Corrigé

Problème 1

a) On note x le nombre de flyers et $y = P(x)$ le prix correspondant.
Pour $x = 50$, on a $y = 7{,}5$.
Pour $x = 500$, on a $y = 21$.
La fonction $P(x)$ est de la forme $y = P(x) = ax + b$, où a = pente de la droite correspondante $= \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{21 - 7{,}5}{500 - 50} = \dfrac{13{,}5}{450} = 0{,}03$.

Ainsi, on a $y = P(x) = 0{,}03x + b$.
Avec $x = 50$ et $y = 7{,}5$, on a, par substitution, $7{,}5 = 0{,}03 \cdot 50 + b$
$\Rightarrow 7{,}5 = 1{,}5 + b \Rightarrow b = 6$.
La fonction $P(x)$ est donc $\underline{\underline{P(x) = 0{,}03x + 6}}$.

b) Avec $x = 3000$, on a $P(x) = 0{,}03 \cdot 3000 + 6 = 96$.
Le montant de la facture sera donc de $\underline{\underline{96.-}}$.

c) Avec $P(x) = 756$, on a

$$\begin{array}{rcl|l} 756 &=& 0{,}03 \cdot x + 6 & -6 \\ 750 &=& 0{,}03 \cdot x & :0{,}03 \\ 25'000 &=& x & \end{array}$$

Le nombre de flyers livrés est donc de $\underline{\underline{25'000}}$.

Problème 2

On a la situation suivante

	prix d'une place	nb de places	revenus
au départ	120	8000	$120 \cdot 8000$
1 augmentation de 10.–	$120+10$	$8000-400$	$(120+10)\cdot(8000-400)$
2 augmentations de 10.–	$120+10\cdot 2$	$8000-400\cdot 2$	$(120+10\cdot 2)\cdot(8000-400\cdot 2)$
x augmentations de 10.–	$120+10x$	$8000-400x$	$(120+10x)\cdot(8000-400x)$

Le revenu s'écrit donc $(120+10x)\cdot(8000-400x) = 960'000 - 48'000x + 80000x - 4000x^2$
$= -4000x^2 + 32'000x + 960'000.$

Les coûts totaux s'écrivent coûts fixes + coûts variables $= 230'000 + 40\cdot(8000-400x)$
$= 230'000 + 320'000 - 16000x = -16000x + 550'000.$

Le bénéfice s'écrit alors revenu – coûts totaux $=$
$= -4000x^2 + 32'000x + 960'000 - (-16000x + 550'000)$
$= -4000x^2 + 32'000x + 960'000 + 16000x - 550'000$
$= -4000x^2 + 48'000x + 410'000.$

a) On doit calculer le sommet de la parabole bénéfice $= -4000x^2 + 48'000x + 410'000$.
On a $a=-4000$, $b=48'000$ et $c=410'000$.
Ainsi $x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{48'000}{2\cdot(-4000)} = \frac{48'000}{8000} = 6$

et $y_s = -4000x_s^2 + 48'000\cdot x + 410'000$
$= -4000\cdot 6^2 + 48'000\cdot 6 + 410'000 = 554'000.$

Ainsi le prix d'entrée doit être $120+10\cdot x_s = 120+10\cdot 6 = \underline{\underline{180.-}}$,
le bénéfice maximal est alors de $y_s = \underline{\underline{554'000.-}}$ et
le nombre de participants correspondant est $8000-400x_s = 8000-400\cdot 6 =$
$= \underline{\underline{5600.}}$

b) Avec bénéfice $= -4000x^2 + 48'000\cdot x + 410'000$ et avec un bénéfice de 154'000.–,
on a $-4000x^2 + 48'000\cdot x + 410'000 = 154'000$
$\Longrightarrow -4000x^2 + 48'000\cdot x + 256'000 = 0.$
On doit résoudre cette équation du 2e degré.
On a $a=-4000$, $b=48'000$ et $c=256'000$.
On a $\Delta = b^2 - 4ac = 48'000^2 - 4\cdot(-4000)\cdot 256'000 = 6'400'000'000$
et $\sqrt{\Delta} = 80'000.$

On obtient les solutions :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-48'000+80'000}{2\cdot(-4000)} = -4 \quad \text{et}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-48'000-80'000}{2\cdot(-4000)} = 16.$$

Avec $x_1 = -4$, le nombre de personnes est $8000 - 400\cdot x_1 = 8000 - 400\cdot(-4) = $ $= 9'600$ et le prix d'entrée est $120 + 10\cdot x_1 = 120 + 10\cdot(-4) = 80.-$.

Avec $x_2 = 16$, le nombre de personnes est $8000 - 400\cdot x_2 = 8000 - 400\cdot 16 = $ $= 1'600$ et le prix d'entrée est $120 + 10\cdot x_2 = 120 + 10\cdot 16 = 280.-$.

Comme l'affluence a été plus importante que prévue, c'est-à-dire supérieure à 8000 participants, on doit éliminer la solution $x_2 = 16$ et on conclut qu'il y a eu <u>9600 participants</u> et que le prix d'entrée était de <u>80.-</u>.

Problème 3

On a $M(t) = \dfrac{220}{1+21\cdot 1{,}8^{-0{,}04t}}$ avec t en jours et $M(t)$ en milliers.

a) Au début des observations, c'est-à-dire en $t=0$, on a $M(t) = \dfrac{220}{1+21\cdot 1{,}8^{0}} =$
$= \dfrac{220}{1+21} = \underline{\underline{10 \text{ milliers}}}$.

b) Après 80 jours, on a $M(t) = \dfrac{220}{1+21\cdot 1{,}8^{-0{,}04\cdot 80}} = \underline{\underline{52{,}363 \text{ milliers}}}$.

c) Avec $M(t) = 150$ milliers, on a

$$
\begin{aligned}
150 &= \frac{220}{1+21\cdot 1{,}8^{-0{,}04t}} && \cdot\left(1+21\cdot 1{,}8^{-0{,}04t}\right)\\
150\left(1+21\cdot 1{,}8^{-0{,}04t}\right) &= 220 && :150\\
1+21\cdot 1{,}8^{-0{,}04t} &= 1{,}467 && -1\\
21\cdot 1{,}8^{-0{,}04t} &= 0{,}467 && :21\\
1{,}8^{-0{,}04t} &= 0{,}022
\end{aligned}
$$

Comme $a^x = b \Rightarrow x = \dfrac{\log(b)}{\log(a)}$ $\left(\text{ou } \dfrac{\ln(b)}{\ln(a)}\right)$, on obtient

$-0{,}04t = \dfrac{\log(0{,}022)}{\log(1{,}8)} = -6{,}476 \Longrightarrow t = 161{,}9$.

Ainsi, le seuil d'alerte sera dépassé $\underline{\underline{\text{dès le } 162^e \text{ jour}}}$.

d) Il faut voir ce que devient $M(t)$ lorsque $t \to +\infty$.

Quand $t \to +\infty$, on a $1{,}8^{-0{,}04t} \longrightarrow 0$ et, donc,

$M(t) \longrightarrow \dfrac{220}{1} = 220$ milliers.

La maladie fait ainsi $\underline{\underline{220 \text{ milliers de victimes}}}$.

Problème 4

a) Pour PRIMEWATCH, on a 4,4% de perte chaque année et on peut alors utiliser la formule des amortissements : $A_n = A_0(1-t)^n$, où A_0 est la valeur au départ (en l'an 2000), t le taux de baisse annuelle, n le nombre d'années depuis 2000 et A_n la valeur après n années (en 2000+n).

On a ici $t = 4,4\% = 0,044$, $n = 14$ et $A_n = 167,75$. On cherche A_0.

$$A_n = A_0(1-t)^n \Longrightarrow 167,75 = A_0(1-0,044)^{14} \quad \text{calcul}$$
$$167,75 = A_0 \cdot 0,956^{14} \quad \text{calcul}$$
$$167,75 = A_0 \cdot 0,5326 \quad : 0,5326$$
$$314,96 = A_0.$$

La valeur était, en 2000, de 314,96 euros.

b) Pour MEGATOOL, on a des intérêts composés et on peut utiliser la formule $C_n = C_0(1+t)^n$, où C_0 est la valeur de départ (en l'an 2000), t le taux annuel d'augmentation, n le nombre d'années depuis 2000 et C_n la valeur après n années (en 2000+n).

On a ici $C_0 = 52$, $C_n = 84,15$ et $n = 14$. On cherche t.

$$C_n = C_0(1+t)^n \Longrightarrow 84,15 = 52 \cdot (1+t)^{14} \quad :52$$
$$1,618 = (1+t)^{14} \quad \sqrt[14]{}$$
$$1,035 = 1+t \quad -1$$
$$0,035 = t$$

Le taux est donc de 3,5%.

c) En 2010, on a n = 10.

Par PRIMEWATCH : $A_n = A_0(1-t)^n = 314,96 \cdot (1-0,044)^{10} = \underline{200,83 \text{ euros}}$.

Par MEGATOOL : $C_n = C_0(1+t)^n = 52 \cdot (1+0,035)^{10} = \underline{73,35 \text{ euros}}$.

d) Cherchons n tel que $A_n = C_n$: $314,96 \cdot (1-0,044)^n = 52 \cdot (1+0,035)^n$

$$\Longrightarrow 314,96 \cdot 0,956^n = 52 \cdot 1,035^n \quad : 1,035^n \text{ et } : 314,96$$
$$\frac{0,956^n}{1,035^n} = \frac{52}{314,96} \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$
$$\left(\frac{0,956}{1,035}\right)^n = \frac{52}{314,96} \quad \text{Calcul}$$
$$0,924^n = 0,165$$

On utilise alors que $a^x = b \Longrightarrow x = \frac{\log(b)}{\log(a)}$ $\left(\text{ou } \frac{\ln(b)}{\ln(a)}\right)$

On obtient ainsi $n = \dfrac{\log(0{,}165)}{\log(0{,}924)} = 22{,}69.$

On en conclut que MEGATOOL prendra pour la première fois une valeur supérieure à celle de PRIMEWATCH après 23 ans, donc <u>en 2023</u>.