Translations, rotations, symétries

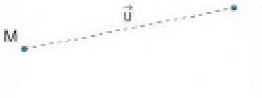
DES TRANSFORMATIONS CONNUES

Les transformations du plan sont des outils mathématiques qui permettent de modifier des figures géométriques en jouant sur leurs paramètres : position, orientation, taille, forme… Quelle que soit la transformation, l'idée reste la même : à tout point M du plan, on en associe un unique autre, que l'on note souvent M', qui est son image. On peut appliquer une transformation à un ensemble E de points, afin d'obtenir un nouvel ensemble E' dont chaque élément est l'image d'un point de E par la transformation. « Transformer » une figure géométrique, c'est tout simplement s'intéresser aux images de tous les points de cette figure par la transformation. Nous allons examiner ce sujet en étudiant 3 des transformations les plus connues : les translations, les rotations et les symétries.

LES TRANSLATIONS

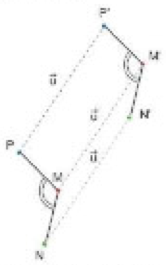
Considérons une table avec des objets dessus : si l'on pousse la table

d'une certaine distance dans une certaine direction, on lui fait subir un déplacement, que l'on appelle une translation ; cette distance et cette direction définissent le vecteur de la translation. Notons que tous les objets sur la table ont également subi la même translation : l'objet global reste inchangé.
La translation de vecteur **u** est la transformation qui, à tout point M, associe le point M' tel que **MM'** = **u**.



Examinons quelques propriétés de cette transformation. Nous voyons bien qu'elle ne fait que déplacer les objets, sans modifier réellement leur essence : un cercle translaté restera un cercle, un rectangle translaté demeurera un rectangle, etc.
La translation conserve également les distances. Si l'on considère deux points M et N, transformés respectivement en M' et N' par une translation de vecteur **u**, alors la distance MN est la même que la distance M'N'. On dit que la translation est une isométrie (du grec *iso*, qui veut dire égal, semblable). On voit aussi que l'image de la droite (MN) est la droite (M'N') et que ces deux droites sont parallèles.

De ces deux dernières propriétés (MN = M'N' et (MN) // (M'N')), on déduit que les vecteurs MN et M'N' sont égaux (**MN** = **M'N'**) et que le quadrilatère MNN'M' est un parallélogramme : deux points et leurs images par une translation forment un parallélogramme.
Enfin, la translation conserve la valeur des angles et leur orientation. On dit que la translation est une isométrie directe.

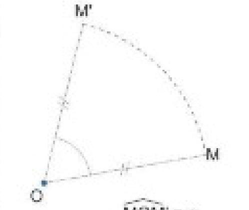


Si M', N' et P' sont les images respectives des points M, N et P par la translation de vecteur **u** alors $\widehat{N'M'P'} = \widehat{NMP}$.

LES ROTATIONS

Regardons un ***manège*** : c'est un appareil qui possède un centre

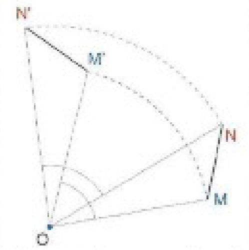
autour duquel nous tournons. Entre deux instants différents, nous avons effectué une rotation autour du centre du manège. On note que notre distance par rapport à ce centre n'a pas changé, c'est-à-dire que nous restons sur le cercle de centre O et de rayon égal à notre distance initiale par rapport à ce centre. Pour définir entièrement la rotation, nous avons donc uniquement besoin de savoir de combien nous avons tourné, ce qui correspond à l'angle de la rotation. Notons O le centre de la rotation et α (alpha) l'angle de rotation.



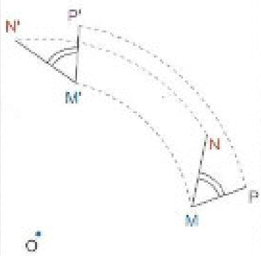
$\widehat{MOM'} = \alpha$

La rotation de centre O et d'angle α est la transformation qui
- au point O associe O
- à tout point M ≠ O associe le point M' tel que OM = OM' et $\widehat{MOM'} = \alpha$.

Nous pouvons constater que la rotation ne fait que « tourner » les objets, et que par conséquent elle conserve elle aussi la forme exacte de toutes les figures géométriques. En d'autres termes, l'image d'une figure par une rotation est superposable avec la figure initiale. La rotation est également une isométrie : sur le dessin, nous voyons bien que la longueur M'N' est égale à la longueur MN. L'image de la droite (MN) est la droite (M'N'), par contre ces deux droites ne sont pas forcément parallèles.



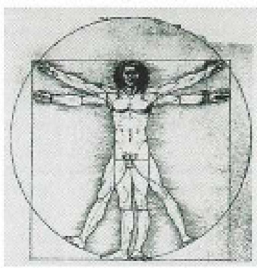
Enfin, la rotation conserve elle aussi les angles orientés, elle est donc elle aussi directe.



Si M', N' et P' sont les images respectives des points M, N et P par la rotation de centre O et d'angle α alors $\widehat{N'M'P'} = \widehat{NMP}$.
On peut ici introduire la notion de point invariant : si l'on applique une rotation de centre O à l'ensemble des points du plan, tous les points tournent sauf… le centre O lui-même. En définitive, l'image de O par cette rotation reste O. On dit que O est invariant par cette transformation.
Mentionnons quand même le cas extrême où l'angle α est égal à 0°, ce qui signifie en fait que les points tournent d'un angle nul, c'est-à-dire qu'ils ne tournent pas ; dans ce cas, tous les points sont bien évidemment invariants, la transformation ne fait rien ! On appelle cette transformation l'identité (chaque point reste identique).
Et que se passe-t-il si… α est égal à 360° ? Tous les points effectuent un tour complet autour de O, pour finalement revenir à la même place. Là encore, nous pouvons dire qu'une rotation de 360° est égale à l'identité. On voit bien ici qu'un angle de rotation n'a de sens qu'à 360° près : rajouter ou enlever 360° à un angle ne le modifie absolument pas. On dit qu'un angle a une valeur modulo 360°.
Remarquons que dans le cas d'une translation, tous les points sont déplacés, il n'y a donc aucun point invariant… sauf bien sûr dans le cas extrême où le vecteur **u** est nul, et dans ce cas aucun point ne bouge : une translation de vecteur nul est elle aussi l'identité.

LES SYMÉTRIES

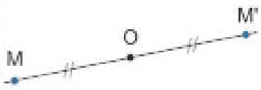
Intéressons-nous à un humain vu de face : si l'on trace un trait vertical au milieu de son ***corps***, on retrouve les



mêmes membres de part et d'autres du trait ; l'homme est symétrique par rapport à cet axe. On peut aussi dire que la partie droite du corps est obtenue en faisant la symétrie de la partie gauche par rapport à l'axe central.
On remarque dans cet exemple que le seul terme de « symétrie » est assez ambigu. En effet, cela n'a aucun sens de dire qu'un objet est « symétrique », il faut obligatoirement dire qu'il est « symétrique par rapport à quelque chose ».
Dans un plan, il faut distinguer 2 types de symétrie : la symétrie par rapport à un point (dite symétrie centrale) et la symétrie par rapport à une droite (dite symétrie axiale).

La symétrie centrale

La symétrie centrale est la symétrie par rapport à un point O, que l'on appelle le centre de symétrie. Pour symétriser un point M par rapport à O, on trace la droite (OM) et on place le point M' de l'autre côté de O, tel que OM' = OM.
Dit autrement, on place le point M' tel que **OM'** = –**OM**.

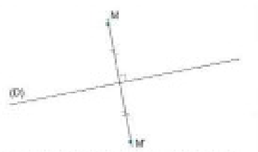


On voit sur le dessin que l'angle $\widehat{MOM'}$ est égal à 180°.
La symétrie de centre O est la transformation qui
- au point O associe O
- à tout point M ≠ O associe le point M' tel que OM = OM' et $\widehat{MOM'}$ = 180°.

Regardez de nouveau la définition d'une rotation. On remarque qu'au bout du compte, une symétrie centrale n'est rien d'autre qu'une rotation de 180° ! Une fois ce résultat trouvé, il paraît de fait assez naturel : symétriser une figure par rapport à un point, ce n'est rien d'autre que lui faire effectuer un demi-tour autour de ce point. La symétrie centrale possède donc toutes les propriétés de la rotation, et il n'est pas utile de les réétudier.

La symétrie axiale

La symétrie axiale, quant à elle, est la symétrie par rapport à une droite (D), que l'on appelle l'axe de symétrie. On appelle également cette transformation une réflexion, car elle se comporte comme si l'axe de symétrie était un miroir. Pour symétriser un point M par rapport à (D), on trace la perpendiculaire à (D) passant par M et on place le point M' de l'autre côté de (D), de façon à ce que (D) passe au milieu de M et de M', c'est-à-dire qu'elle soit la médiatrice de [MM'].



Bien sûr, si un point est sur l'axe de symétrie alors son image est lui-même.
La symétrie d'axe (D) est la transformation qui
- à un point M appartenant à (D) associe M
- à tout point M n'appartenant pas à (D) associe le point M' tel que (D)

Quelques symétries

2

On distingue deux types de symétries dans un plan : la symétrie par rapport à un point (symétrie centrale) et la symétrie par rapport à une droite (symétrie axiale).

1

N

La lettre N possède un centre de symétrie.

1

EA

Les lettres E et A possèdent un axe de symétrie.

4

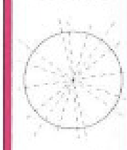
Le carré possède 4 axes de symétrie.

180

Une rotation de centre O et d'angle 180° est une symétrie de centre O.

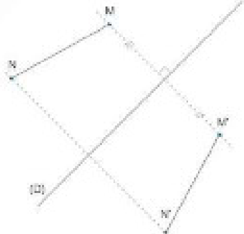
Des axes de symétrie **multiples**

Le cercle

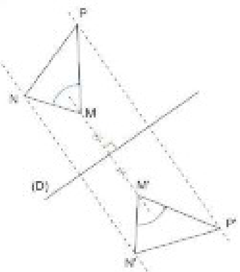


possède une infinité d'axes de symétrie (chacun de ses diamètres)

soit la médiatrice de [MM']
Les points invariants de la symétrie axiale par rapport à (D) sont les points de (D).
À l'instar des transformations précédentes, la symétrie axiale est une isométrie



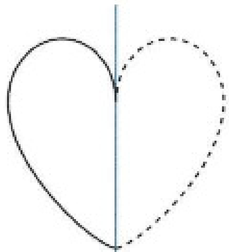
Attention cependant, la symétrie axiale possède une grande différence avec les autres transformations : si elle conserve la valeur des angles, en revanche elle inverse leur orientation ! On dit que c'est une isométrie opposée.



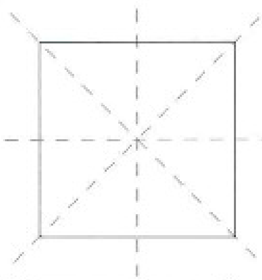
Si M', N' et P' sont les images respectives des points M, N et P par la symétrie d'axe (D) alors N'M'P' = -NMP.
Par conséquent, l'image d'une figure par une symétrie axiale n'est en règle générale pas exactement la même figure : c'est la figure « inversée », et bien souvent elle n'est pas superposable avec la première (essayez de superposer les triangles MNP et M'N'P', vous n'y arriverez pas).

Les axes et les centres de symétrie

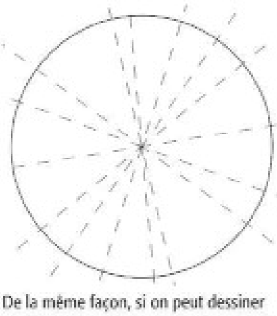
Nous pouvons désormais nous demander si, au sein même d'une figure géométrique, certaines parties de la figure peuvent être obtenues en effectuant une symétrie d'une autre partie. Par exemple, un dessin de cœur peut être obtenu en ne dessinant que la partie gauche. On en fait ensuite le symétrique par rapport à un axe vertical au milieu. On dit que le cœur possède un axe de symétrie.



La plupart des figures classiques possèdent un ou plusieurs axes de symétrie.
Qu'en est-il d'un carré, par exemple ? Possède-t-il un axe de symétrie ? Oui, bien sûr, si l'on trace un trait vertical au milieu du carré, c'est un axe de symétrie. Si l'on en trace un autre horizontal, c'en est également un. Et si nous traçons les diagonales, elles sont encore des axes de symétrie. Soit un total de 4 axes de symétrie pour le carré.



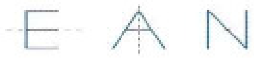
Ceci a comme conséquence que l'on peut se contenter de tracer un seul des 8 traits délimités par les axes de symétrie, puis effectuer les 4 symétries par rapport aux 4 axes, dans n'importe quel ordre, et ainsi retrouver l'intégralité du carré.
Et qu'en est-il du cercle ? Possède-t-il lui aussi des axes de symétrie ? La réponse est surprenante : il en possède une infinité. Quel que soit le diamètre que nous considérons, c'est un axe de symétrie du cercle.



De la même façon, si on peut dessiner une figure en n'en traçant qu'une partie puis en faisant le symétrique par rapport à un point, alors on dit que la figure possède un centre de symétrie. C'est bien sûr le cas du cercle : son centre est bien un centre de symétrie. Il en est de même du carré.

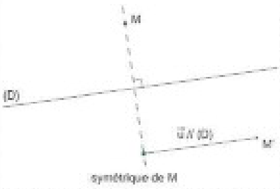
Invariance d'une figure par une isométrie

On dit qu'une figure est invariante par une isométrie si l'ensemble E' des images des points de la figure est égal à l'ensemble E des points de la figure. Attention, cela ne veut pas dire que chacun des points sont invariants par cette isométrie ! En effet, si par exemple un point A est transformé en un point B, et que B est transformé en A, alors l'image de l'ensemble {A,B} est bien {A,B}, et pourtant ni A ni B n'est invariant.
Par exemple, un cercle de centre O est invariant par une rotation de centre O, quel que soit l'angle de rotation. Si cet angle est non nul, alors tous les points sont modifiés, et pourtant la figure globale reste identique.
Quant aux symétries, il est facile de voir qu'une figure qui possède un axe de symétrie (D) est invariante par la symétrie axiale par rapport à (D).
Regardez par exemple le cœur : si on lui applique la symétrie axiale par rapport à la droite verticale passant au milieu du cœur, alors la partie gauche est transformée en la partie droite et inversement. Le cœur est donc globalement inchangé. De même, une figure qui possède un centre de symétrie O est invariante par la symétrie centrale de centre O. Et la réciproque est vraie : si une figure est invariante par une symétrie axiale d'axe (D), alors forcément (D) est un axe de symétrie pour cette figure.
Vous pouvez regarder les lettres suivantes, trouver leurs axes et centres de symétrie et leur appliquer les symétries correspondantes pour vous en rendre compte.



Une dernière isométrie : la symétrie glissée

On appelle symétrie glissée d'axe (D) et de vecteur **u** (tel que **u** // (D)) la transformation qui, à tout point M du plan, associe son image M' construite en faisant d'abord le symétrique de M par rapport à la droite (D) puis une translation de vecteur **u**.



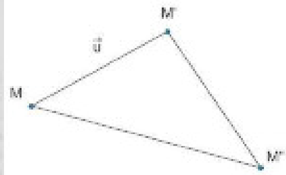
Notons que l'on obtient la même image en effectuant d'abord la translation puis la symétrie (ceci n'est vrai que parce que le vecteur de la translation est parallèle à l'axe de symétrie). Cette transformation est encore une isométrie (c'est logique : en faisant la translation, les longueurs sont conservées, et en faisant la symétrie, elles le sont encore ; elles restent donc inchangées tout au long de la transformation) et elle est opposée (là encore c'est logique : les angles sont conservés par la translation, puis inversés par la symétrie).
Pourquoi évoquer cette dernière isométrie, largement moins célèbre que ces consœurs ? Tout simplement parce que c'est la dernière isométrie du plan. En effet, un théorème affirme que « toute isométrie du plan est soit une translation, soit une rotation, soit une réflexion soit une symétrie glissée ».
On peut même préciser ce théorème : « Toute isométrie directe du plan est une translation ou une rotation, toute isométrie indirecte est une symétrie axiale ou une symétrie glissée ».

Composées d'isométries

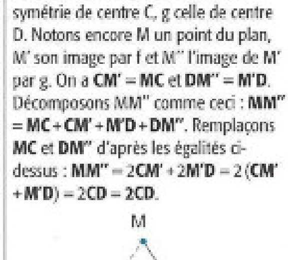
Que se passe-t-il si nous « composons » des isométries, c'est-à-dire que nous en effectuons deux à la suite ? Par exemple, si nous notons f une première isométrie et g une seconde isométrie, intéressons-nous à ce que nous noterons gof, qui est la nouvelle transformation qui consiste à d'abord effectuer la première isométrie puis à effectuer la seconde. Peut-on trouver des propriétés à cette nouvelle transformation ?
Tout d'abord, comme f conserve les distances et g aussi, la composée également. Prouvons-le : soient 2 points M et N du plan. Notons M'=f(M) et N'=f(N). Notons aussi M''=g(M') et N''=g(N'). M'' et N'' sont également les images de M et N par gof. On a M'N' = MN, car f est une isométrie. On a aussi M''N'' = M'N' car g est une isométrie. Et donc on a M''N'' = MN, et donc gof est une isométrie. Grâce au théorème précédent, nous en déduisons que gof ne peut être que l'une des 4 transformations que nous avons vues.
Ce résultat est assez puissant, il montre par exemple que si nous faisons d'abord une symétrie glissée puis une rotation, la composée n'est pas n'importe quoi, comme on pourrait penser de prime abord : elle est en fait soit une translation, soit une rotation, soit une symétrie axiale, soit une symétrie glissée.
Nous pouvons même avoir une idée plus précise de ce qu'elle est, en utilisant la version détaillée du théorème, c'est-à-dire en se demandant si gof est directe ou opposée. Si f et g sont directes alors les angles restent inchangés par f, inchangés par g, et donc par gof, et par conséquent gof est directe. Si f est directe et g opposée, ou si f est opposée et g est directe, alors les angles sont inversés une seule fois, et donc gof est opposée. Et enfin, si f et g sont toutes les deux opposées alors les angles sont inversés deux fois, et donc au final ils sont inchangés, et donc gof est directe.

Illustration par quelques exemples

Illustrons ces propriétés par quelques exemples, vérifiables à l'aide de dessins :
• La composée de deux translations de vecteurs **u** et **v** est la translation de vecteur **u+v**. Prouvons-le : notons f la translation de vecteur **u** et g celle de vecteur **v**, M un point du plan, M' son image par f et M'' l'image de M' par g.



On a **MM'** = **u**, et **M'M''** = **v**, et donc **MM''** = **MM'**+**M'M''** = **u**+**v** = **u** + **v**.
• La composée de deux symétries centrales de centres différents C et D est la translation de vecteur **2CD**.
Prouvons-le : notons cette fois f la symétrie de centre C, g celle de centre D. Notons encore M un point du plan, M' son image par f et M'' l'image de M' par g. On a **CM'** = **MC** et **DM''** = **M'D**.
Décomposons MM'' comme ceci : **MM''** = **MC**+**CM'**+**M'D**+**DM''**. Remplaçons **MC** et **DM''** d'après les égalités ci-dessus : **MM''** = 2**CM'** + 2**M'D** = 2 (**CM'** + **M'D**) = 2**CD** = **2CD**.



$\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{CD}$

• La composée de deux réflexions d'axes (D) et (E) est une translation si (D) // (E), et une rotation sinon. Nous ne le prouverons pas ici, mais un dessin et un raisonnement similaire aux démonstrations précédentes peuvent vous aider à le démontrer.

ÉNERGIE DE TRANSLATION - ÉNERGIE DE ROTATION

On peut séparer l'énergie du mouvement en deux : l'énergie de translation qui engendre le mouvement d'un corps d'un point à un autre selon une droite, et l'énergie de rotation qui engendre un mouvement circulaire autour d'un point.
Très tôt, les hommes ont voulu créer des systèmes pour passer de l'une de ces énergies à l'autre : la manivelle, par exemple, transforme une énergie de rotation autour d'un point fixe en une énergie de translation. ***Poulies***, treuils,

obéissent aux mêmes mécanismes.
À l'inverse, le moteur d'une voiture transforme un mouvement de translation en un mouvement circulaire des roues, grâce à l'ensemble piston-bielle-vilebrequin.

Généralisation de ces transformations dans l'espace

Quand nous avons abordé le sujet des symétries, nous avons vu que nous pouvions symétriser par rapport à un point, ou par rapport à une droite. Si nous nous plaçons dans l'espace à 3 dimensions, nous pouvons même symétriser par rapport à un plan. Par exemple, quand nous nous regardons dans un miroir, ce que nous voyons n'est rien d'autre que l'image de notre corps par la symétrie par rapport au plan du miroir. Notons que là encore, l'image est inversée : dans le miroir, ce qui semble être notre œil gauche est en réalité l'œil droit. Nous pouvons aussi bien sûr déplacer des objets dans chacune des trois dimensions, ou bien les faire tourner dans l'espace, et ainsi définir des translations et des rotations de l'espace. L'étude en est un peu plus compliquée mais l'on y trouve des propriétés et des théorèmes un peu similaires. En mathématiques encore plus poussées, on peut même généraliser ces transformations dans des espaces à 4, ou 5, ou 100 dimensions…

LES PAVAGES DU PLAN

Les pavages du plan utilisent généralement les isométries, c'est-à-dire que deux tuiles du plan sont déductibles l'une de l'autre par une isométrie. L'Alhambra de Grenade est réputée

pour ses nombreuses ***mosaïques*** par pavage. Au début du XXe siècle, l'artiste Maurits Cornelis Escher expérimente diverses méthodes de pavage en deux dimensions.