Corrigé détaillé des exercices

Exercice 1

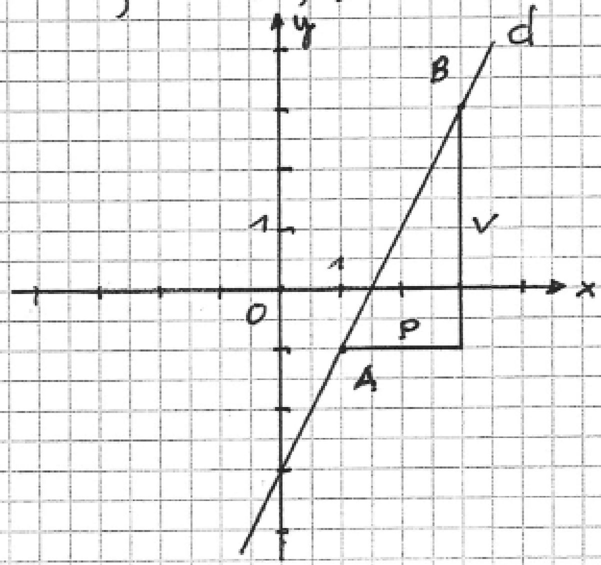
On a la droite $d: y = 2x - 3$.

Pour la représenter, il suffit de connaître deux points de la droite :

1) avec $x = 1$, on a $y = 2 \cdot 1 - 3 = -1 \Rightarrow$ point $A(1; -1)$

2) avec $x = 3$, on a $y = 2 \cdot 3 - 3 = 3 \Rightarrow$ point $B(3; 3)$.

On peut alors représenter la droite :



La pente de la droite est $\dfrac{\text{différence verticale entre A et B}}{\text{différence horizontale entre A et B}} = \dfrac{V}{P} =$

$$= \frac{2^e \text{ coordonnée de B} - 2^e \text{ coordonnée de A}}{1^e \text{ coordonnée de B} - 1^e \text{ coordonnée de A}} = \frac{3-(-1)}{3-1} = \frac{4}{2} = \underline{2}.$$

L'ordonnée à l'origine de d est le y où la droite coupe l'axe vertical.

Sur le dessin, on voit que ce y vaut -3.

Par calcul, pour trouver ce y, on pose $x = 0$ dans l'équation de la droite :

$y = 2x - 3 = 2 \cdot 0 - 3 = -3$.

L'ordonnée à l'origine est donc $\underline{y = -3}$ ou le point $\underline{(0; -3)}$.

Exercice 2

L'équation d'une droite est de la forme $d: y = px + h$, où p est la pente et h l'ordonnée à l'origine.
On sait que $p = -3$. L'équation de la droite s'écrit donc $y = -3x + h$.
Pour déterminer h, on utilise le point de la droite $A(4;7)$. Si on met $x = 4$ et $y = 7$ dans l'équation $y = -3x + h$, l'égalité doit être vraie ; on obtient $7 = -3.4 + h$
$\Rightarrow 7 = -12 + h \Rightarrow h = 19$.
L'équation de la droite est donc $\underline{y = -3x + 19}$.

Exercice 3

L'équation cartésienne d'une droite est de la forme $d: y = px + h$, où p est la pente et h l'ordonnée à l'origine.
On a $p = \text{pente} = \dfrac{\text{différence verticale entre A et B}}{\text{différence horizontale entre A et B}} =$
$= \dfrac{2^e \text{ coordonnée de } B - 2^e \text{ coordonnée de } A}{1^e \text{ coordonnée de } B - 1^e \text{ coordonnée de } A}$.
Avec $A(-1;-9)$ et $B(3;11)$, on obtient $p = \dfrac{11-(-9)}{3-(-1)} = \dfrac{20}{4} = 5$.

L'équation de d s'écrit donc $y = 5x + h$.
Pour déterminer h, on utilise le point $B(3;11)$ (mais on pourrait utiliser le point A et on obtiendrait le même résultat ; c'est mieux de prendre le point B car ses coordonnées sont positives, ce qui facilite les calculs).
Le point $B(3;11)$ est sur la droite. Ainsi, si on met $x = 3$ et $y = 11$ dans $y = 5x + h$, l'égalité doit être vraie : on a $11 = 5.3 + h \Rightarrow 11 = 15 + h \Rightarrow h = -4$.
On a donc $h = -4$ et l'équation cartésienne de d est $\underline{y = 5x - 4}$.

Exercice 4

On a $d: y = 2x-4$ et $g: y = -x+5$.

L'intersection de d et g, si elle existe, est la solution du système $\begin{cases} y = 2x-4 \\ y = -x+5. \end{cases}$

On doit donc avoir $2x-4 = -x+5$ (puisque les y doivent être égaux).

On résout cette équation:

$$\begin{array}{l|l} 2x-4 = -x+5 & +x \\ 3x-4 = 5 & +4 \\ 3x = 9 & :3 \\ x = 3 & \end{array}$$

Avec $x=3$ dans la 1e équation (on pourrait aussi utiliser la 2e, le résultat serait le même), on a $y = 2\cdot 3-4 = 2$.

L'intersection de d et g est $x=3$ et $y=2$, autrement dit le point $\underline{I(3;2)}$.

Exercice 5

L'équation cartésienne d'une droite est de la forme $y = px+h$ où p est la pente et h l'ordonnée à l'origine. Si P et Q sont 2 points de la droite, on a $p = \frac{\text{différence verticale entre } P \text{ et } Q}{\text{différence horizontale entre } P \text{ et } Q} = \frac{\text{2e coordonnée de } Q - \text{2e coordonnée de } P}{\text{1e coordonnée de } Q - \text{1e coordonnée de } P}$. h est ensuite trouvé en utilisant le point P ou le point Q.

Côté AB: $A(-4;-3), B(7;1) \Rightarrow p = \frac{1-(-3)}{7-(-4)} = \frac{4}{11} \Rightarrow y = \frac{4}{11}x+h$

avec $B(7;1)$ et donc $x=7$ et $y=1$, on a $1 = \frac{4}{11}\cdot 7+h \Rightarrow h = 1-\frac{28}{11} = -\frac{17}{11}$

$\Rightarrow \underline{y = \frac{4}{11}x - \frac{17}{11}}.$

Côté AC: $A(-4;-3), C(1;8) \Rightarrow p = \frac{8-(-3)}{1-(-4)} = \frac{11}{5} \Rightarrow y = \frac{11}{5}x+h$

avec $C(1;8)$ et donc $x=1$ et $y=8$, on a $8 = \frac{11}{5}\cdot 1+h \Rightarrow h = 8-\frac{11}{5} = \frac{29}{5}$

$\Rightarrow \underline{y = \frac{11}{5}x + \frac{29}{5}}.$

Côté BC: $B(7;1), C(1;8) \Rightarrow p = \frac{8-1}{1-7} = \frac{7}{-6} = -\frac{7}{6} \Rightarrow y = -\frac{7}{6}x+h$

avec $C(1;8)$ et donc $x=1$ et $y=8$, on a $8 = -\frac{7}{6}\cdot 1+h \Rightarrow h = 8+\frac{7}{6} = \frac{55}{6}$

$\Rightarrow \underline{y = -\frac{7}{6}x + \frac{55}{6}}.$

Exercice 6

1er taxi : 8,50 frs pour 2,5 km : $x = 2{,}5$ et $y = 8{,}5 \Rightarrow A_1\,(2{,}5\,;\,8{,}5)$

15,70 frs pour 5,5 km : $x = 5{,}5$ et $y = 15{,}7 \Rightarrow B_1\,(5{,}5\,;\,15{,}7)$

$y = px + h$: $p = \text{pente} = \dfrac{15{,}7 - 8{,}5}{5{,}5 - 2{,}5} = \dfrac{7{,}2}{3} = 2{,}4 \Rightarrow y = 2{,}4x + h$

$A_1\,(2{,}5\,;\,8{,}5) \Rightarrow x = 2{,}5$ et $y = 8{,}5 \Rightarrow 8{,}5 = 2{,}4 \cdot 2{,}5 + h$

$\Rightarrow 8{,}5 = 6 + h \Rightarrow h = 2{,}5 \Rightarrow \underline{y = 2{,}4x + 2{,}5}.$

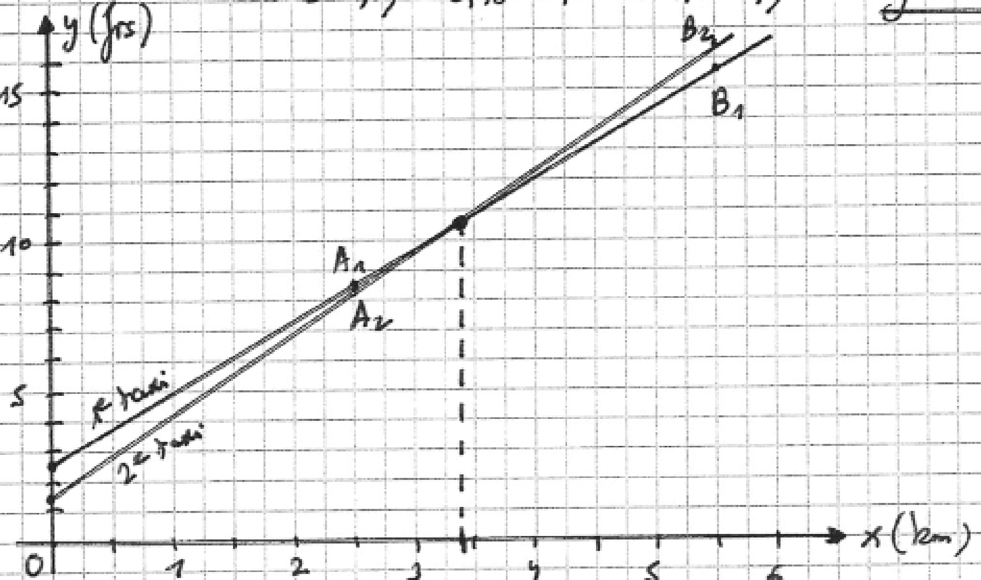
2e taxi : 8,25 frs pour 2,5 km : $x = 2{,}5$ et $y = 8{,}25 \Rightarrow A_2\,(2{,}5\,;\,8{,}25)$

16,35 frs pour 5,5 km : $x = 5{,}5$ et $y = 16{,}35 \Rightarrow B_2\,(5{,}5\,;\,16{,}35)$

$y = px + h$: $p = \text{pente} = \dfrac{16{,}35 - 8{,}25}{5{,}5 - 2{,}5} = \dfrac{8{,}1}{3} = 2{,}7 \Rightarrow y = 2{,}7x + h$

$A_2\,(2{,}5\,;\,8{,}25) \Rightarrow x = 2{,}5$ et $y = 8{,}25 \Rightarrow 8{,}25 = 2{,}7 \cdot 2{,}5 + h$

$\Rightarrow 8{,}25 = 6{,}75 + h \Rightarrow h = 1{,}5 \Rightarrow \underline{y = 2{,}7x + 1{,}5}.$



Le prix de la course (y) est le même avec les deux taxis lorsque x (le nb de km) et y seront solutions du système : $\begin{cases} y = 2{,}4x + 2{,}5 \\ y = 2{,}7x + 1{,}5 \end{cases}$

On a donc

$$\begin{aligned} 2{,}4x + 2{,}5 &= 2{,}7x + 1{,}5 & &\mid -2{,}4x \\ 2{,}5 &= 0{,}3x + 1{,}5 & &\mid -1{,}5 \\ 1 &= 0{,}3x & &\mid :0{,}3 \\ 3{,}\overline{3} &= x \end{aligned}$$

Ainsi, pour un trajet de $\underline{3{,}\overline{3}\text{ km}}$, le prix de la course est le même avec les 2 taxis.

Exercice 7

a) y_A : $x = 250'000 \Rightarrow y_A = 500$

$x = 650'000 \Rightarrow y_A = 1300$

$y_A = p \cdot x + h \Rightarrow p = \frac{1300 - 500}{650'000 - 250'000} = \frac{800}{400'000} = 0{,}002 \Rightarrow y_A = 0{,}002x + h$

$x = 250'000$ et $y_A = 500 \Rightarrow 500 = 0{,}002 \cdot 250'000 + h \Rightarrow 500 = 500 + h$

$\Rightarrow h = 0 \Rightarrow \underline{y_A = 0{,}002x}$.

y_N : $x = 250'000 \Rightarrow y_N = 575$

$x = 650'000 \Rightarrow y_N = 1175$

$y_N = p \cdot x + h \Rightarrow p = \frac{1175 - 575}{650'000 - 250'000} = \frac{600}{400'000} = 0{,}0015 \Rightarrow y_N = 0{,}0015x + h$

$x = 250'000$ et $y_N = 575 \Rightarrow 575 = 0{,}0015 \cdot 250'000 + h \Rightarrow 575 = 375 + h \Rightarrow h = 200$

$\Rightarrow \underline{y_N = 0{,}0015x + 200}$.

b) $y_A = y_N \Rightarrow$

$0{,}002x = 0{,}0015x + 200$	$-0{,}0015x$
$0{,}0005x = 200$	$:0{,}0005$
$x = 400'000$	

Les tarifs coïncident pour une valeur officielle de $\underline{400'000.-}$.

La facture vaut alors $y_A = y_N = 0{,}002 \cdot 400'000 = \underline{800.-}$.

⑥

Exercice 8

a) Machine A: $x = 20,\ y_A = 1{,}3$

$x = 100,\ y_A = 4{,}5$

$y_A = p \cdot x + h \Rightarrow p = \dfrac{4{,}5 - 1{,}3}{100 - 20} = \dfrac{3{,}2}{80} = 0{,}04 \Rightarrow y_A = 0{,}04x + h$

$x = 20,\ y_A = 1{,}3 \Rightarrow 1{,}3 = 0{,}04 \cdot 20 + h \Rightarrow 1{,}3 = 0{,}8 + h \Rightarrow h = 0{,}5$

$\Rightarrow y_A = 0{,}04x + 0{,}5.$

Machine B: $x = 20,\ y_B = 1{,}2$

$x = 100,\ y_B = 5{,}2$

$y_B = p \cdot x + h \Rightarrow p = \dfrac{5{,}2 - 1{,}2}{100 - 20} = \dfrac{4}{80} = 0{,}05 \Rightarrow y_B = 0{,}05x + h$

$x = 20,\ y_B = 1{,}2 \Rightarrow 1{,}2 = 0{,}05 \cdot 20 + h \Rightarrow 1{,}2 = 1 + h \Rightarrow h = 0{,}2$

$\Rightarrow y_B = 0{,}05x + 0{,}2.$

Avec $x = 300$, on a les temps suivants :

Machine A: $y_A = 0{,}04 \cdot 300 + 0{,}5 = \underline{12{,}5 \text{ heures}}$;

Machine B: $y_B = 0{,}05 \cdot 300 + 0{,}2 = \underline{15{,}2 \text{ heures}}$.

b) $y_A = y_B \Rightarrow$

$$\begin{array}{rcl|l} 0{,}04x + 0{,}5 & = & 0{,}05x + 0{,}2 & -0{,}04x \\ 0{,}5 & = & 0{,}01x + 0{,}2 & -0{,}2 \\ 0{,}3 & = & 0{,}01x & :0{,}01 \\ 30 & = & x & \end{array}$$

Le nombre de pièces pour lequel les temps de production sont égaux est <u>30 pièces</u>.

c) Machine C: $x = 0$ (zéro pièce) $\Rightarrow y_C = 0{,}8$ (heure)

$x = 30 \Rightarrow y_C = y_A = y_B = 0{,}04 \cdot 30 + 0{,}5 = 1{,}7$

$y_C = p \cdot x + h \Rightarrow p = \dfrac{1{,}7 - 0{,}8}{30 - 0} = \dfrac{0{,}9}{30} = 0{,}03 \Rightarrow y_C = 0{,}03x + h$

$x = 0,\ y_C = 0{,}8 \Rightarrow 0{,}8 = 0{,}03 \cdot 0 + h \Rightarrow h = 0{,}8$

$\Rightarrow y_C = 0{,}03x + 0{,}8$

Avec $x = 100$, on a $y_C = 0{,}03 \cdot 100 + 0{,}8 = 3 + 0{,}8 = \underline{3{,}8 \text{ heures}}$.

Exercice 9

a) UNO : $x = 982,90$, $y_1 = 218,65$

$x = 1839,70$, $y_1 = 287,10$

$y_1 = p \cdot x + h \Rightarrow p = \dfrac{287,10 - 218,65}{1839,70 - 982,90} = \dfrac{68,45}{856,8} = 0,07989 \cong 0,08$

(à 1% près, c'est-à-dire 0,01 près) $\Rightarrow y_1 = 0,08x + h$

$x = 982,90$, $y_1 = 218,65 \Rightarrow 218,65 = 0,08 \cdot 982,90 + h$

$\Rightarrow 218,65 = 78,632 + h \Rightarrow h \cong 140$ (à 10.- près)

$\Rightarrow \underline{y_1 = 0,08x + 140.}$

DUE : $x = 1278,40$, $y_2 = 217,35$

$x = 1721,10$, $y_2 = 292,60$

$y_2 = p \cdot x + h \Rightarrow p = \dfrac{292,60 - 217,35}{1721,10 - 1278,40} = \dfrac{75,25}{442,7} = 0,16998 \cong 0,17$

$\Rightarrow y_2 = 0,17x + h$

$x = 1278,40$, $y_2 = 217,35 \Rightarrow 217,35 = 0,17 \cdot 1278,40 + h$

$\Rightarrow 217,35 = 217,328 + h \Rightarrow h = 0$ (à 10.- près)

$\Rightarrow \underline{y_2 = 0,17x.}$

b) $y_1 = y_2 \Rightarrow$

$$\begin{array}{rcl|l} 0,08x + 140 &=& 0,17x & -0,08x \\ 140 &=& 0,09x & :0,09 \\ 1555,55 &\cong& x & \end{array}$$

Donc, lorsque le chiffre d'affaires sera de $\underline{1555,55 \text{ frs.}}$

Exercice 10

a) Entreprise A: $x = 1960$, $y_A = 548,8$

$x = 3080$, $y_A = 862,4$

$y_A = p \cdot x + h \Rightarrow p = \frac{862,4 - 548,8}{3080 - 1960} = \frac{313,6}{1120} = 0,28 \Rightarrow y_A = 0,28x + h$

$x = 1960$, $y_A = 548,8 \Rightarrow 548,8 = 0,28 \cdot 1960 + h \Rightarrow 548,8 = 548,8 + h$

$\Rightarrow h = 0 \Rightarrow \underline{y_A = 0,28x}$.

Entreprise B: $x = 1960$, $y_B = 733,2$

$x = 3080$, $y_B = 923,6$

$y_B = p \cdot x + h \Rightarrow p = \frac{923,6 - 733,2}{3080 - 1960} = \frac{190,4}{1120} = 0,17 \Rightarrow y_B = 0,17x + h$

$x = 1960$, $y_B = 733,2 \Rightarrow 733,2 = 0,17 \cdot 1960 + h \Rightarrow 733,2 = 333,2 + h$

$\Rightarrow h = 400 \Rightarrow \underline{y_B = 0,17x + 400}$.

b) $y_A = y_B \Rightarrow$

$0,28x = 0,17x + 400 \quad | -0,17x$

$0,11x = 400 \quad | :0,11$

$x = 3636,36$

Donc pour $\underline{3636,36 \text{ litres}}$.

Exercice 11

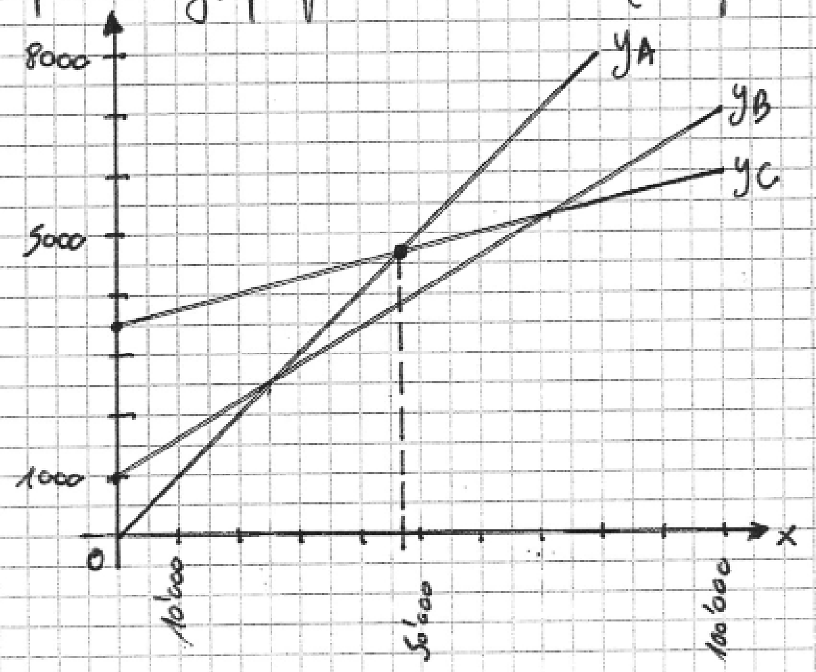
Notons x et le chiffre d'affaires et y_A, y_B, y_C les salaires de A, B et C respectivement.

A : 10% du chiffre d'affaires $\Rightarrow y_A = 0{,}1 \cdot x$ $(10\% = 0{,}1)$

B : 6% du chiffre d'affaires + 1000 de fixe $\Rightarrow y_B = 0{,}06x + 1000$ $(6\% = 0{,}06)$

C : 2,5% du chiffre d'affaires + 3500 de fixe $\Rightarrow y_C = 0{,}025x + 3500$ $(2{,}5\% = 0{,}025)$

Représentons graphiquement la situation (cela permet de la visualiser) :



$$y_A = y_C \Rightarrow \begin{aligned} 0{,}1x &= 0{,}025x + 3500 \\ 0{,}075x &= 3500 \\ x &\cong 46'666{,}65 \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} &-0{,}025x \\ &:0{,}075 \end{aligned} \right.$$

Par conséquent, jusqu'à un chiffre d'affaires de 46'666,65, c'est l'agent C qui est le mieux rétribué. A partir de 46'666,65, c'est l'agent A.

Exercice 12

Notons x le nombre de disputtes et y_A, y_B, y_C le prix des offres A, B et C respectivement.

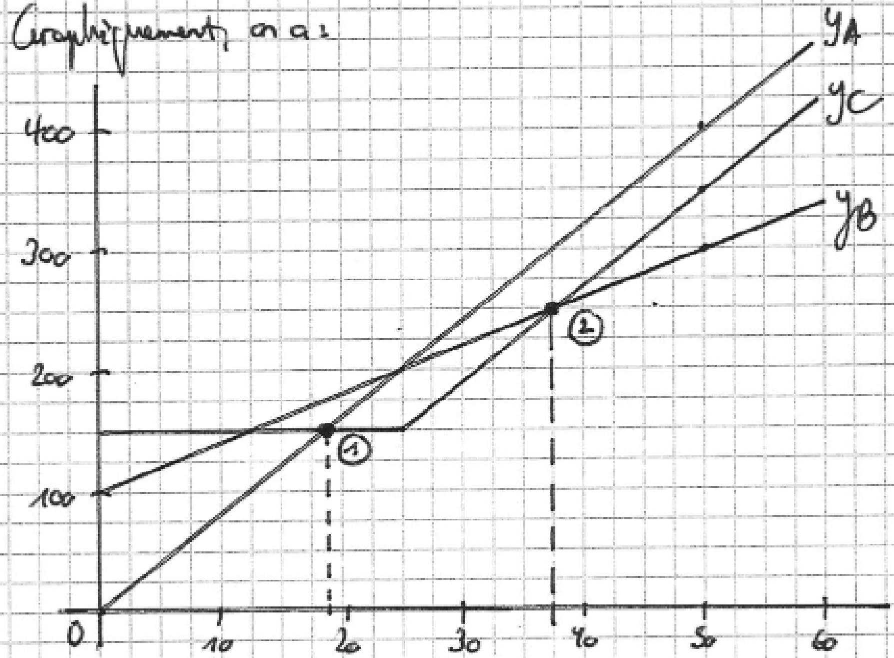
A: 8.– la disputte $\Longrightarrow y_A = 8x$

B: 4.– la disputte + 100.– en forfait $\Longrightarrow y_B = 4x + 100$

C: 150.– pour 25 disputtes et 8.– pour chaque disputte supplémentaire (autrement dit toutes celles au-dessus de 25)

$$\Longrightarrow y_C = \begin{cases} 150 \text{ si } x \leq 25 \\ 150 + 8(x-25) \text{ si } x > 25 \end{cases} = \begin{cases} 150 & \text{si } x \leq 25 \\ 8x - 50 & \text{si } x > 25 \end{cases}$$

Graphiquement, on a:



① $y_A = y_C \Longrightarrow 8x = 150 \Longrightarrow x = 18{,}75$

② $y_B = y_C \Longrightarrow$

$$\begin{array}{l|l} 4x + 100 = 8x - 50 & -4x \\ 100 = 4x - 50 & +50 \\ 150 = 4x & :4 \\ 37{,}5 = x & \end{array}$$

Ainsi, jusqu'à 18 disputtes, le plus avantageux est le A, de 19 à 37 disputtes c'est le C et dès 38 disputtes, c'est le B.

Exercice 13

(1) $9x^2+42x+69=0$: $a=9,\ b=42,\ c=69$

$\Delta = b^2-4ac = 42^2-4\cdot 9\cdot 69 = 1764-2484 = -720 < 0$

$\Longrightarrow$ aucune solution.

(2) $81x^2-90x+25=0$: $a=81,\ b=-90,\ c=25$

$\Delta = b^2-4ac = (-90)^2-4\cdot 81\cdot 25 = 8100-8100 = 0$

$\Longrightarrow$ unique solution $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-90}{2\cdot 81} = \frac{90}{162} = \frac{5}{9}$.

(3) $14x^2-57x-27=0$: $a=14,\ b=-57,\ c=-27$

$\Delta = b^2-4ac = (-57)^2-4\cdot 14\cdot(-27) = 3249+1512 = 4761 > 0$

$\Longrightarrow$ 2 solutions : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{57+69}{2\cdot 14} = \frac{126}{28} = \frac{9}{2}$ et

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{57-69}{2\cdot 14} = \frac{-12}{28} = -\frac{3}{7}$.

Exercice 14

$C: y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$: $a = -\frac{1}{2}$, $b = 2$, $c = 6$;

le sommet est donné par $S\left(-\frac{b}{2a} ; c - \frac{b^2}{4a}\right)$;

on a $-\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2\cdot(-\frac{1}{2})} = -\frac{2}{-1} = 2$ et

$c - \frac{b^2}{4a} = 6 - \frac{2^2}{4\cdot(-\frac{1}{2})} = 6 - \frac{4}{-2} = 6+2 = 8$

$\Rightarrow$ $S(2;8)$.

intersections avec l'axe x: on met $y=0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 = 0$

avec $a = -\frac{1}{2}$, $b = 2$, $c = 6$; $b^2 - 4ac = 2^2 - 4\cdot(-\frac{1}{2})\cdot 6 =$

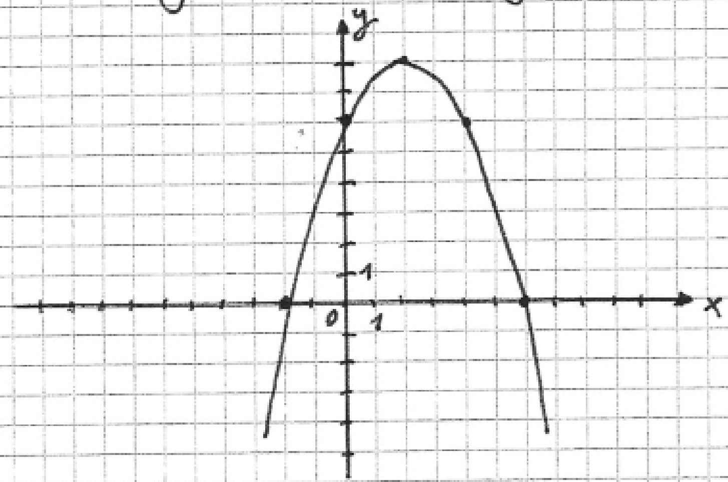
$= 4 + 12 = 16 > 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+\sqrt{16}}{2\cdot(-\frac{1}{2})} = \frac{-2+4}{-1} = -2$

et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{16}}{2\cdot(-\frac{1}{2})} = \frac{-2-4}{-1} = 6$

$\Rightarrow$ $(-2;0)$ et $(6;0)$.

intersection avec l'axe y: on met $x=0 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow$ $(0;6)$.

graphe:



$C: y = \frac{1}{4}(x-2)(x-6)$: intersections avec l'axe x: on met $y=0 \Rightarrow \frac{1}{4}(x-2)(x-6) = 0$

$\Rightarrow (x-2)(x-6) = 0 \Rightarrow$ soit $x-2=0$, soit $x-6=0$

$\Rightarrow$ soit $x=2$, soit $x=6$ $\Rightarrow$ $(2;0)$ et $(6;0)$.

intersections avec l'axe y: on met $x=0 \Rightarrow y = \frac{1}{4}(0-2)(0-6) =$

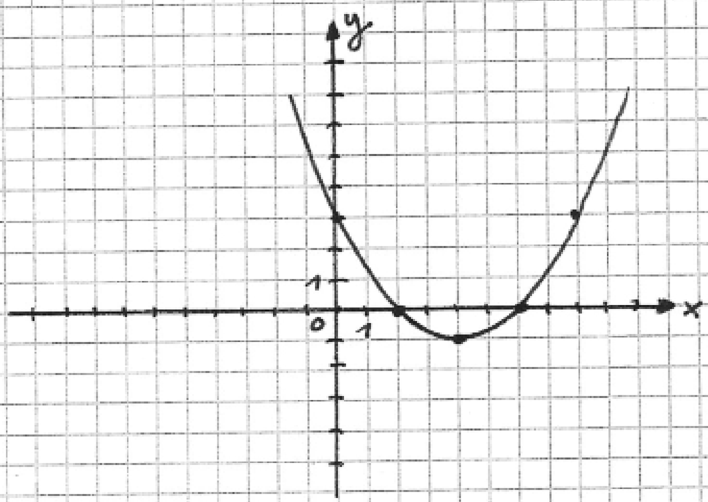
$= \frac{1}{4}(-2)(-6) = \frac{1}{4}\cdot 12 = 3$ $\Rightarrow$ $(0;3)$.

Sommet: On a $S\left(\frac{x_1+x_2}{2} ; y \text{ du sommet}\right)$, où x_1 et x_2 sont les intersections avec l'axe x : on sait que $x_1 = 2$ et $x_2 = 6$;

ainsi $\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{2+6}{2} = 4$; avec $x = 4$, on a $y_{\text{Sommet}} =$

$= \frac{1}{4}(4-2)(4-6) = \frac{1}{4}\cdot 2\cdot(-2) = -1$ $\Rightarrow$ $S(4;-1)$.

graphe:



$C: \ y = \frac{2}{9} \cdot (x-3)^2 + \frac{5}{9}$:

intersection avec l'axe x: on met $y = 0 \Rightarrow \frac{2}{9} \cdot (x-3)^2 + \frac{5}{9} = 0$

$\Rightarrow \frac{2}{9} \cdot (x-3)^2 = -\frac{5}{9} \Rightarrow (x-3)^2 = -\frac{5}{9} : \frac{2}{9} < 0$

$\Rightarrow$ pas de solution car $(x-3)^2 \geq 0$ pour toute valeur de x

$\Rightarrow$ aucune intersection avec l'axe x.

intersection avec l'axe y: on met $x = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{9}(0-3)^2 + \frac{5}{9} =$

$= \frac{2}{9} \cdot 9 + \frac{5}{9} = \frac{18}{9} + \frac{5}{9} = \frac{23}{9} \Rightarrow \left(0 ; \frac{23}{9}\right)$

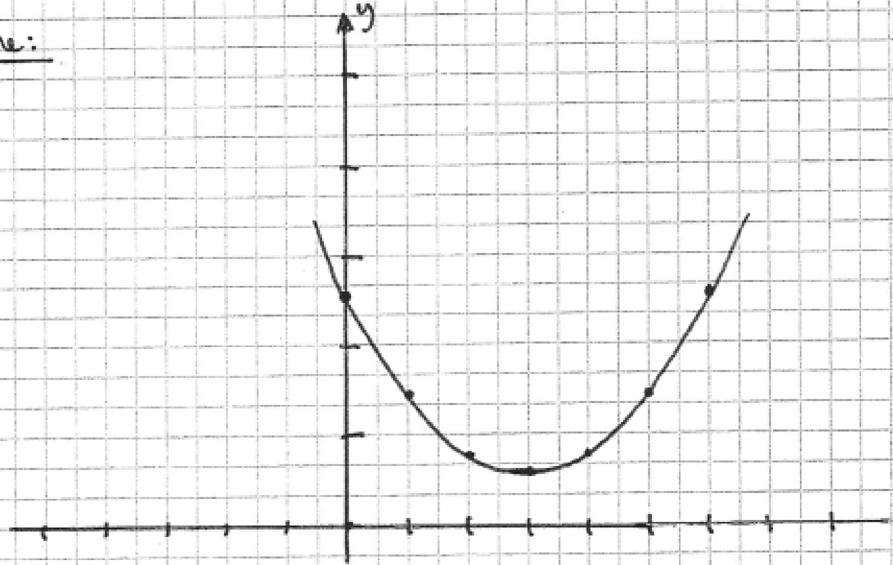
sommet: Comme $\frac{2}{9} > 0$, la parabole "sourit" $(\cup)$;

son sommet sera donc lorsque $(x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$;

avec $x = 3$, on a alors $y = \frac{2}{9}(3-3)^2 + \frac{5}{9} = \frac{5}{9}$

$\Rightarrow S\left(3 ; \frac{5}{9}\right)$.

graphe:



$x = 1 \Rightarrow y = \frac{2}{9}(1-3)^2 + \frac{5}{9} = \frac{8}{9} + \frac{5}{9} = \frac{13}{9}$

$x = 5 \Rightarrow y = \frac{2}{9}(5-3)^2 + \frac{5}{9} = \frac{8}{9} + \frac{5}{9} = \frac{13}{9}$

$x = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{9}(2-3)^2 + \frac{5}{9} = \frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{7}{9}$

$x = 4 \Rightarrow y = \frac{2}{9}(4-3)^2 + \frac{5}{9} = \frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{7}{9}$.

Exercice 15

a) Il faut résoudre le système $\begin{cases} y = x^2+7x-5 \\ y = 4x+5 \end{cases}$

On doit avoir $x^2+7x-5 = 4x+5 \longrightarrow x^2+3x-10=0$.

On a $a=1$, $b=3$ et $c=-10$, $\Delta = b^2-4ac = 3^2-4\cdot1\cdot(-10) = 9+40 = 49 > 0$

$\Rightarrow x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{49}}{2\cdot1} = \frac{-3+7}{2} = \frac{4}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-7}{2} = \frac{-10}{2} = -5$.

Avec $x_1 = 2$, on a $y_1 = 4x_1+5 = 4\cdot2+5 = 13$.

Avec $x_2 = -5$, on a $y_2 = 4x_2+5 = 4\cdot(-5)+5 = -15$.

Les points d'intersection sont donc $(2;13)$ et $(-5;-15)$.

b) Il faut résoudre le système $\begin{cases} y = 4x^2-x+2 \\ y = 3x+1 \end{cases}$

On doit avoir $4x^2-x+2 = 3x+1 \Rightarrow 4x^2-4x+1=0$.

On a $a=4$, $b=-4$ et $c=1$, $\Delta = b^2-4ac = (-4)^2-4\cdot4\cdot1 = 16-16 = 0$

$\Rightarrow x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2\cdot4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 3x+1 = 3\cdot\frac{1}{2}+1 = \frac{5}{2}$.

L'unique point d'intersection est $\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$.

c) Il faut résoudre le système $\begin{cases} y = 7x^2+3x+2 \\ y = x-2 \end{cases}$

On doit avoir $7x^2+3x+2 = x-2 \Rightarrow 7x^2+2x+4 = 0$.

On a $a=7$, $b=2$ et $c=4$, $\Delta = b^2-4ac = 2^2-4\cdot7\cdot4 = 4-112 = -108 < 0$

$\Rightarrow$ aucune solution.

Il n'y a aucune intersection.

Exercice 16

On doit résoudre le système $\begin{cases} y = 4x^2+20x-9 \\ y = -2x^2+3x+5 \end{cases}$

On doit avoir $4x^2+20x-9 = -2x^2+3x+5 \Rightarrow 6x^2+17x-14 = 0$.

On a $a=6$, $b=17$ et $c=-14$, $\Delta = b^2-4ac = 17^2-4\cdot6\cdot(-14) = 289+336 = 625 > 0$

$\Rightarrow x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-17+\sqrt{625}}{2\cdot6} = \frac{-17+25}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-17-25}{12} = \frac{-42}{12} = -\frac{7}{2}$.

Avec $x_1 = \frac{2}{3}$, on a $y_1 = 4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+20\cdot\frac{2}{3}-9 = 4\cdot\frac{4}{9}+\frac{40}{3}-9 = \frac{16}{9}+\frac{120}{9}-\frac{81}{9} = \frac{55}{9}$.

Avec $x_2 = -\frac{7}{2}$, on a $y_2 = 4\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)^2+20\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)-9 = 4\cdot\frac{49}{4}-70-9 = 49-79 = -30$.

Les intersections sont donc $\left(\frac{2}{3};\frac{55}{9}\right)$ et $\left(-\frac{7}{2};-30\right)$.

Exercice 17

On doit résoudre le système $\begin{cases} y = x^2+5x-2 \\ y = 2x^2+11x-9. \end{cases}$

On doit avoir $x^2+5x-2 = 2x^2+11x-9 \Rightarrow 0 = x^2+6x-7$.

On a $a=1$, $b=6$ et $c=-7$, $b^2-4ac = 6^2-4\cdot 1\cdot(-7) = 36+28 = 64 > 0$

$\rightarrow x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6+\sqrt{64}}{2\cdot 1} = \frac{-6+8}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6-8}{2} = \frac{-14}{2} = -7$.

Avec $x_1 = 1$, on a $y_1 = x_1^2+5x_1-2 = 1^2+5\cdot 1-2 = 1+5-2 = 4$.

Avec $x_2 = -7$, on a $y_2 = x_2^2+5x_2-2 = (-7)^2+5\cdot(-7)-2 = 49-35-2 = 12$.

Les intersections sont donc $(1;4)$ et $(-7;12)$.

Exercice 18

Notons x le nombre de semaine à partir de maintenant.

On peut établir le tableau suivant:

	nb d'hl	prix d'un hl	revenu
actuellement	120	25	$120\cdot 25$
dans x semaines	$120+20x$	$25-2{,}5x$	$(120+20x)(25-2{,}5x)$.

Ainsi le revenu est $(120+20x)(25-2{,}5x) = 3000-300x+500x-50x^2 =$
$= -50x^2+200x+3000$.

Il faut trouver le x pour obtenir le sommet de cette parabole.

On a $a=-50$, $b=200$ et $c=3000$.

Ainsi $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{200}{2\cdot(-50)} = -\frac{200}{-100} = 2$.

Par conséquent, le revenu sera le meilleur après 2 semaines.

Exercice 19

Notons x le nombre d'années à partir de maintenant.

On peut établir le tableau suivant :

	nb de cassettes	prix unitaires	revenu
actuellement	3000	12	$3000 \cdot 12$
dans x années	$3000+500x$	$12-x$	$(3000+500x)(12-x)$

Ainsi le revenu est $(3000+500x)(12-x) = 36'000 - 3000x + 6000x - 500x^2 =$

$= -500x^2 + 3000x + 36'000$.

Il faut trouver le x pour obtenir le sommet de cette parabole.

On a $a=-500$, $b=3000$ et $c=36'000$.

Ainsi $x_S = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{3000}{2\cdot(-500)} = -\dfrac{3000}{-1000} = 3$.

Par conséquent, ses recettes seront maximales <u>dans 3 ans.</u>

Exercice 20

Notons x le nombre de diminutions de 5 ct $= 0{,}05$ frs.

On peut établir le tableau suivant :

	nb de parties	prix d'une partie	revenu
actuellement	3000	2	$3000 \cdot 2$
après x diminutions	$3000+100x$	$2-0{,}05x$	$(3000+100x)(2-0{,}05x)$

Ainsi le revenu est $(3000+100x)(2-0{,}05x) = 6000 - 150x + 200x - 5x^2 =$

$= -5x^2 + 50x + 6000$

Il faut trouver le x pour obtenir le sommet de cette parabole.

On a $a=-5$, $b=50$ et $c=6'000$.

Ainsi $x_S = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{50}{2\cdot(-5)} = -\dfrac{50}{-10} = 5$.

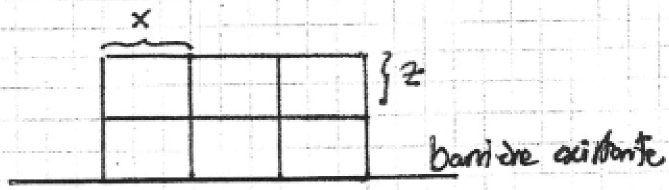
Par conséquent, le revenu sera maximal après 5 diminution de 5 ct, autrement dit lorsque le prix de la partie sera de $2 - 0{,}05\cdot 5 = 2 - 0{,}25 = \underline{1{,}75 \text{ fr.}}$

Le revenu (maximal) sera alors $(3000 + 100\cdot x_S)(2 - 0{,}05x_S) =$

$= (3000 + 100\cdot 5)(2 - 0{,}05\cdot 5) = 3500 \cdot 1{,}75 = \underline{6125 \text{ frs.}}$

Exercice 21

On a la situation suivante :



On cherche la valeur maximale de l'aire $= 3x \cdot 2z = 6xz$.

On sait que $6x + 8z = 200 \Rightarrow 8z = 200 - 6x \Rightarrow z = 25 - 0{,}75x$.

Ainsi, on cherche le maximum de $6x(25 - 0{,}75x) = 150x - 4{,}5x^2 = -4{,}5x^2 + 150x$.

C'est une parabole avec $a = -4{,}5$, $b = 150$ et $c = 0$.

On a $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{150}{2\cdot(-4{,}5)} = \frac{150}{9} = 16{,}\bar{6}\,m$, d'où $3x_S = 50$.

Avec $x_S = 16{,}\bar{6}$, on a $z_S = 25 - 0{,}75 \cdot 16{,}\bar{6} = 12{,}5$, d'où $2z_S = 25$.

Les dimensions doivent donc être **25m sur 50m.**

Exercice 22

On a : prix d'un grille-pain $= p$;

nombre de grille-pain $= x = 10'200 - 300p$;

revenu $= x \cdot p = (10'200 - 300p)p = 10'200p - 300p^2 = -300p^2 + 10'200p$;

coûts = coûts variables + coûts fixes $= 8x + 14'400 = 8(10'200 - 300p) + 14'400$

$= 81'600 - 2400p + 14'400 = -2400p + 96'000$;

profit = revenu − coûts $= -300p^2 + 10'200p - (-2400p + 96'000) =$

$= -300p^2 + 10'200p + 2400p - 96'000 = -300p^2 + 12'600p - 96'000$.

On cherche le maximum de cette parabole. On a $a = -300$, $b = 12'600$ et $c = -96'000$.

On a $p_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{12'600}{2\cdot(-300)} = \frac{12'600}{600} = 21$.

La compagnie doit donc fixer un prix de **21 \$** pour ses grille-pain.

Exercice 23

On a : prix d'un fauteuil $= p$;

nombre de fauteuils $= x = 9000 - 20p$;

revenu $= x \cdot p = (9000 - 20p)p = 9000p - 20p^2 = -20p^2 + 9000p$;

coûts = coûts variables + coûts fixes $= 20x + 4000 = 20(9000 - 20p) + 4000 =$

$= 180'000 - 400p + 4000 = -400p + 184'000$;

profit = revenu − coûts $= -20p^2 + 9000p - (-400p + 184'000) =$

$= -20p^2 + 9000p + 400p - 184'000 = -20p^2 + 9400p - 184'000$.

1. profit $= -20p^2 + 9400p - 184'000$: $a = -20$, $b = 9400$, $c = -184'000$

$\Rightarrow p_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{9400}{2\cdot(-20)} = \underline{235\ \$}.$

5. $\Rightarrow y_s = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4\cdot(-20)\cdot(-184'000) - 9400^2}{4\cdot(-20)} = \underline{920'500\ \$}.$

2. revenu $= -20p^2 + 9000p$: $a = -20$, $b = 9000$, $c = 0$

$\Rightarrow p_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{9000}{2\cdot(-20)} = \underline{225\ \$}.$

6. $\Rightarrow y_s = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4\cdot(-20)\cdot 0 - 9000^2}{4\cdot(-20)} = \underline{1'012'500\ \$}.$

3. profit $= 0 \Rightarrow -20p^2 + 9400p - 184'000 = 0 \overset{:(-20)}{\Longrightarrow} p^2 - 470p + 9200 = 0$;

$a = 1$, $b = -470$, $c = 9200$, $b^2 - 4ac = (-470)^2 - 4\cdot 1\cdot 9200 = 184'100 > 0$

$\Rightarrow p_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{470 - \sqrt{184'100}}{2} \cong \underline{20,47\ \$}.$

4. et $p_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{470 + \sqrt{184'100}}{2} \cong \underline{449,53\ \$}.$

Exercice 24

On a : prix de vente d'un produit $= p$;

nombre de produits vendus = demande $= n = 25'000 - 1000p$;

revenu $= n \cdot p = (25'000 - 1000p) \cdot p = 25'000p - 1000p^2 = -1000p^2 + 25'000p$;

coûts = coûts variables + coûts fixes $= 8n + 35'000 = 8(25'000 - 1000p) + 35'000 =$

$= 200'000 - 8000p + 35'000 = -8000p + 235'000$;

profit = bénéfice = revenu − coûts $= -1000p^2 + 25'000p - (-8000p + 235'000) =$

$= -1000p^2 + 25'000p + 8000p - 235'000 = -1000p^2 + 33'000p - 235'000$.

a) Les seuils de rentabilité correspondent au profit = 0

$\Rightarrow -1000p^2 + 33'000p - 235'000 = 0 \quad | : -1000$

$p^2 - 33p + 235 = 0$

$a = 1, b = -33, c = 235, \Delta = b^2 - 4ac = (-33)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 235 = 1089 - 940 = 149 > 0$

$\Rightarrow p_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{33 + \sqrt{149}}{2} \cong 22,6$ et $p_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{33 - \sqrt{149}}{2} \cong 10,4$.

Le seuil de rentabilité inférieur est donc $\underline{p = 10,4}$ et le seuil de rentabilité supérieur est donc $\underline{p = 22,6}$.

b) Cherchons x pour que le revenu soit maximal. On doit chercher le sommet de la parabole $-1000p^2 + 25'000p$.

On a $a = -1000$, $b = 25'000$ et $c = 0$

$\Rightarrow x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{25'000}{2 \cdot (-1000)} = \frac{25'000}{2000} = 12,5$ et

$y_S = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot (-1000) \cdot 0 - 25'000^2}{4 \cdot (-1000)} = \frac{-625'000'000}{-4000} = 156'250$.

Le revenu maximal est donc $\underline{156'250.-}$.

c) Cherchons x pour que le bénéfice soit maximal. On doit chercher le sommet de la parabole $-1000p^2 + 33'000p - 235'000$.

On a $a = -1000$, $b = 33'000$ et $c = -235'000$.

$\Rightarrow x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{33'000}{2 \cdot (-1000)} = \frac{33'000}{2000} = 16,5$ et

$y_S = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot (-1000) \cdot (-235'000) - 33'000^2}{4 \cdot (-1000)} = \frac{-149'000'000}{-4000} = 37'250$.

Le bénéfice maximal est donc $\underline{37'250.-}$.

Exercice 25

a) Notons x le nombre de variations de 15'000 \$ et donc de 25 unités.

On peut faire le tableau suivant:

	prix unitaire	nb de ventes	recettes
situation "normale"	270'000	600	270'000 . 600
avec x hausses	270'000 + 15'000x	600 − 25x	(270'000 + 15'000x)(600 − 25x).

(si $x<0$, baisses)

Les recettes sont donc $(270'000+15'000x)(600-25x) =$
$$= 162'000'000 - 6'750'000x + 9'000'000x - 375'000x^2 =$$
$$= -375'000x^2 + 2'250'000x + 162'000'000$$

On a chercher x qui donne le maximum de cette parabole.

On a $a=-375'000$, $b=2'250'000$ et $c=162'000'000$
$$\Rightarrow x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{2'250'000}{2\cdot(-375'000)} = \frac{2'250'000}{750'000} = 3$$

Le prix unitaire est donc augmenté (puisque $x_S > 0$) de 3 fois 15'000 \$.

Il vaut donc $270'000 + 15'000 \cdot 3 = \underline{315'000}$ \$.

b) Comme les recettes (= montant annuel des ventes) étaient de 147'000'000 \$, on doit résoudre $-375'000x^2 + 2'250'000x + 162'000'000 = 147'000'000$
$$\Rightarrow -375'000x^2 + 2'250'000x + 15'000'000 = 0$$
$$\Rightarrow -375x^2 + 2'250x + 15'000 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x - 40 = 0$$

Avec $a=1$, $b=-6$ et $c=-40$, on a $b^2-4ac = (-6)^2 - 4\cdot1\cdot(-40) = 36+160 = 196$,
$\sqrt{b^2-4ac} = \sqrt{196} = 14$ et, ainsi, on a
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{6 \pm 14}{2} = \begin{cases} \frac{20}{2} = 10 \\ \frac{-8}{2} = -4 \end{cases}$$

Comme les américains ont profité d'un cours relativement bas, il doit y avoir eu des baisses par rapport à la situation normale et donc $x<0$.

On choisit donc la solution $x=-4$.

Le nombre de ventes était alors $600 - 25\cdot x = 600 - 25\cdot(-4) = 600 + 100 = \underline{700}.$

Exercice 26

Notons x le nb d'articles vendus = la demande.

On a: $x = 660 - 22p$ où p est le prix de vente ;

recettes $= x \cdot p = (660-22p) \cdot p = 660p - 22p^2 = -22p^2 + 660p$;

coûts = coûts variables + coûts fixes $= 7x + 820 = 7(660-22p) + 820 =$
$= 4620 - 154p + 820 = -154p + 5440$

bénéfice = recettes − coûts $= -22p^2 + 660p - (-154p + 5440) =$
$= -22p^2 + 660p + 154p - 5440 = -22p^2 + 814p - 5440$.

a) Seuils de rentabilité : bénéfice $= 0 \Rightarrow -22p^2 + 814p - 5440 = 0$;

$a = -22$, $b = 814$, $c = -5440$, $b^2 - 4ac = 814^2 - 4 \cdot (-22) \cdot (-5440) = 183'876$

$\Rightarrow p = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \dfrac{-814 \pm \sqrt{183'876}}{2 \cdot (-22)} = \begin{cases} 8{,}7544 \\ 28{,}2456 \end{cases}$.

Le seuil de rentabilité inférieur est $\underline{8{,}75}$.

Le seuil de rentabilité supérieur est $\underline{28{,}25}$.

b) recette maximum $\Rightarrow p_S$ de $-22p^2 + 660p$; $a = -22$, $b = 660$ et $c = 0$

$\Rightarrow p_S = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{660}{2 \cdot (-22)} = \dfrac{660}{44} = 15$

$\Rightarrow x_S = 660 - 22 \cdot 15 = \underline{330 \text{ flacons à vendre.}}$

bénéfice maximum $\Rightarrow p_S$ de $-22p^2 + 814p - 5440$; $a = -22$, $b = 814$ et $c = -5440$

$\Rightarrow p_S = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{814}{2 \cdot (-22)} = \dfrac{814}{44} = 18{,}5$

$\Rightarrow x_S = 660 - 22 \cdot 18{,}5 = \underline{253 \text{ flacons à vendre.}}$

Exercice 27

a) Notons x le nb de places non occupées dans le charter.

On peut faire le tableau suivant :

	nb de places occupées	prix d'une place	recettes totales	bénéfice total
charter plein	400	660	$400 \cdot 660$	$400 \cdot 660 - 240'000$
x places vides	$400 - x$	$660 + 3x$	$(400-x)(660+3x)$	$(400-x)(660+3x) - 240'000$

Il faut chercher le x du sommet de la parabole $(400-x)(660+3x) - 240'000 =$
$= 264'000 + 1200x - 660x - 3x^2 - 240'000 = -3x^2 + 540x + 24'000$.

On a $a = -3$, $b = 540$ et $c = 24'000$.

Ainsi $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{540}{2\cdot(-3)} = \frac{540}{6} = 90$.

Le nb de passagers est alors $400 - 90 = \underline{310}$ et le prix d'une place est de
$660 + 3 \cdot 90 = \underline{930.-}$

b) Ici les coûts variables sont $12 \cdot$ nb de passagers $= 12 \cdot (400-x) = 4800 - 12x$,
montant à déduire du bénéfice de a)

$\Rightarrow$ bénéfice $= -3x^2 + 540x + 24'000 - (4800 - 12x) =$
$= -3x^2 + 540x + 24'000 - 4800 + 12x =$
$= -3x^2 + 552x + 19200$.

On a $a = -3$, $b = 552$ et $c = 19200$.

Ainsi $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{552}{2\cdot(-3)} = \frac{552}{6} = 92$.

Le nb de passagers est alors $400 - 92 = \underline{308}$ et le prix d'une place est de
$660 + 3 \cdot 92 = \underline{936.-}$