Corrigé

Problème 1

a) <u>Ancien tarif</u> y_A en fonction du revenu imposable x (y_A en francs et x en milliers de francs) : on a $y_A = ax+b$ avec $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{70-45}{100-50} = \frac{25}{50} = 0,5$;
on obtient $y_A = 0,5x + b$; en utilisant $x = 50$ et $y_A = 45$, on trouve
$45 = 0,5 \cdot 50 + b \longrightarrow 45 = 25 + b \longrightarrow b = 20$.
On a donc $\underline{\underline{y_A = 0,5x + 20}}$.

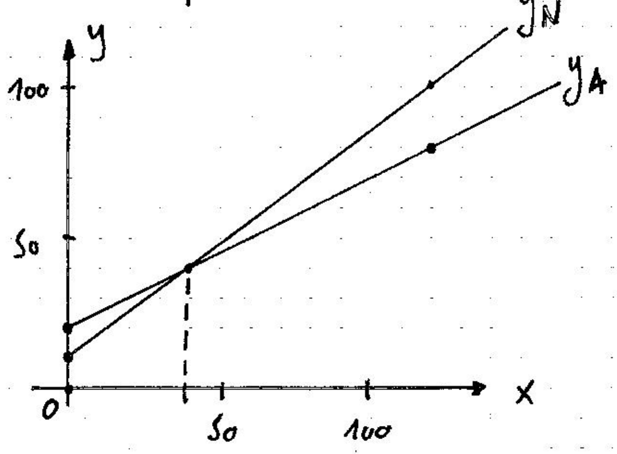
<u>Nouveau tarif</u> y_N en fonction du revenu imposable x (y_N en francs et x en milliers de francs) : on a $y_N = ax+b$ avec $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{85-47,5}{100-50} = \frac{37,5}{50} = 0,75$; on obtient $y_N = 0,75x + b$; en utilisant $x = 50$ et $y_N = 47,5$, on trouve
$47,5 = 0,75 \cdot 50 + b \longrightarrow 47,5 = 37,5 + b \longrightarrow b = 10$.
On a donc $\underline{\underline{y_N = 0,75x + 10}}$.

b) <u>Ancien tarif :</u> avec $x = 120'000 = 120$ milliers de francs, on a
$y_A = 0,5 \cdot 120 + 20 = \underline{\underline{80.-}}$.
<u>Nouveau tarif :</u> avec $x = 120'000 = 120$ milliers de francs, on a
$y_N = 0,75 \cdot 120 + 10 = \underline{\underline{100.-}}$.

c) Cherchons le revenu où les 2 tarifs sont égaux : on doit avoir $y_A = y_N$

$$
\begin{array}{rcl|l}
\Longrightarrow \quad 0,5x + 20 &=& 0,75x + 10 & -0,75x \\
-0,25x + 20 &=& 10 & -10 \\
-0,25x &=& -10 & :(-0,25) \\
x &=& 40 &
\end{array}
$$

Graphiquement, on a :



Le nouveau tarif est plus avantageux pour des revenus entre 0 et 40 milliers de francs, autrement dit entre $\underline{\underline{0 \text{ et } 40'000.-}}$.

Problème 2

a) On a : p = prix de vente d'un article

n = demande = nb de produits vendus = $42'000 - 1400p$

revenu $= n \cdot p = (42'000 - 1400p)p = 42'000p - 1400p^2 = -1400p^2 + 42'000p$

coûts = coûts fixes + coûts variables $= 72'000 + 12 \cdot n =$

$= 72'000 + 12 \cdot (42'000 - 1400p) = 72'000 + 504'000 - 16800p =$

$= -16800p + 576'000$

bénéfice = revenu − coûts $= -1400p^2 + 42'000p - (-16800p + 576'000) =$

$= -1400p^2 + 42'000p + 16800p - 576'000 =$

$= -1400p^2 + 58'800p - 576'000$, ce qui est une équation de parabole de la forme $ap^2 + bp + c$ avec $a = -1400$, $b = 58'800$ et $c = -576'000$; les coordonnées du sommet sont $(p_S ; b_S)$ avec $p_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{58'800}{2 \cdot (-1400)} = 21$ et

b_S = bénéfice $= -1400 \cdot 21^2 + 58'800 \cdot 21 - 576'000 = 41'400$;

on a en outre, avec $p_S = 21$, $n = 42'000 - 1400 \cdot 21 = 12'600$.

Ainsi, le bénéfice sera maximal si le <u>prix unitaire sera de 21.–</u> ; le <u>bénéfice maximal sera alors de 41'400.–</u> et le <u>nombre d'articles vendus sera de 12'600.</u>

b) Avec bénéfice $= -1400p^2 + 58'800p - 576'000$ et bénéfice $= 35'800$, on a

$$
\begin{aligned}
-1400p^2 + 58'800p - 576'000 &= 35'800 && \mid -35'800 \\
-1400p^2 + 58'800p - 611'800 &= 0 && \mid :(-100) \\
14p^2 - 588p + 6118 &= 0 && \mid :14 \\
p^2 - 42p + 437 &= 0
\end{aligned}
$$

ce qui est une équation du 2e degré de la forme $ap^2 + bp + c = 0$ avec $a = 1$, $b = -42$ et $c = 437$.

On a $\Delta = b^2 - 4ac = (-42)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 437 = 1764 - 1748 = 16$ et $\sqrt{\Delta} = 4$.

Les solutions sont donc $p_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{42 + 4}{2} = 23$ et $p_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{42 - 4}{2} = 19$.

Comme il a fixé un prix unitaire au-dessus de celui trouvé en a) (qui est de 21.–), on en conclut qu'il a fixé un <u>prix unitaire de 23.–</u>.

Problème 3

On va utiliser la formule des intérêts composés appliquée à cette situation :
$C_n = C_0(1+t)^n$ avec C_0 = valeur en 2000, t = taux d'augmentation, n = nb d'années et C_n = valeur après n années depuis l'an 2000.

a) On a $n = 7$ ans

France : $C_0 = 146$, $t = ?$, $n = 7$, $C_n = 182$

$$\begin{array}{rl|l} \Rightarrow & 182 = 146(1+t)^7 & :146 \\ & 1{,}247 = (1+t)^7 & \sqrt[7]{} \\ & 1{,}032 = 1+t & -1 \\ & 0{,}032 = t & \end{array}$$

$\Rightarrow$ le taux annuel de croissance est de $\underline{\underline{3{,}2\%}}$.

Roumanie : $C_0 = 3{,}6$, $t = ?$, $n = 7$, $C_n = 5{,}41$

$$\begin{array}{rl|l} \Rightarrow & 5{,}41 = 3{,}6 \cdot (1+t)^7 & :3{,}6 \\ & 1{,}503 = (1+t)^7 & \sqrt[7]{} \\ & 1{,}06 = 1+t & -1 \\ & 0{,}06 = t & \end{array}$$

$\Rightarrow$ le taux annuel de croissance est de $\underline{\underline{6\%}}$.

b) En 2014, on a $n = 14$.

France : $C_0 = 146$, $t = 0{,}032$, $n = 14$, $C_n = ?$

$\Rightarrow C_n = 146(1+0{,}032)^{14} = \underline{\underline{226{,}9 \text{ milliards d'euros}}}$.

Roumanie : $C_0 = 3{,}6$, $t = 0{,}06$, $n = 14$, $C_n = ?$

$\Rightarrow C_n = 3{,}6(1+0{,}06)^{14} = \underline{\underline{8{,}14 \text{ milliards d'euros}}}$.

c) France = 20 · Roumanie $\Rightarrow$

$$\begin{array}{rl|l} & 146(1+0{,}032)^n = 20 \cdot 3{,}6(1+0{,}06)^n & \text{calculs} \\ & 146 \cdot 1{,}032^n = 64 \cdot 1{,}06^n & :1{,}06^n \\ & 146 \cdot \frac{1{,}032^n}{1{,}06^n} = 64 & :146 \\ & \frac{1{,}032^n}{1{,}06^n} = 0{,}438 & \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \\ & \left(\frac{1{,}032}{1{,}06}\right)^n = 0{,}438 & a^x = b \\ & n = \frac{\log(0{,}438)}{\log\left(\frac{1{,}032}{1{,}06}\right)} = 30{,}81 & \Rightarrow x = \frac{\log(b)}{\log(a)} \end{array}$$

Le chiffre d'affaires de la France sera égal à 20 fois celui de la Roumanie en $2000 + 31 = \underline{\underline{2031}}$.

Problème 4

On a $V(t) = 250 \cdot \left(1 - 0{,}75 \cdot 2{,}2^{-0{,}05t}\right)^2$ avec t en semaines et $V(t)$ en dollars.

a) La valeur initiale de l'action, c'est-à-dire sa valeur lorsque $t = 0$ est

$$V(0) = 250 \cdot \left(1 - 0{,}75 \cdot 2{,}2^{0}\right)^2 = 250 \cdot \left(1 - 0{,}75\right)^2 = \underline{\underline{15{,}625\ \$}}.$$

b) Après 1 année, c'est-à-dire lorsque $t = 52$ semaines, elle vaut

$$V(52) = 250 \cdot \left(1 - 0{,}75 \cdot 2{,}2^{-0{,}05 \cdot 52}\right)^2 = 250\left(1 - 0{,}75 \cdot 0{,}1287\right)^2 =$$
$$= 250 \cdot 0{,}816 = \underline{\underline{204{,}05\ \$}}.$$

c) Avec $V(t) = 108{,}6$, on a :

$$\begin{aligned}
108{,}6 &= 250\left(1 - 0{,}75 \cdot 2{,}2^{-0{,}05t}\right)^2 && :250 \\
0{,}4344 &= \left(1 - 0{,}75 \cdot 2{,}2^{-0{,}05t}\right)^2 && \sqrt{} \\
0{,}6591 &= 1 - 0{,}75 \cdot 2{,}2^{-0{,}05t} && -1 \\
-0{,}3409 &= -0{,}75 \cdot 2{,}2^{-0{,}05t} && :(-0{,}75) \\
0{,}4545 &= 2{,}2^{-0{,}05t} && a^x = b \to x = \frac{\log(b)}{\log(a)} \\
-0{,}05t &= \frac{\log(0{,}4545)}{\log(2{,}2)} && \\
-0{,}05t &= -1 && :(-0{,}05) \\
t &= 20 &&
\end{aligned}$$

Ça sera donc après $\underline{\underline{20 \text{ semaines}}}$.

d) Si t devient très grand, $t \to +\infty$, on a $2{,}2^{-0{,}05t} \to 0$ et, donc,

$V(t) \longrightarrow 250 \cdot 1^2 = 250$.

La valeur de l'action à long terme sera donc $\underline{\underline{250\ \$}}$.