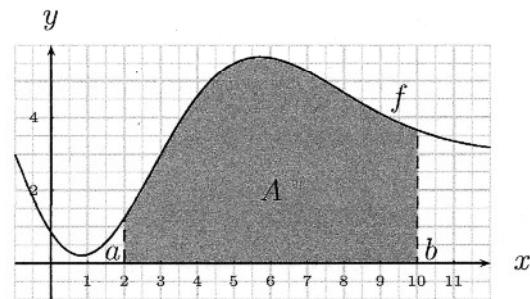


# Chapitre 14

## L'intégration numérique

### 14.1 Définition intuitive

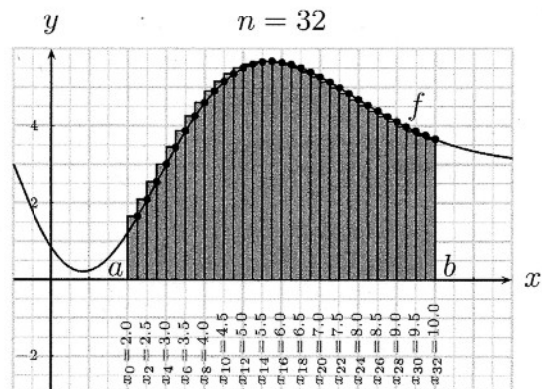
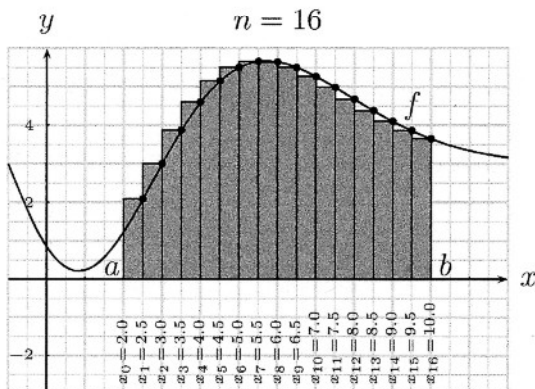
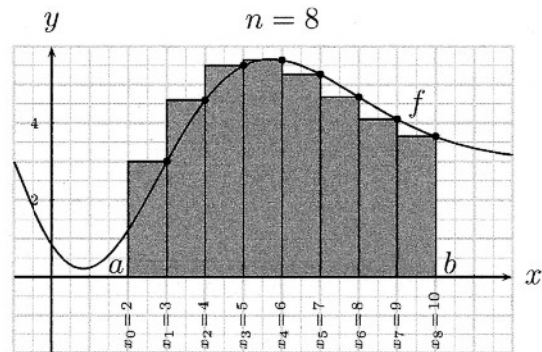
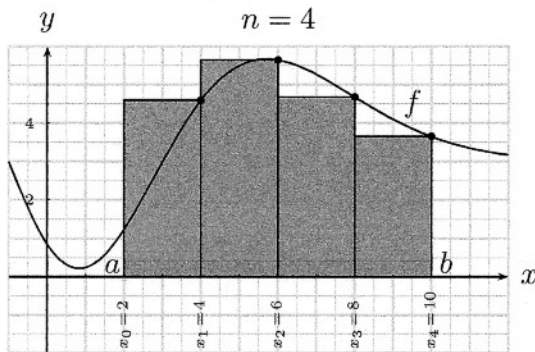
L'intégrale de la fonction  $f$  entre les bornes  $a$  et  $b$  est l'aire signée entre la fonction, l'axe des  $x$  et les axes verticaux  $x = a$  et  $x = b$ .



### 14.2 Définition formelle

Commençons par supposer que  $a < b$ .

Pour calculer cette aire, on découpe l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  intervalles.



Ainsi, lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , alors la somme des aires des rectangles tend vers l'intégrale  $A$ .

Formellement, on procède ainsi :

1. On commence par subdiviser l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  intervalles  $[x_{i-1}, x_i]$  avec  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Cela permet d'approcher l'aire cherchée en calculant l'aire des  $n$  rectangles dont le coin droit touche le graphe de la fonction, donc la hauteur du  $i$ -ième rectangle est  $f(x_i)$ .

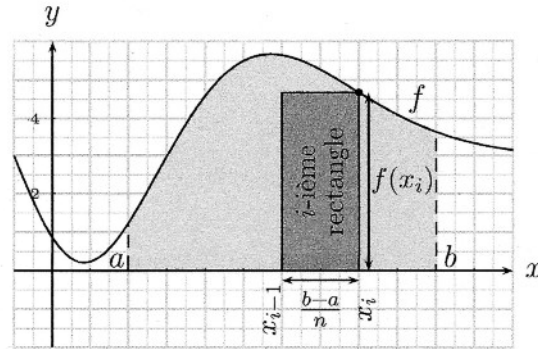
L'aire du  $i$ -ième rectangle est donnée par la célèbre formule "hauteur fois base", ainsi

$$\text{Aire du } i\text{-ième rectangle} = f(x_i) \cdot \frac{b-a}{n}$$

De ce fait, l'aire de tous les rectangles vaut :

$$\sum_{i=1}^n \left( \underbrace{f(x_i)}_{\substack{\text{hauteur} \\ \text{du } i\text{-ème} \\ \text{rectangle}}} \cdot \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\substack{\text{base} \\ \text{du } i\text{-ème} \\ \text{rectangle}}} \right)$$

Aire du  $i$ -ième rectangle



2. On fait ensuite tendre  $n$  vers l'infini (et par conséquent la longueur des intervalles de la subdivision vers 0), l'aire totale de tous les rectangles va tendre vers l'aire  $A$  cherchée.

On peut donc écrire :

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{i=1}^n \left( f(x_i) \cdot \frac{b-a}{n} \right) \right)$$

Comme la longueur de chaque intervalle de la subdivision tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini, on peut la remplacer par  $\Delta x$  (le lecteur se rappellera le chapitre de la dérivée où  $\Delta x$  symbolisait un nombre étant sensé être très petit). Autrement dit, la formule devient

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x \right) \quad \text{si on note } \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

### Notation

De nos jours, on note l'aire sous le graphe de la fonction  $f$  entre les points  $a$  et  $b$  de la façon suivante.

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

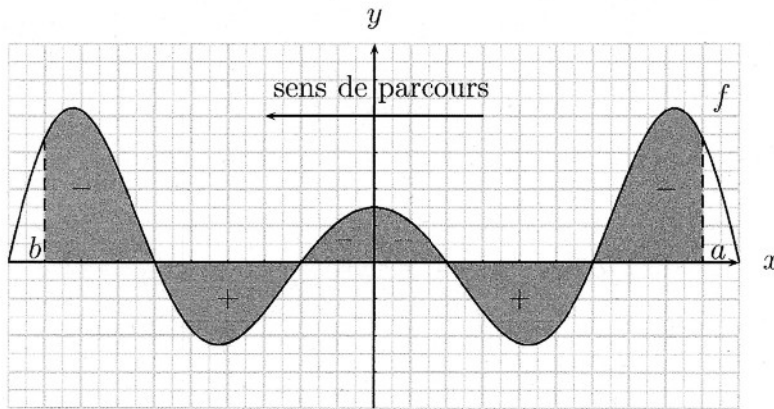
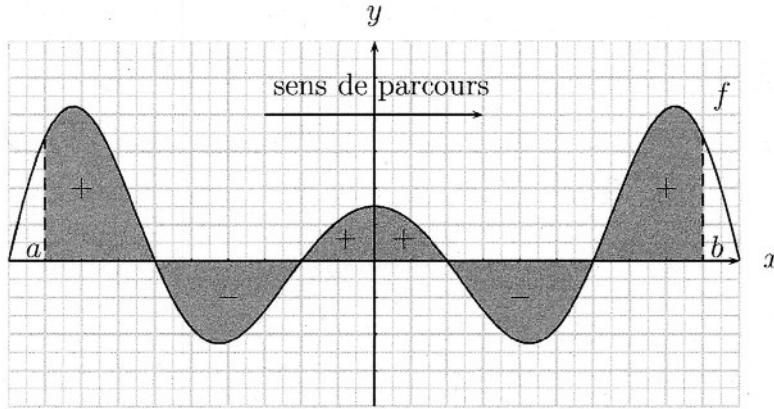
$a, b$  bornes d'intégration  
 $x$  variable d'intégration

Il s'agit de l'*intégrale (définie)* de la fonction  $f$  de  $a$  à  $b$ .

C'est une transformation visuelle de l'écriture ci-dessus, on remplace  $\Delta x$  par  $dx$  et la limite de la somme par un S déformé en  $\int$ . On bascule aussi les bornes  $a$  et  $b$  en dessous et en dessus de ce symbole afin de ne pas les oublier.

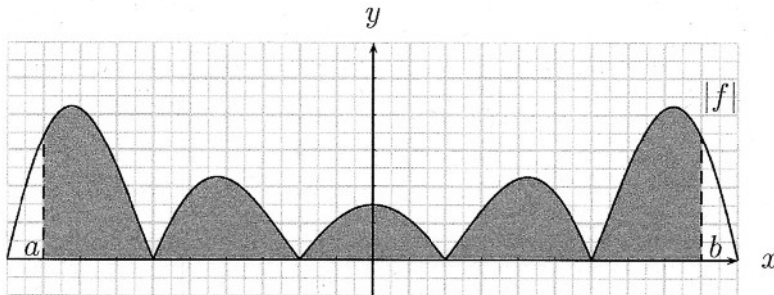
### Conséquence importante de la définition

Lorsque la fonction change de signe, l'intégrale ne donne pas l'aire entre le graphe et l'axe horizontal. En effet, l'aire sur chaque morceau sera comptée avec un signe. On a un deuxième changement de signe lorsque  $a > b$  (au lieu de  $a < b$ ).



#### 14.2.1 Pour être sûr d'avoir l'aire

Si on désire vraiment calculer la surface entre le graphe et l'axe, on utilise la valeur absolue pour passer tout le graphe au dessus de l'axe horizontal.



On peut réaliser cela grâce à la valeur absolue<sup>1</sup>. Il faut donc calculer

$$\int_a^b |f(x)| dx$$

et s'assurer que  $a$  est bien plus petit que  $b$ .

1. On peut aussi intégrer sur chaque morceau et tenir compte des signes 'à la main'.

## 14.3 Exemples

### Aire sous une parabole

Calculons l'aire sous la parabole  $f(x) = x^2$  entre 0 et  $b > 0$ .

On commence par subdiviser l'intervalle  $[0, b]$  en  $n$  morceaux (ci-contre; l'intervalle  $[0, 3]$  est subdivisé en 3, puis en 6 morceaux).

Les  $x_i$  sont ici donnés par  $x_i = \frac{b}{n} \cdot i$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Ainsi, le  $i$ -ième rectangle est de hauteur  $f(x_i)$  et de base  $\frac{b}{n}$ . On calcule l'aire de tous les rectangles, notée  $A_n$ , comme suit :

$$A_n = \sum_{i=1}^n \left( f(x_i) \cdot \frac{b}{n} \right) = \sum_{i=1}^n \left( x_i^2 \cdot \frac{b}{n} \right)$$

En substituant  $x_i$ , on obtient :

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{i=1}^n \left( \left( \frac{b}{n} \right)^3 i^2 \right) = \left( \frac{b}{n} \right)^3 \sum_{i=1}^n i^2 \\ &= \left( \frac{b}{n} \right)^3 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \end{aligned}$$

On peut faire progresser le calcul en utilisant la formule (qui peut se démontrer par récurrence) suivante :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

Ainsi, on a :

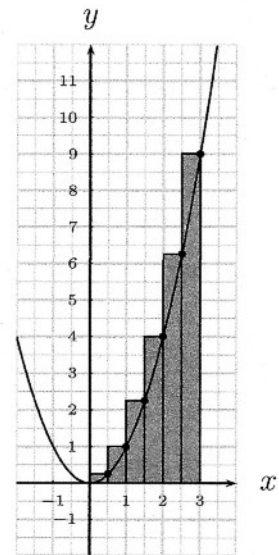
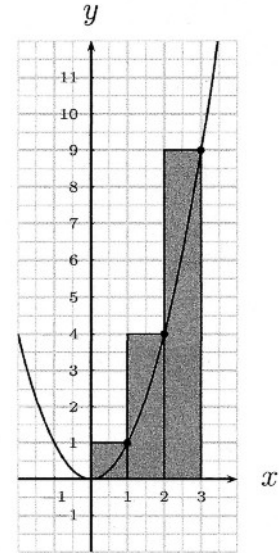
$$\begin{aligned} A_n &= \left( \frac{b}{n} \right)^3 \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \\ &= \frac{b^3}{6} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{n \cdot n \cdot n} \\ &= \frac{b^3}{6} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \left( 2 + \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

Lorsqu'on fait tendre le nombre de tranches  $n$  vers l'infini, on obtient l'aire suivante

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b^3}{6} \underbrace{\left( 1 + \frac{1}{n} \right)}_{\rightarrow 1} \underbrace{\left( 2 + \frac{1}{n} \right)}_{\rightarrow 2} = \frac{b^3}{3}$$

Ainsi, on a montré que :

$$\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}$$



## Aire sous une exponentielle

Calculons l'aire sous l'exponentielle  $f(x) = e^x$  entre 0 et  $b > 0$ .

On commence par subdiviser l'intervalle  $[0, b]$  en  $n$  morceaux (ci-contre, l'intervalle  $[0, 3]$  est subdivisé en 3, puis en 6 morceaux).

Les  $x_i$  sont aussi donnés par  $x_i = \frac{b}{n} \cdot i$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Ainsi, le  $i$ -ième rectangle est de hauteur  $f(x_i)$  et de base  $\frac{b}{n}$ . On calcule l'aire de tous les rectangles, notée  $A_n$ , comme suit :

$$A_n = \sum_{i=1}^n \left( f(x_i) \cdot \frac{b}{n} \right) = \sum_{i=1}^n \left( e^{x_i} \cdot \frac{b}{n} \right)$$

En substituant  $x_i$ , on obtient :

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{i=1}^n \left( e^{\frac{b}{n}i} \frac{b}{n} \right) = \frac{b}{n} \sum_{i=1}^n e^{\frac{b}{n}i} \\ &= \frac{b}{n} \left( e^{\frac{b}{n}} + \left( e^{\frac{b}{n}} \right)^2 + \left( e^{\frac{b}{n}} \right)^3 + \dots + \left( e^{\frac{b}{n}} \right)^n \right) \\ &= e^{\frac{b}{n}} \frac{b}{n} \left( 1 + \left( e^{\frac{b}{n}} \right) + \left( e^{\frac{b}{n}} \right)^2 + \dots + \left( e^{\frac{b}{n}} \right)^{n-1} \right) \end{aligned}$$

Il s'agit d'une progression géométrique dont la formule est

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad \left( = \frac{1 - r^n}{1 - r} \right)$$

Ainsi, on a :

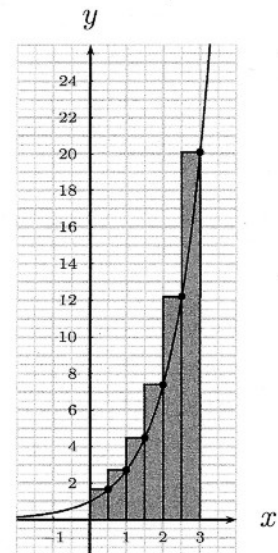
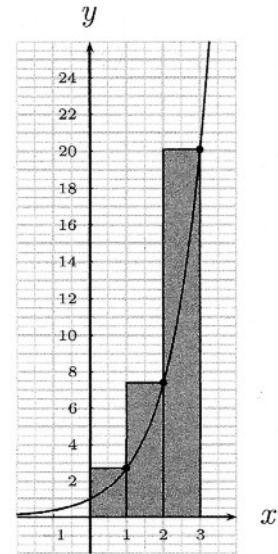
$$\begin{aligned} A_n &= e^{\frac{b}{n}} \frac{b}{n} \cdot \frac{\left( e^{\frac{b}{n}} \right)^n - 1}{e^{\frac{b}{n}} - 1} \\ &= e^{\frac{b}{n}} \frac{b}{n} \cdot \frac{e^b - 1}{e^{\frac{b}{n}} - 1} \end{aligned}$$

Pour obtenir l'aire sous la courbe, on utilise le théorème de l'Hospital pour calculer la limite de l'aire  $A_n$  lorsque le nombre de tranches  $n$  tend vers l'infini (ici,  $n$  est la variable).

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{b}{n}} \frac{b}{n} \cdot \frac{e^b - 1}{e^{\frac{b}{n}} - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^b - 1) e^{\frac{b}{n}} \cdot \frac{\frac{b}{n}}{e^{\frac{b}{n}} - 1} \\ &= (e^b - 1) \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{b}{n}}}_{\rightarrow 1} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{b}{n}}{e^{\frac{b}{n}} - 1} \stackrel{\text{Hospital}}{=} (e^b - 1) \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{b}{n^2}}{e^{\frac{b}{n}} \cdot \left( -\frac{b}{n^2} \right)} \\ &= (e^b - 1) \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{\frac{b}{n}}}}_{\rightarrow 1} = e^b - 1 \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que :

$$\int_0^b e^x dx = e^b - 1$$



## 14.4 Le théorème fondamental du calcul intégral

Ce théorème permet de calculer une intégrale (sous certaines hypothèses) en passant par le calcul différentiel. La preuve se trouve dans le cours de discipline fondamentale.

### 14.4.1 Théorème

Soit  $f$  une fonction réelle continue définie sur l'intervalle  $[a, b]$ .

Alors on a

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b} \quad \text{où} \quad F(x) \Big|_a^b \stackrel{\text{Notation}}{=} F(b) - F(a)$$

où  $F$  est une primitive quelconque de  $f$  (c'est-à-dire une fonction telle que  $F' = f$ ).

### 14.4.2 Exemples de calcul d'intégrales avec ce théorème

Reprenons les intégrales effectuées précédemment à l'aide de la définition.

1. Si  $f(x) = x^2$ , alors  $F(x) = \frac{x^3}{3}$  est une primitive de  $f$  et on a :

$$\int_0^b x^2 dx = F(x) \Big|_0^b = F(b) - F(0) = \frac{b^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{b^3}{3}$$

2. Si  $f(x) = e^x$ , alors  $F(x) = e^x + 2$  est une primitive de  $f$  et on a :

$$\int_0^b e^x dx = F(x) \Big|_0^b = F(b) - F(0) = e^b + 2 - (e^0 + 2) = e^b - 1$$

## 14.5 Le point de vue numérique

Le théorème fondamental du calcul intégral n'est pas toujours applicable, car il existe des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  qui n'admettent pas de primitives explicites. La fonction ci-dessous est une telle fonction qui joue un rôle très important en statistique car elle permet de décrire la densité de la loi normale.

$$f(x) = e^{-x^2}$$

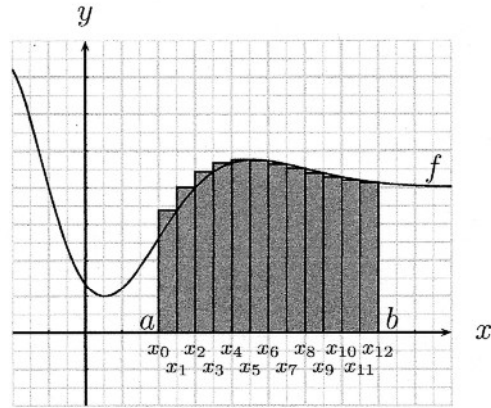
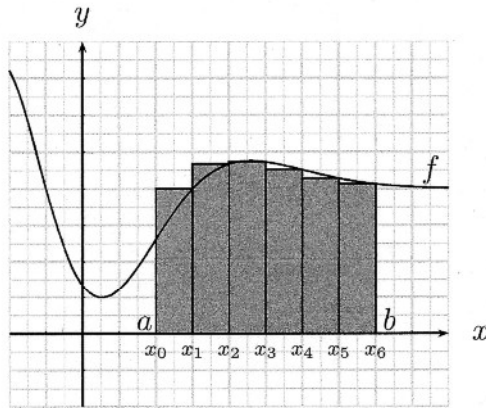
Il est alors nécessaire de revenir à la définition même de l'intégrale. Mais cette dernière étant plus technique, il devient nécessaire d'utiliser un ordinateur pour calculer une approximation de cette intégrale (le passage à la limite discuté dans la définition devient délicat à cause des erreurs d'arrondi).

Les numériciens ont ainsi cherché de nouvelles façons pour faire de meilleures approximations. La première méthode, la méthode des approximations à gauche, est celle de la définition donnée dans ce cours. De manière équivalente, il y a aussi la méthode des approximations à droite. On présentera ensuite la méthode du point médian (aussi appelée méthode des rectangles) et la méthode des trapèzes. Puis, on parlera brièvement de la méthode de Simpson.

### 14.5.1 La méthode des approximations à droite

On subdivise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  intervalles  $[x_{i-1}, x_i]$  (avec  $i \in \{1, \dots, n\}$ ) de même largeur. On a ainsi l'approximation suivante :

$$\int_a^b f(x) dx \approx D_n \stackrel{\text{définition}}{=} \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f(x_i) \quad x_i \text{ est la borne de droite du } i\text{-ème intervalle}$$



#### Exemple

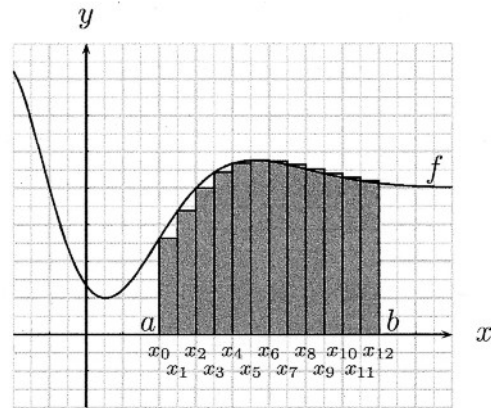
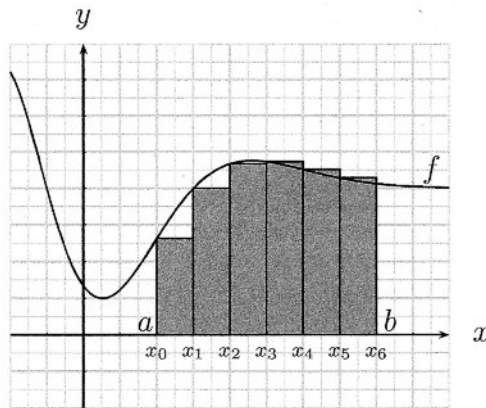
Si on cherche à estimer l'intégrale  $\int_0^6 x^2 dx = \frac{6^3}{3} = 72$ , on obtient  $D_6 = 91$  et  $D_{12} = 81.25$ . ( $D_6 = 1 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) = 91$ ).

### 14.5.2 La méthode des approximations à gauche

On subdivise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  intervalles  $[x_{i-1}, x_i]$  (avec  $i \in \{1, \dots, n\}$ ) de même largeur. On a ainsi l'approximation suivante :

$$\int_a^b f(x) dx \approx G_n \stackrel{\text{définition}}{=} \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \quad x_{i-1} \text{ est la borne de gauche du } i\text{-ème intervalle}$$

C'est la méthode présentée dans la définition.



#### Exemple

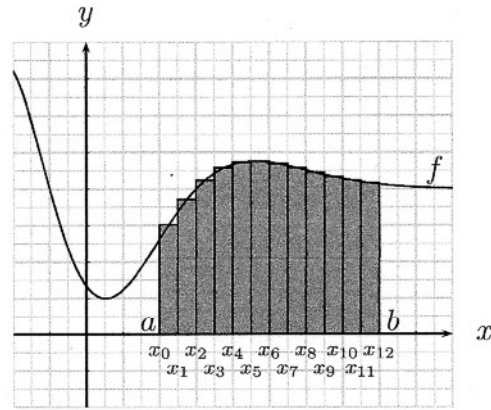
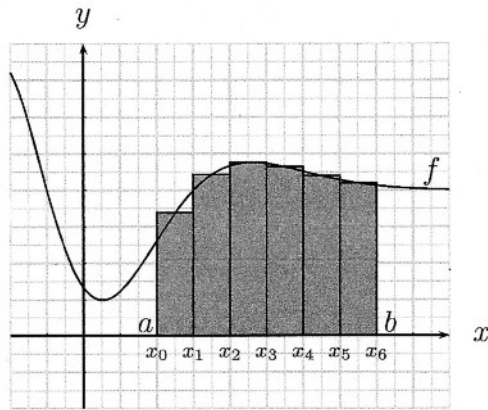
Si on cherche à estimer l'intégrale  $\int_0^6 x^2 dx = \frac{6^3}{3} = 72$ , on obtient  $G_6 = 55$  et  $G_{12} = 63.25$ . ( $G_6 = 1 \cdot (0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) = 55$ ).



### 14.5.3 La méthode du point médian (ou méthode des rectangles)

On subdivise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  intervalles  $[x_{i-1}, x_i]$  (avec  $i \in \{1, \dots, n\}$ ) de même largeur. On a ainsi l'approximation suivante :

$$\int_a^b f(x) dx \approx M_n \stackrel{\text{définition}}{=} \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \quad \frac{x_{i-1} + x_i}{2} \text{ est le milieu du } i\text{-ème intervalle}$$



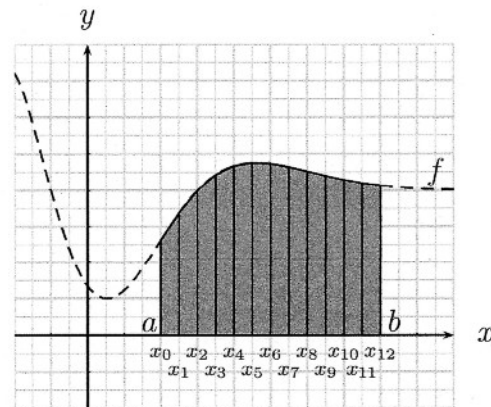
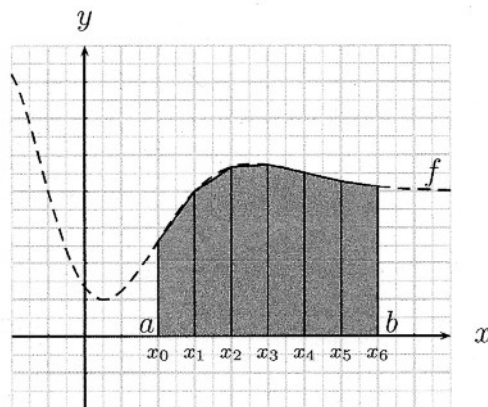
#### Exemple

Si on cherche à estimer l'intégrale  $\int_0^6 x^2 dx = \frac{6^3}{3} = 72$ , on a  $M_6 = 71.5$  et  $M_{12} = 71.875$ . ( $M_6 = 1 \cdot (0.5^2 + 1.5^2 + 2.5^2 + 3.5^2 + 4.5^2 + 5.5^2) = 71.5$ ).

### 14.5.4 La méthode des trapèzes

On subdivise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  intervalles  $[x_{i-1}, x_i]$  (avec  $i \in \{1, \dots, n\}$ ) de même largeur. On a ainsi l'approximation suivante :

$$\int_a^b f(x) dx \approx T_n \stackrel{\text{définition}}{=} \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \quad \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \text{ est la hauteur moyenne du } i\text{-ème trapèze}$$



#### Exemple

Si on cherche à estimer l'intégrale  $\int_0^6 x^2 dx = \frac{6^3}{3} = 72$ , on a  $T_6 = 73$  et  $T_{12} = 72.25$ . ( $T_6 = 1 \cdot (\frac{0^2}{2} + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \frac{6^2}{2}) = 73$ ).

**Remarque.** Cette méthode consiste à utiliser la méthode des rectangles sur une interpolation linéaire de la fonction au-dessus des intervalles de la subdivision.



### 14.5.5 Critères d'arrêts de ces méthodes

Chaque méthode nous donne une suite d'approximations qui converge vers la valeur exacte de l'intégrale. On va donc utiliser le critère d'arrêt basé sur l'erreur absolue au  $n$ -ième pas de la suite par rapport à la valeur exacte (ce critère est le même que celui utilisé dans le chapitre sur les résolutions d'équations numériques).

#### Définition

Si  $(x_n)_{n \geq 1}$  est une suite qui converge vers  $x_0$ . L'erreur (absolue) au pas  $n$  est définie par :

$$e_n = |x_n - x_0|$$

#### Théorème

Pour les méthodes des approximations à gauche et à droite, on a les majorations de l'erreur au pas  $n$  suivantes :

$$\boxed{|e_n^{(G)}| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \cdot \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|} \quad \text{et} \quad \boxed{|e_n^{(D)}| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \cdot \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|}$$

Pour les méthodes du point médian (méthode des rectangles) et la méthode des trapèzes, on a les majorations de l'erreur au pas  $n$  suivantes :

$$\boxed{|e_n^{(M)}| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \cdot \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|} \quad \text{et} \quad \boxed{|e_n^{(T)}| \leq \frac{(b-a)^3}{6n^2} \cdot \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|}$$

Cela signifie que les méthodes des approximations à gauche et à droite sont exactes pour des fonctions constantes (dont la dérivée est nulle). Tandis que les méthodes du point médian et des trapèzes sont exactes pour des fonctions affines (dont la dérivée seconde est nulle).

### Ingrédients pour la démonstration du théorème

#### Le développement de Taylor

On va utiliser le développement de Taylor d'ordre  $n$  en  $x_0$  d'une fonction  $f$  dont les  $n+1$  premières dérivées sont supposées continues. Le nombre  $\xi$  ci-dessous est entre  $x$  et  $x_0$ .

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Il est important de bien souligner le fait que  $\xi$  dépend de la valeur de  $x_0$  et de  $x$ .

#### L'inégalité triangulaire

Cette inégalité permet d'écrire :

$$\left| x_1 + x_2 + \cdots + x_n \right| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \quad \text{ou} \quad \left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$$

### Démonstration de la formule concernant la borne d'erreur pour la méthode des approximations à gauche

On peut commencer à estimer l'erreur en utilisant les définitions, les notations précédentes et l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |e_n^{(G)}| &= \left| \int_a^b f(x) dx - G_n \right| = \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - f(x_{i-1}) \Delta x \right) \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - f(x_{i-1}) \Delta x \right| \end{aligned}$$

Prenons  $F$  une primitive de  $f$  ( $F$  existe car  $f$  est continue). Par le théorème fondamental du calcul intégral, on a :

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

On utilise le développement de Taylor d'ordre 1 en  $x_{i-1}$  de la fonction  $F$  pour simplifier cette intégrale :

$$F(x) = F(x_{i-1}) + f(x_{i-1})(x - x_{i-1}) + \frac{f'(\xi_i)}{2}(x - x_{i-1})^2 \quad (\xi_i \text{ est entre } x_{i-1} \text{ et } x)$$

En évaluant ce développement en  $x_i$ , on trouve :

$$F(x_i) = F(x_{i-1}) + f(x_{i-1})\Delta x + \frac{f'(\xi_i^*)}{2}(\Delta x)^2 \quad (\xi_i^* \text{ est entre } x_{i-1} \text{ et } x_i)$$

Ainsi :

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(x_{i-1})\Delta x + \frac{f'(\xi_i^*)}{2}(\Delta x)^2$$

Par conséquent, on a :

$$|e_n^{(G)}| \leq \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - f(x_{i-1})\Delta x \right| = \sum_{i=1}^n \left| f'(\xi_i^*) \cdot \frac{(\Delta x)^2}{2} \right|$$

De plus, on peut simplifier cette expression grâce à la dernière majoration suivante :

$$|f'(\xi_i^*)| \leq \max_{x \in [a, b]} |f'(x)| \quad \text{car } \xi_i^* \in [a, b]$$

D'où :

$$|e_n^{(G)}| \leq \sum_{i=1}^n \left| f'(\xi_i^*) \cdot \frac{(\Delta x)^2}{2} \right| = \sum_{i=1}^n |f'(\xi_i^*)| \cdot \frac{(\Delta x)^2}{2} \leq \sum_{i=1}^n \max_{x \in [a, b]} |f'(x)| \cdot \frac{(\Delta x)^2}{2}$$

En utilisant le fait que  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ , on obtient la majoration annoncée :

$$|e_n^{(G)}| \leq n \cdot \max_{x \in [a, b]} |f'(x)| \cdot \frac{(\Delta x)^2}{2} = \frac{(b-a)^2}{2n} \cdot \max_{x \in [a, b]} |f'(x)| \quad \square$$

### A propos de la démonstration de la formule concernant la borne d'erreur pour la méthode des approximations à droite

La démonstration est quasiment la même. On utilise bien sûr  $D_n$  au lieu de  $G_n$  et on devra utiliser le développement de Taylor d'ordre 1 en  $x_i$  de la fonction  $F$  (au lieu du développement en  $x_{i-1}$ ).

### Démonstration de la formule concernant la borne d'erreur pour la méthode du point médian

Notons  $x_{i-\frac{1}{2}}$  le milieu de l'intervalle  $[x_{i-1}, x_i]$ . On peut commencer à estimer l'erreur en utilisant les définitions, les notations précédentes et l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |e_n^{(M)}| &= \left| \int_a^b f(x) dx - M_n \right| = \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(x_{i-\frac{1}{2}}) \Delta x \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - f(x_{i-\frac{1}{2}}) \Delta x \right) \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - f(x_{i-\frac{1}{2}}) \Delta x \right| \end{aligned}$$

Prenons  $F$  une primitive de  $f$  ( $F$  existe car  $f$  est continue). Par le théorème fondamental du calcul intégral, on a :

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

On utilise le développement de Taylor d'ordre 2 en  $x_{i-\frac{1}{2}}$  de la fonction  $F$  pour simplifier cette intégrale. Il existe  $\xi_i$  entre  $x_{i-\frac{1}{2}}$  et  $x$  tel que :

$$F(x) = F(x_{i-\frac{1}{2}}) + f(x_{i-\frac{1}{2}})(x - x_{i-\frac{1}{2}}) + \frac{f'(x_{i-\frac{1}{2}})}{2}(x - x_{i-\frac{1}{2}})^2 + \frac{f''(\xi_i)}{3!}(x - x_{i-\frac{1}{2}})^3$$

En évaluant ce développement en  $x_i$ , il existe  $\xi_i^*$  entre  $x_{i-\frac{1}{2}}$  et  $x_i$  tel que :

$$F(x_i) = F(x_{i-\frac{1}{2}}) + f(x_{i-\frac{1}{2}}) \left( \frac{\Delta x}{2} \right) + \frac{f'(x_{i-\frac{1}{2}})}{2} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^2 + \frac{f''(\xi_i^*)}{3!} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^3$$

En évaluant ce développement en  $x_{i-1}$ , il existe  $\xi_i^{**}$  entre  $x_{i-\frac{1}{2}}$  et  $x_{i-1}$  tel que :

$$F(x_{i-1}) = F(x_{i-\frac{1}{2}}) - f(x_{i-\frac{1}{2}}) \left( \frac{\Delta x}{2} \right) + \frac{f'(x_{i-\frac{1}{2}})}{2} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^2 - \frac{f''(\xi_i^{**})}{3!} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^3$$

Ainsi :

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(x_{i-\frac{1}{2}}) \Delta x + \frac{f''(\xi_i^*)}{48} (\Delta x)^3 + \frac{f''(\xi_i^{**})}{48} (\Delta x)^3$$

On peut maintenant simplifier  $|e_n^{(M)}|$ , puis on utilise l'inégalité triangulaire et les majorations suivantes

$$|f''(\xi_i^*)| \leq \max_{x \in [a, b]} |f''(x)| \quad \text{et} \quad |f''(\xi_i^{**})| \leq \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$$

afin de trouver :

$$\begin{aligned} |e_n^{(M)}| &\leq \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - f(x_{i-\frac{1}{2}}) \Delta x \right| = \sum_{i=1}^n \left| f''(\xi_i^*) \cdot \frac{(\Delta x)^3}{48} + f''(\xi_i^{**}) \cdot \frac{(\Delta x)^3}{48} \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left( |f''(\xi_i^*)| \cdot \frac{(\Delta x)^3}{48} + |f''(\xi_i^{**})| \cdot \frac{(\Delta x)^3}{48} \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left( \max_{x \in [a, b]} |f''(x)| \cdot \frac{(\Delta x)^3}{48} + \max_{x \in [a, b]} |f''(x)| \cdot \frac{(\Delta x)^3}{48} \right) \\ &= n \cdot \max_{x \in [a, b]} |f''(x)| \cdot \frac{(\Delta x)^3}{24} = \frac{(b-a)^3}{24n^2} \cdot \max_{x \in [a, b]} |f''(x)| \quad \text{car } \Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \square \end{aligned}$$

### Démonstration de la formule concernant la borne d'erreur pour la méthode des trapèzes

Notons  $x_{i-\frac{1}{2}}$  le milieu de l'intervalle  $[x_{i-1}, x_i]$ . On peut commencer à estimer l'erreur en utilisant les définitions, les notations précédentes et l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |e_n^{(T)}| &= \left| \int_a^b f(x) dx - T_n \right| = \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \Delta x \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \Delta x \right) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \left( f(x_{i-1}) + f(x_i) \right) \cdot \frac{\Delta x}{2} \right| \end{aligned}$$

On va transformer chacun des deux termes qui se trouvent dans la valeur absolue.

1. Prenons  $F$  une primitive de  $f$  ( $F$  existe car  $f$  est continue). Par le théorème fondamental du calcul intégral, on a :

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

En effectuant le même calcul que pour la méthode du point médian, on a :

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(x_{i-\frac{1}{2}}) \Delta x + \frac{f''(\zeta_i^*)}{48} (\Delta x)^3 + \frac{f''(\zeta_i^{**})}{48} (\Delta x)^3$$

2. On utilise le développement de Taylor d'ordre 1 en  $x_{i-\frac{1}{2}}$  de la fonction  $f$ . Ainsi, il existe  $\zeta_i$  entre  $x_{i-\frac{1}{2}}$  et  $x$  tel que :

$$f(x) = f(x_{i-\frac{1}{2}}) + f'(x_{i-\frac{1}{2}})(x - x_{i-\frac{1}{2}}) + \frac{f''(\zeta_i)}{2}(x - x_{i-\frac{1}{2}})^2$$

En évaluant ce développement en  $x_i$ , il existe  $\zeta_i^*$  entre  $x_{i-\frac{1}{2}}$  et  $x_i$  tel que :

$$f(x_i) = f(x_{i-\frac{1}{2}}) + f'(x_{i-\frac{1}{2}}) \left( \frac{\Delta x}{2} \right) + \frac{f''(\zeta_i^*)}{2!} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^2$$

En évaluant ce développement en  $x_{i-1}$ , il existe  $\zeta_i^{**}$  entre  $x_{i-\frac{1}{2}}$  et  $x_{i-1}$  tel que :

$$f(x_{i-1}) = f(x_{i-\frac{1}{2}}) - f'(x_{i-\frac{1}{2}}) \left( \frac{\Delta x}{2} \right) + \frac{f''(\zeta_i^{**})}{2!} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^2$$

Ainsi :

$$\left( f(x_{i-1}) + f(x_i) \right) \cdot \frac{\Delta x}{2} = f(x_{i-\frac{1}{2}}) \Delta x + \frac{f''(\zeta_i^*)}{16} (\Delta x)^3 + \frac{f''(\zeta_i^{**})}{16} (\Delta x)^3$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} |e_n^{(T)}| &\leq \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \left( f(x_{i-1}) + f(x_i) \right) \cdot \frac{\Delta x}{2} \right| \\ &= \sum_{i=1}^n \left| \frac{f''(\xi_i^*)}{48} (\Delta x)^3 + \frac{f''(\xi_i^{**})}{48} (\Delta x)^3 - \frac{f''(\zeta_i^*)}{16} (\Delta x)^3 - \frac{f''(\zeta_i^{**})}{16} (\Delta x)^3 \right| \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on a :

$$|e_n^{(T)}| \leq \sum_{i=1}^n \left( \frac{|f''(\xi_i^*)|}{48} (\Delta x)^3 + \frac{|f''(\xi_i^{**})|}{48} (\Delta x)^3 + \frac{|f''(\zeta_i^*)|}{16} (\Delta x)^3 + \frac{|f''(\zeta_i^{**})|}{16} (\Delta x)^3 \right)$$

Grâce aux majorations suivantes

$$\begin{aligned} |f''(\xi_i^*)| &\leq \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| & \text{et} & \quad |f''(\xi_i^{**})| \leq \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \\ |f''(\zeta_i^*)| &\leq \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| & \text{et} & \quad |f''(\zeta_i^{**})| \leq \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} |e_n^{(T)}| &\leq \sum_{i=1}^n \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \cdot (\Delta x)^3 \cdot \left( \frac{1}{48} + \frac{1}{48} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \right) \\ &= n \cdot \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \cdot (\Delta x)^3 \cdot \left( \frac{1}{24} + \frac{1}{8} \right) \\ &= n \cdot \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \cdot (\Delta x)^3 \cdot \left( \frac{1}{24} + \frac{3}{24} \right) \\ &= n \cdot \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \cdot (\Delta x)^3 \cdot \frac{4}{24} \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ , on obtient la majoration de l'erreur annoncée :

$$|e_n^{(T)}| \leq n \cdot \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \cdot (\Delta x)^3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{(b-a)^3}{6n^2} \cdot \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \quad \square$$

### 14.5.6 La méthode de Simpson

On peut facilement montrer que la méthode des trapèzes satisfait la relation  $T_n = \frac{G_n + D_n}{2}$ . Il s'agit de la moyenne entre la méthode des approximations à gauche avec celle des approximations à droite.

On définit la méthode de Simpson par la formule  $S_n = \frac{T_n + 2M_n}{3}$ . C'est une moyenne pondérée entre la méthode des trapèzes et celle du point médian qui compte double.

**Théorème** Il existe une constante  $C > 1$  telle que :  $|e_n^{(S)}| \leq \frac{(b-a)^5}{C \cdot n^4} \cdot \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$

La méthode de Simpson donne des résultats exacts pour tous les polynômes de degré  $\leq 3$ .

## 14.6 Formules de quadratures

Dans cette section, on va découvrir un nouveau point de vue qui permet de retrouver les méthodes d'intégrations numériques précédentes et de pouvoir généraliser ces méthodes dans le cas du calcul des intégrales de fonctions à deux variables.

### 14.6.1 Généralités

Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^n$  (dans ce cours, on se restreint à  $n = 1$  ou  $n = 2$ ). Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  une fonction continue de  $n$  variables à valeur réelle.

Le but des formules de quadratures est de pouvoir estimer les intégrales suivantes :

$$\int_{\Omega} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int_{\Omega} f(x) dx$$

Dans ce but, on choisit  $N$  points  $a_1, a_2, \dots, a_N$  de  $\Omega$  auxquels on associe des poids  $w_k \geq 0$  tels que :

$$\sum_{k=1}^N w_k = \text{Vol}(\Omega) \quad \text{où } \text{Vol}(\Omega) \text{ est le volume de } \Omega$$

On obtient ainsi une formule de quadrature, notée  $J(f)$  et définie par :

$$J(f) = \sum_{k=1}^N w_k f(a_k)$$

#### Théorème 1

Sous ces notations, on a la majoration suivante pour l'erreur commise  $E$  :

$$E = \left| \int_{\Omega} f(x) dx - J(f) \right| \leq V_{\Omega}(f) \cdot \text{Vol}(\Omega) \quad \text{où } V_{\Omega}(f) = \sup_{x \in \Omega} f(x) - \inf_{y \in \Omega} f(y)$$

est l'écart maximal de  $f$  sur  $\Omega$

#### Preuve du théorème 1

$$\begin{aligned} \text{On a : } E &= \left| \int_{\Omega} f(x) dx - J(f) \right| = \left| \frac{\sum_{k=1}^N w_k}{\text{Vol}(\Omega)} \int_{\Omega} f(x) dx - \sum_{k=1}^N w_k f(a_k) \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^N \frac{w_k}{\text{Vol}(\Omega)} \int_{\Omega} f(x) dx - \sum_{k=1}^N \frac{w_k}{\text{Vol}(\Omega)} \int_{\Omega} f(a_k) dx \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^N \frac{w_k}{\text{Vol}(\Omega)} \int_{\Omega} (f(x) - f(a_k)) dx \right| \leq \sum_{i=1}^N \frac{w_k}{\text{Vol}(\Omega)} \int_{\Omega} |f(x) - f(a_k)| dx \end{aligned}$$

La dernière majoration provient de l'inégalité triangulaire et du fait que les poids  $w_k$  sont positifs ou nuls.

Or, par définition de  $V_{\Omega}(f)$ , on a  $|f(x) - f(a_k)| \leq V_{\Omega}(f)$ . Donc :

$$E \leq \sum_{k=1}^N \frac{w_k}{\text{Vol}(\Omega)} \int_{\Omega} V_{\Omega}(f) dx = \int_{\Omega} V_{\Omega}(f) dx = V_{\Omega}(f) \cdot \text{Vol}(\Omega)$$

□

### La technique de la partition

On peut aussi faire une partition du domaine  $\Omega$  en  $M$  domaines appelés  $\Omega_i$ . Ces domaines  $\Omega_i$  doivent alors satisfaire les conditions suivantes :

$$\text{a) } \bigcup_{i=1}^M \Omega_i = \Omega \quad \text{b) } \text{Les } \Omega_i \text{ sont d'intérieurs disjoints}$$

Pour chaque domaine  $\Omega_i$ , on choisit  $N_i$  points  $a_k^i$  et des poids associés  $w_k^i \geq 0$  qui vérifient :

$$\sum_{k=1}^{N_i} w_k^i = \text{Vol}(\Omega_i)$$

En notant  $J_i(f)$  la formule de quadrature associée sur  $\Omega_i$ , on peut définir une formule de quadrature  $J^*(f)$  sur  $\Omega$  de la manière suivante :

$$J^*(f) = \sum_{i=1}^M J_i(f) = \sum_{i=1}^M \left( \sum_{k=1}^{N_i} w_k^i f(a_k^i) \right)$$

Bien que les notations sont plus complexes, cette façon de procéder est équivalente aux formules de quadrature décrites sur la page précédente. Il y a tout de même un subtil avantage.

### Théorème 2

Sous ces notations, on a la majoration suivante pour l'erreur commise  $E^*$  :

$$E^* = \left| \int_{\Omega} f(x) dx - J^*(f) \right| \leq \max_i V_{\Omega_i}(f) \cdot \text{Vol}(\Omega)$$

### Preuve du théorème 2

$$\begin{aligned} \text{On a : } E^* &= \left| \int_{\Omega} f(x) dx - J^*(f) \right| = \left| \sum_{i=1}^M \int_{\Omega_i} f(x) dx - \sum_{i=1}^M J_i(f) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^M \left( \int_{\Omega_i} f(x) dx - J_i(f) \right) \right| \leq \sum_{i=1}^M \left| \int_{\Omega_i} f(x) dx - J_i(f) \right| \\ &\stackrel{\text{Thm 1}}{\leq} \sum_{i=1}^M V_{\Omega_i}(f) \cdot \text{Vol}(\Omega_i) \leq \sum_{i=1}^M \max_i V_{\Omega_i}(f) \cdot \text{Vol}(\Omega_i) \\ &= \max_i V_{\Omega_i}(f) \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^M \text{Vol}(\Omega_i)}_{=\text{Vol}(\Omega)} = \max_i V_{\Omega_i}(f) \cdot \text{Vol}(\Omega) \quad \square \end{aligned}$$

### Moralité

Plus la partition du domaine  $\Omega$  est fine, plus le terme  $\max_i V_{\Omega_i}(f)$  deviendra petit, donc plus l'approximation sera bonne !

En effet, la fonction  $f$  étant continue, plus les domaines  $\Omega_i$  seront petits, plus l'écart maximal de  $f$  sur  $\Omega_i$  sera petit.



### 14.6.2 Applications aux intégrales à une dimension

Dans la section précédente, on a subdivisé l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  intervalles  $[x_{i-1}, x_i]$  (avec  $i \in \{1, \dots, n\}$ ) de même largeur  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  et avec  $x_i = a + i \cdot \Delta x$  ( $x_0 = a$  et  $x_n = b$ ).

Sous les notations de cette section, on a  $\Omega = [a, b]$  et  $\Omega_i = [x_{i-1}, x_i]$ .

Cette technique permet de retrouver les méthodes déjà vues comme le montre le tableau de la page 147.

### 14.6.3 Applications aux intégrales à deux dimensions

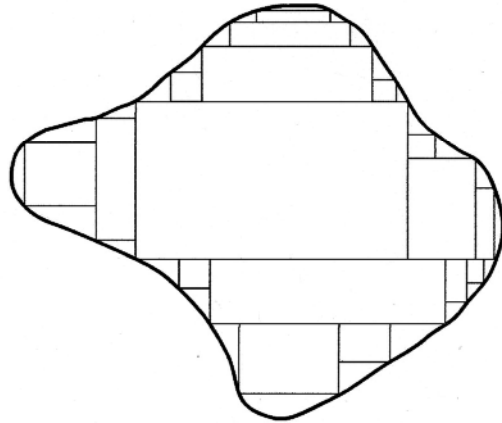
Soit  $\Omega$  un domaine borné du plan  $\mathbb{R}^2$ .

On peut toujours estimer  $\Omega$  par une partition de rectangles. Pour chaque rectangle, on peut effectuer un changement de variables pour le ramener au carré universitaire  $\tilde{\Omega} = [0, 1]^2$ .

Ainsi, on se ramène à calculer des intégrales de la forme :

$$\int_{\tilde{\Omega}} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dx \right) dy$$

On peut généraliser les méthodes précédentes en travaillant d'abord sur l'intégrale associée à la variable  $x$ , puis sur celle associée à  $y$ .



Regardons ce que donne cette généralisation pour la méthode du point médian si on découpe l'intervalle  $[0, 1]$  (sur l'axe des  $x$  et des  $y$ ) en  $n$  morceaux.

Le cas  $n = 1$  donne la formule suivante :

$$\int_{\tilde{\Omega}} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dx \right) dy \cong \int_0^1 f\left(\frac{1}{2}, y\right) dy \cong f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Le cas  $n = 2$  donne la formule suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Omega}} f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dx \right) dy \cong \int_0^1 \frac{1}{2} \left( f\left(\frac{1}{4}, y\right) + f\left(\frac{3}{4}, y\right) \right) dy \\ &\cong \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \left( f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) \right) + \frac{1}{2} \left( f\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) \right) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) \right) \end{aligned}$$

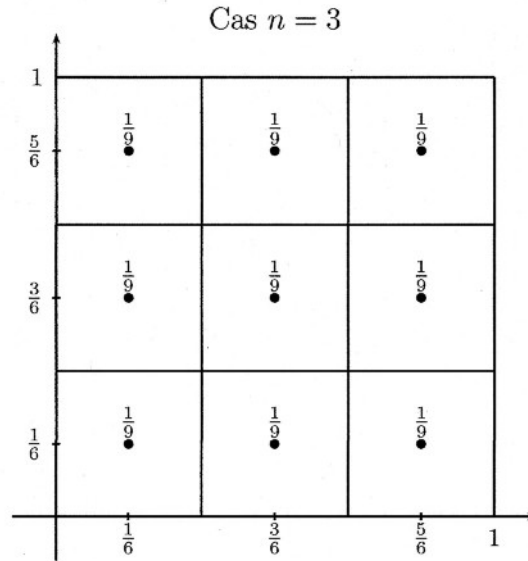
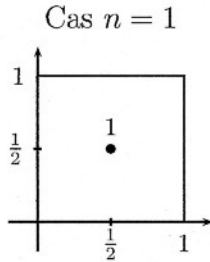
Le cas général donne la formule suivante :

$$\int_{\tilde{\Omega}} f(x, y) dx dy \cong \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f\left(\frac{i-\frac{1}{2}}{n}, \frac{j-\frac{1}{2}}{n}\right)$$

On reconnaît des formules de quadrature!

## Vision schématique des poids

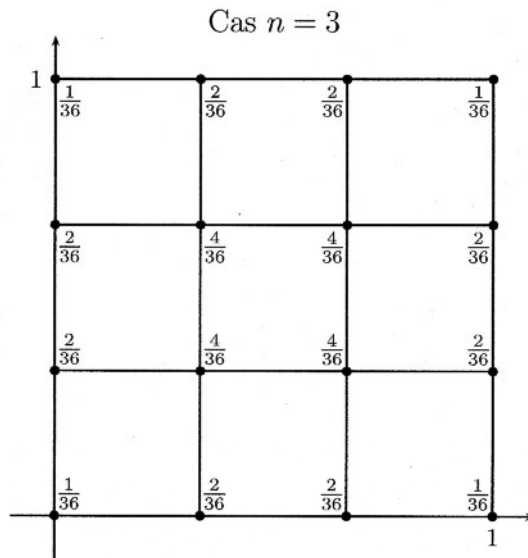
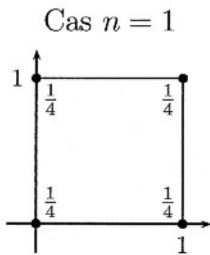
Pour la méthode généralisée à partir du point médian



On a la formule de quadrature suivante si on subdivise l'intervalle  $[0, 1]$  en  $n$  parties.

$$M_n^{(2)} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f\left(\frac{i-\frac{1}{2}}{n}, \frac{j-\frac{1}{2}}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f\left(\frac{2i-1}{2n}, \frac{2j-1}{2n}\right)$$

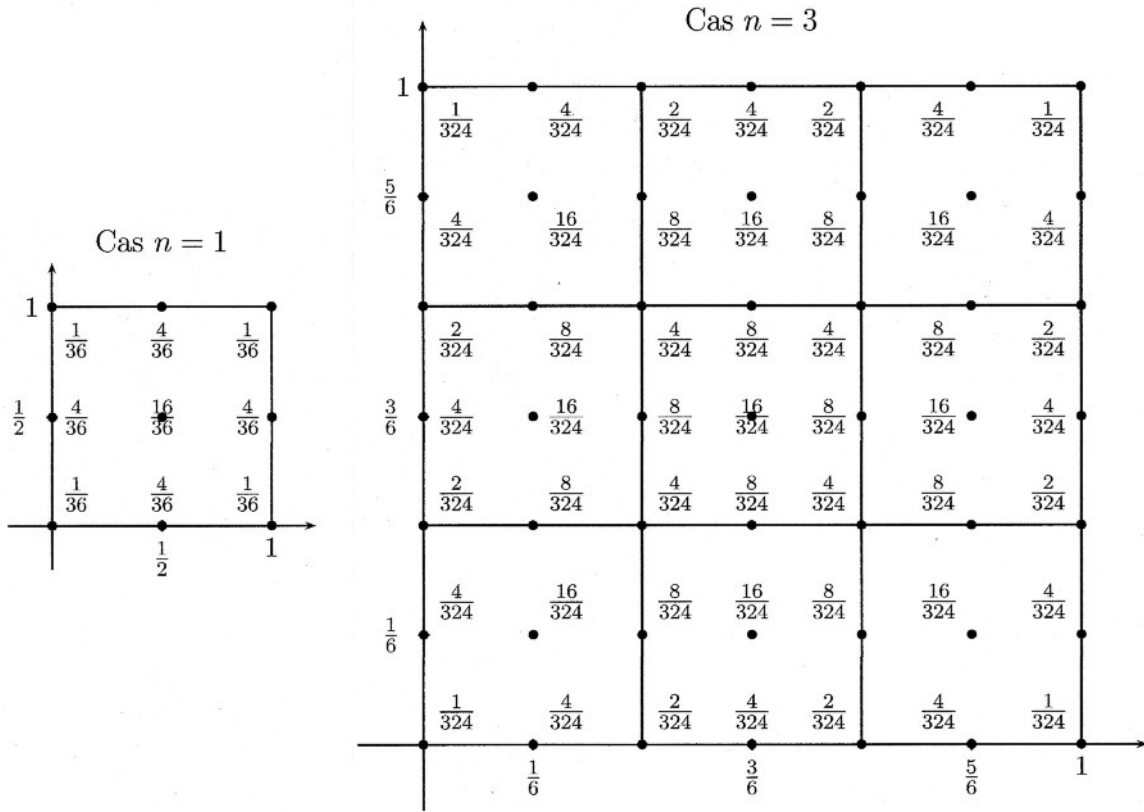
Pour la méthode généralisée à partir des trapèzes



On a la formule de quadrature suivante si on subdivise l'intervalle  $[0, 1]$  en  $n$  parties.

$$T_n^{(2)} = \frac{1}{4n^2} \left( f(0, 0) + f(1, 0) + f(0, 1) + f(1, 1) + 4 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \left( f\left(\frac{k}{n}, 0\right) + f\left(\frac{k}{n}, 1\right) + f\left(0, \frac{k}{n}\right) + f\left(1, \frac{k}{n}\right) \right) \right)$$

Pour la méthode généralisée à partir de Simpson



On a la formule de quadrature suivante si on subdivise l'intervalle  $[0, 1]$  en  $n$  parties.

$$\begin{aligned}
 S_n^{(2)} = & \frac{1}{36n^2} \left( f(0, 0) + f(1, 0) + f(0, 1) + f(1, 1) \right. \\
 & + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \left( f\left(\frac{k}{n}, 0\right) + f\left(\frac{k}{n}, 1\right) + f\left(0, \frac{k}{n}\right) + f\left(1, \frac{k}{n}\right) \right) \\
 & + 4 \sum_{k=1}^n \left( f\left(\frac{2k-1}{2n}, 0\right) + f\left(\frac{2k-1}{2n}, 1\right) + f\left(0, \frac{2k-1}{2n}\right) + f\left(1, \frac{2k-1}{2n}\right) \right) \\
 & + 8 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^n \left( f\left(\frac{i}{n}, \frac{2j-1}{2n}\right) + f\left(\frac{2j-1}{2n}, \frac{i}{n}\right) \right) \\
 & \left. + 4 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) + 16 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f\left(\frac{2i-1}{2n}, \frac{2j-1}{2n}\right) \right)
 \end{aligned}$$

**Remarque.** Cette généralisation est issue de la formule de quadrature de la méthode de Simpson en dimension 1 qui se trouve sur la page suivante ; malheureusement, on perd la relation que l'on avait avec les méthodes unidimensionnelles :

$$S_n^{(2)} \neq \frac{T_n^{(2)} + 2M_n^{(2)}}{3}$$

Pire,  $S_n^{(2)}$  ne plus s'exprimer comme une moyenne pondérée de  $T_n^{(2)}$  et de  $M_n^{(2)}$ . En effet,  $S_n^{(2)}$  a des poids qui n'apparaissent nullement dans  $T_n^{(2)}$  et dans  $M_n^{(2)}$  (contrairement au cas unidimensionnel).

méthode	sur $[0, 1]$	sur $\Omega_i$	sur $\Omega$
approximations à gauche			
	$f(0)$	$J_i(f) = \Delta x \cdot f(x_{i-1})$	$J^*(f) = \Delta x \cdot \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})$
approximations à droite			
	$f(1)$	$J_i(f) = \Delta x \cdot f(x_i)$	$J^*(f) = \Delta x \cdot \sum_{i=1}^n f(x_i)$
point médian			
	$f(\frac{1}{2})$	$J_i(f) = \Delta x \cdot f(x_{i-\frac{1}{2}})$	$J^*(f) = \Delta x \cdot \sum_{i=1}^n f(x_{i-\frac{1}{2}})$
des trapèzes			
	$f(\frac{1}{2})$	$J_i(f) = \frac{\Delta x}{2} (f(x_{i-1}) + f(x_i))$	$J^*(f) = \frac{\Delta x}{2} \left( f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right)$
de Simpson			
	$f(\frac{0}{6}) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{6})$	$J_i(f) = \frac{\Delta x}{6} (f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-\frac{1}{2}}) + f(x_i))$	$J^*(f) = \frac{\Delta x}{6} \left( f(x_0) + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{i-\frac{1}{2}}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right)$