. 430 av. J.-C.) élaborent la méthode d'exhaustion. Celle-ci s'avèrera particulièrement efficace puisqu'elle traversera le temps jusqu'à Newton et Leibniz, elle sera donc utilisée durant 2000 ans. La méthode d'exhaustion consiste à « vider » une surface quelconque à l'aide de polygones dont l'aire est calculable,

### ZÉNON (V. 496 AV. J.-C.)

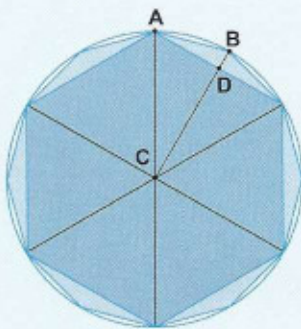
Le philosophe grec Zénon a développé plusieurs paradoxes autour du concept d'infini, pour montrer que l'interprétation grecque du monde était incomplète. Un de ces paradoxes consiste à prendre l'exemple d'un individu souhaitant atteindre un mur situé à 2 mètres de lui. Il doit d'abord se rendre à la moitié de cette distance, soit 1 mètre. Pour parcourir le mètre restant, il se rend à la moitié de cette distance, soit 50 cm, puis à la moitié des 50 cm restants donc 25 cm, et ainsi de suite. En répétant cette opération plusieurs fois, Zénon en déduit que

l'individu n'atteint jamais le mur et que donc le mouvement est impossible. Or, l'expérience nous montre que ce n'est évidemment pas le cas. En fait, dans l'exemple précédent, il faut calculer la somme de la série  $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots + 1/2^n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. On sait aujourd'hui qu'il s'agit d'une série géométrique (c'est-à-dire que chaque terme est le résultat de la multiplication du terme précédent par un terme constant, ici  $1/2$ ) et que pour un nombre infini de termes, la somme est égale à 2, ce qui résout le paradoxe de Zénon.

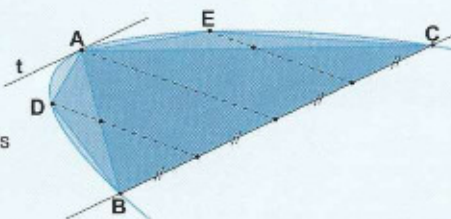
d'où son appellation qui provient du mot latin *exhaustio*, signifiant l'action d'épuiser, vider. L'idée centrale de cette méthode est qu'il est possible d'augmenter progressivement le nombre de côtés du polygone inscrit dans la surface que l'on souhaite calculer, de telle manière que la différence entre cette surface et celle du polygone devienne négligeable. Prenons l'exemple d'un cercle : on peut inscrire un triangle dans ce cercle puis augmenter le nombre de côtés du polygone pour que la surface de ce dernier devienne de plus en plus proche de celle du cercle. Cette opération est répétée un nombre fini de fois, jusqu'à ce que l'on considère que la différence entre la surface du disque et celle du polygone est devenue assez petite pour être ignorée. Dans son œuvre *Les Éléments*, qui récapitule trois siècles de théorèmes en arithmétique et en géométrie, Euclide (365-300 av. J.-C.) va utiliser la méthode d'exhaustion pour calculer des surfaces et des volumes de formes de plus en plus compliquées (cônes, sphères...), mais il va surtout démontrer que « les surfaces des cercles sont comme les carrés de leurs diamètres » (Livre XI des *Éléments* d'Euclide, proposition 2). C'est Archimède (287 - 217 av. J.-C.) qui va généraliser cette méthode, il va l'étendre au calcul des surfaces délimitées par des courbes, notamment par des paraboles. Dans le cas de la parabole  $\Gamma$  par exemple, il trace une droite (BC) parallèle à la tangente à la parabole en A. Pour calculer l'aire délimitée par la parabole et le segment (BC), il va construire les triangles (ABC) puis (AEC) et (ADB). Grâce aux propriétés géométriques de ces triangles, Archimède trouve que la surface cherchée vaut  $4/3$  de l'aire du triangle (ABC). Pour démontrer ce résultat, il utilise la méthode d'exhaustion en construisant de plus

en plus de triangles, de façon à « vider » la surface restante entre les triangles et la parabole. Il conclut par une démonstration par l'absurde en montrant que la somme de ces surfaces triangulaires ne peut pas être différente du résultat présenté plus haut ; on dit aujourd'hui que la série converge. Mais la méthode d'exhaustion, si elle préfigure réellement ce qui deviendra le calcul infinitésimal, souffre d'une lacune de taille pour être parfaitement rigoureuse : la notion d'infini. En effet, à quel moment considérer que la différence entre l'aire effectivement recherchée et la surface constituée des polygones est suffisamment négligeable pour être évaluée comme nulle ? Car le nombre de polygones construits progressivement est fini et par conséquent la quantité restante peut devenir certes très petite, mais jamais rigoureusement égale à zéro. Et une approche rigoureuse du calcul infinitésimal ne pourra jamais avoir lieu sans avoir au préalable franchi cet obstacle majeur de la pensée, mis notamment en avant par Zénon : l'infini.

### Méthode d'exhaustion



**Le cas du cercle :** on augmente le nombre de côtés du polygone jusqu'à ce que la différence entre sa surface et celle du cercle devienne négligeable.



**Le cas de la parabole :** on augmente le nombre de triangles de façon à réduire la surface entre la parabole et les triangles.

### Une notion à intégrer

$\int$   
Notation mathématique de l'intégrale.

$\infty$   
Notation mathématique de l'infini.

$f'(x)$   
Notation mathématique de la dérivée de la fonction  $f(x)$ .

IV<sup>e</sup> siècle av. J.-C.

Euclide publie *Les Éléments*, ouvrage qui récapitule trois siècles de théorèmes en arithmétique et en géométrie.

1684

Publication dans la revue allemande *Acta Eruditorum* du premier article de Leibniz sur le calcul infinitésimal, *Nova Methodus pro maximis et minimis*.

Takakazu Seki Kowa (1642-1708)

Mathématicien japonais contemporain de Newton et Leibniz, il a développé de son côté une forme de calcul intégral.

### LA MÉTHODE DES INDIVISIBLES

Du IX<sup>e</sup> au XV<sup>e</sup> siècle, la civilisation arabe va assimiler puis faire fructifier les mathématiques grecques, essentiellement dans les domaines de l'algèbre, de l'arithmétique et de la trigonométrie. Mais c'est en Europe occidentale que l'analyse, et plus particulièrement le problème de l'évaluation de la surface comprise sous une courbe, va connaître une véritable renaissance au XVI<sup>e</sup> puis au XVII<sup>e</sup> siècle. Après s'être affranchies de l'emprise de la religion, les mathématiques vont de nouveau apporter des idées nouvelles, notamment en matière de calcul de surfaces. C'est ainsi que l'Italien

Gottfried Wilhelm Leibniz



à la fin du XVII<sup>e</sup> siècle

Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647), s'appuyant sur les travaux des astronomes Galilée (1564-1642) et Kepler (1571-1630), va développer la



théorie des indivisibles. L'idée centrale de cette théorie est qu'une courbe peut être considérée comme une somme de points que Cavalieri nomme les indivisibles. De même, la surface comprise sous une courbe peut être assimilée à la somme d'une multitude de lignes, indivisibles elles aussi. Derrière cette idée d'indivisible héritée de Kepler, Cavalieri généralise la méthode d'exhaustion utilisée par le Grec Archimède. En effet, si la surface comprise sous une courbe n'est rien d'autre que la somme de rectangles infiniment minces (les indivisibles), il suffit d'additionner toutes ces portions pour obtenir l'aire recherchée ; c'est donc calculer une surface inconnue en la divisant en surfaces connues puis en les additionnant. Pour comprendre la méthode de Cavalieri, prenons de nouveau l'exemple de la parabole d'équation  $y = x^2$ . Cavalieri considère d'abord que la surface sous la parabole peut être découpée en une série de rectangles de largeur identique, ici égale à 1. Chaque rectangle centré sur l'abscisse  $x_i$  a une hauteur égale à  $x_i^2$  par définition de la parabole. Le premier rectangle s'étend de 0,5 à 1,5 et est centré sur 1, il a donc une hauteur de 1<sup>2</sup>, le second s'étend de 1,5 à 2,5 et est lui centré sur 2, donc une hauteur de 2<sup>2</sup> et ainsi de suite jusqu'au rectangle  $m^{\text{ème}}$  qui a pour hauteur  $m^2$ . Grâce à des expériences similaires sur d'autres surfaces, Cavalieri effectue le rapport de la somme des aires des rectangles précédents, sur l'aire du rectangle qui contient tous les autres. Pour ce dernier, la base vaut  $m+1$  puisque le premier rectangle de surface nulle commence à  $-1/2$  et que le  $m^{\text{ème}}$  rectangle finit à  $m+1/2$ , sa hauteur est égale à  $m^2$  ; la surface du grand rectangle est donc  $m^2(m+1)$ . Le rapport défini par Cavalieri est le suivant :

(Surface des  $m$  rectangles) / (Surface du grand rectangle) =  $(1^2+2^2+3^2+\dots+m^2) / (m^2(m+1))$ . Après avoir testé différentes valeurs de  $m$ , Cavalieri simplifie ce rapport et il obtient la forme réduite de  $1/3 + 1/(6m)$ . Il remarque alors que pour des valeurs de  $m$  assez grandes, le terme  $1/(6m)$  devient négligeable devant  $1/3$ , ce qui préfigure la notion de limite. Pour ces valeurs de  $m$ , Cavalieri en déduit donc que :

(Surface des  $m$  rectangles) =  $1/3$  (Surface du grand rectangle) ou en d'autres termes, (Surface sous la parabole) =  $1/3$  (Surface du grand rectangle). Or, si l'on considère la surface de la parabole, depuis l'origine ( $x=0$ ) jusqu'à une abscisse  $x$  quelconque, on a donc :

Surface sous la courbe de  $x^2 = (1/3) x x^2 = (1/3) x^3$ . Ce résultat obtenu par Cavalieri est fondamental puisqu'il

introduit la notion de primitive, comme nous le verrons par la suite. Par ailleurs, cette méthode des indivisibles, quoique peu rigoureuse, a permis à Cavalieri de calculer des surfaces sous d'autres courbes ainsi que des volumes.

### THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ANALYSE

D'autres mathématiciens tels que John Wallis ou Pierre de Fermat utiliseront des méthodes similaires pour calculer des surfaces sous des courbes de plus en plus compliquées (par exemple les fonctions polynomiales  $y = ax^n$ , avec  $k$  un nombre réel quelconque et  $n$  un nombre entier), mais sans jamais réussir à généraliser une théorie de l'intégration valable pour toutes les courbes. Ce sont Isaac Newton et Gottfried Wilhelm von Leibniz qui vont, indépendamment l'un de l'autre et avec des notations différentes, unifier toutes les théories éparses relatives au calcul de surfaces sous des courbes. C'est en travaillant, d'une part sur le calcul intégral (calcul des surfaces ou des volumes), et d'autre part sur le calcul différentiel (calcul des tangentes à une courbe, position des maxima et des minima), qu'ils vont faire le lien entre les deux et aboutir au théorème fondamental de l'analyse.

### LES DÉRIVÉES

Le problème posé par le calcul d'une tangente à une courbe remonte lui aussi aux Grecs et à Archimède en particulier. Et à l'instar du calcul des surfaces, les mathématiciens se sont intéressés à des comportements locaux, ce qui implique la manipulation de quantités infiniment petites et donc de très légères variations, il s'agit du calcul différentiel. Roberval, Wallis ou Fermat développent des techniques astucieuses mais encore une fois, ils sont incapables de les généraliser. Ce sera l'oeuvre de Leibniz qui, en introduisant le concept de limite, généralise le calcul différentiel tel qu'on le connaît aujourd'hui et définit mathématiquement la dérivée :  $dy/dx = \lim \Delta x/\Delta y$ . Cette égalité signifie que la variation locale d'une fonction  $y=f(x)$  en un point  $x$  quelconque est le rapport d'une petite variation de la fonction associée à une petite variation de  $x$ , sur cette petite variation de  $x$ . Le concept de limite est ici indispensable puisque la variation de  $x$  est infinitésimale. Cette définition va ainsi permettre de calculer rigoureusement les dérivées de n'importe quelle fonction et de formaliser des règles de calcul. Leibniz note  $F'(x)$  (prononcer f prime de x), la dérivée de la fonction  $f(x)$ . Connaître  $F'(x)$ , c'est connaître les variations de  $f(x)$  en n'importe quel point. Et par exemple, la dérivée d'une fonction constante est nulle, la dérivée de  $f(x) = x$  est  $F'(x) = 1$  ou encore la dérivée de  $f(x) = x^n$  est  $F'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ .

En utilisant sa propre définition du calcul différentiel, Leibniz va étudier une variation infinitésimale de l'aire  $\Delta A$  sous la courbe de  $y = f(x)$  et pour une

variation  $\Delta x$  très petite. Il obtient que  $\Delta A = \lim (y \cdot \Delta x)$  car il s'agit en fait de l'aire d'un rectangle de largeur infiniment petite  $\Delta x$  et de hauteur  $y = f(x)$ . Mais à la différence de ses prédécesseurs, Leibniz peut formuler cette égalité sans approximation car grâce au concept de limite, elle est rigoureuse d'un point de vue mathématique. Et on tire de cette égalité que  $\lim (\Delta A/\Delta x) = y$ . En d'autres termes et d'après la définition de la dérivée posée par Leibniz, la variation ou la dérivée de l'aire sous la courbe de la fonction  $f(x)$  est la fonction  $f(x)$  elle-même. Pour calculer la surface entre deux points  $a$  et  $b$ , il suffit donc de sommer toutes les surfaces infinitésimales  $\Delta A$  entre ces deux positions. Comme il s'agit d'une somme, Leibniz note cette opération avec le  $s$  majuscule de l'époque  $\int$ , et la différentielle de  $x$  est notée  $dx$ . Nous avons donc  $dA = y \cdot dx = f(x) \cdot dx$  et par conséquent l'aire sous la courbe de  $f(x)$  est  $A = \int_a^b f(x) dx$ , soit l'intégrale de  $a$  à  $b$  de  $f(x)$ . Mais comment calculer cette intégrale ?

Nous avons vu précédemment que la dérivée de l'aire sous la courbe en un point  $x$  quelconque était égale à la fonction  $f(x)$ . Cela signifie qu'intégrer  $f(x)$  puis la dériver ne change rien ; la dérivation et l'intégration sont donc en quelque sorte deux opérations inverses l'une de l'autre : c'est le théorème fondamental de l'analyse. Et puisque  $A'(x) = dA/dx = f(x)$ , pour calculer l'intégrale de  $f(x)$ , il faut trouver une fonction  $F(x)$  que l'on nomme primitive de  $f(x)$ , telle que  $F'(x) = f(x)$ . L'aire sous la courbe de  $f(x)$  entre  $a$  et  $b$  est donc :

$$A = \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

où  $a$  et  $b$  sont les bornes d'intégration, et  $x$  est la variable d'intégration.

### L'EXEMPLE DE LA PARABOLE

Examinons le cas de la parabole qui a mobilisé l'attention de précurseurs tels qu'Archimède ou Cavalieri. À cet effet, calculons par exemple l'aire sous la parabole entre  $x = -1$  et  $x = 4$ . Selon la notation usuelle initiée par Leibniz, nous recherchons donc :

$$I = \int_{-1}^4 x^2 dx$$

Pour cela, il nous faut tout d'abord déterminer une primitive  $F(x)$  de  $f(x) = x^2$  tel que  $F'(x) = x^2$ . D'après les règles de dérivation déjà évoquées,  $(x^n)' = \alpha x^{\alpha-1}$ , on en déduit qu'ici  $F(x) = 1/3 x^3$  car en considérant que  $\alpha = 3$ ,  $F'(x) = (1/3 x^3)' = 3 (1/3 x^{3-1}) = x^2$ . D'où en appliquant la règle de l'intégration :

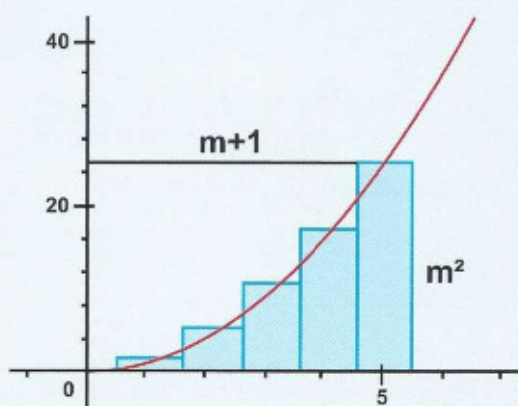
$$I = \int_{-1}^4 x^2 dx = \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^4 = \frac{1}{3} [4^3 - (-1)^3] = \frac{1}{3} [64 - (-1)] = \frac{65}{3} = 21,66666...$$

Il est également intéressant de noter au passage qu'avec sa méthode des indivisibles, Cavalieri a trouvé la primitive de la parabole.

### L'EXISTENCE D'UNE INTÉGRALE

Avec la formalisation du calcul infinitésimal, Newton et Leibniz ont véritablement inauguré l'ère de l'analyse mathématique. De nombreux mathématiciens vont leur emboîter le

### Méthode de Cavalieri



pas et tenter de résoudre les nombreux problèmes mathématiques que pose le calcul intégral. Pour n'en citer que deux, le Français Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) et l'Allemand Bernhard Riemann

(1826-1866) s'efforcent de travailler sur l'existence même d'une intégrale, ce qui les amène à définir plus précisément les notions de continuité et de limite. Par exemple, est-ce que  $\int_a^b (1/x^2) dx$  existe ? En effet, la fonction  $f(x) = 1/x^2$  n'est pas définie en 0 car  $1/0$  n'est pas défini mathématiquement, donc des hypothèses sont nécessaires avant de calculer une intégrale. Pour que  $\int_a^b f(x) dx$  existe,  $f(x)$  doit être continue sur l'intervalle  $[a, b]$  : physiquement, cela signifie que l'on doit pouvoir tracer la courbe représentative de  $f(x)$  de  $a$  à  $b$  sans avoir à soulever le stylo de la feuille.

Le problème de la définition d'une intégrale se pose également lorsque l'intervalle d'intégration est infini. Ainsi, quelle est l'aire présente sous la courbe de  $f(x)$  de 1 à l'infini (que l'on note avec le symbole  $\infty$ ) ? Intuitivement, on comprend bien que si la fonction tend vers une valeur infinie lorsque  $x$  tend vers l'infini, l'aire présente sous la courbe tend elle aussi vers l'infini, et par conséquent, l'intégrale n'est pas

définie. Par exemple,  $\int_1^\infty x dx$  n'est pas définie. Mais réciproquement, ce n'est pas parce qu'une fonction  $f(x)$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers l'infini, que  $\int_1^\infty f(x) dx$  est forcément définie. La fonction  $f(x) = 1/x$  illustre parfaitement ce cas de figure. En effet, la primitive de  $1/x$  est définie comme étant le logarithme népérien, noté  $\ln(x)$  avec  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$ . Donc,  $\int_1^\infty dx/x = [\ln(x)]_1^\infty$  or  $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x = 0$ , donc cette dernière hypothèse n'est pas suffisante. Pour savoir si une fonction est intégrable sur un intervalle, c'est-à-dire que l'intégrale ne prend pas une valeur infinie, il faut avoir recours aux comparaisons. Si quelque soit  $x$  compris dans un intervalle  $[a, b]$ ,  $f$  et  $g$  étant deux fonctions continues sur cet intervalle,  $|f(x)| < |g(x)|$ , alors

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

En d'autres termes, si la valeur absolue de  $f$  est inférieure à la valeur absolue de  $g$ , alors leurs intégrales respectives sont ordonnées de manière identique. Donc si la fonction  $g$  est intégrable (donc que son intégrale a une valeur finie), alors la fonction  $f$  l'est également et inversement, si  $f$  n'est pas intégrable (son intégrale prend une valeur infinie), alors  $g$  ne l'est pas non plus. Ainsi, à l'aide de quelques fonctions de référence, il est possible de savoir rapidement si une intégrale est définie ou pas. Par exemple, pour l'intervalle  $[1, \infty[$ , la fonction  $f(x) = 1/x^2$  est une fonction de référence car elle est intégrable si et seulement si  $\alpha$  est strictement supérieur à 1.

### Étude de la variation infinitésimale de l'aire $\Delta A$ sous la courbe de $y = f(x)$

