MATHÉMATIQUES 1 : partie 1

FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES - APPLICATIONS

Maxime Zuber, Dr ès sciences

Haute École de Gestion Arc, septembre 2013

1 La droite dans le plan

1.1 Équation cartésienne

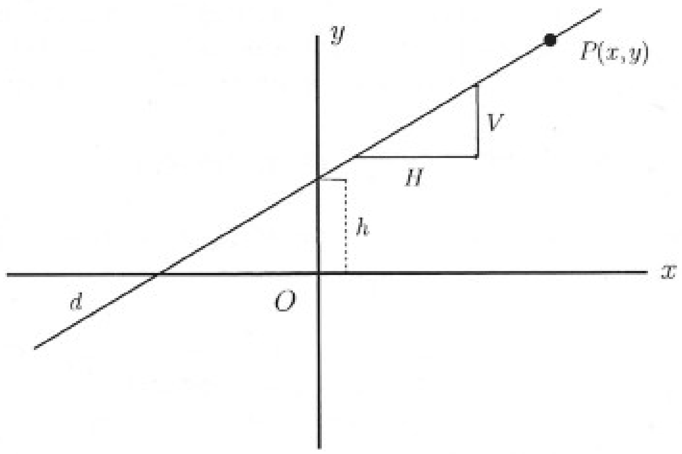
Soit une droite d (non verticale). Tous les points de d ont des coordonnées $(x; y)$ qui vérifient la même relation

$$\boxed{d\ :\ y = p \cdot x + h}$$

appelée *équation cartésienne explicite* de la droite. Les deux coefficients p et h sont des constantes ayant un sens géométrique. Le coefficient de x est la *pente*

$$\boxed{p = \frac{V}{H}.}$$

Le coefficient constant h est *l'ordonnée à l'origine.*



Si d passe par les points $A(a_1; a_2)$ et $B(b_1; b_2)$, alors sa pente est donnée par

$$\boxed{p = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}.}$$

Exemple Soit la droite joignant les points $A(-1; 4)$ et $B(1; -2)$. Sa pente vaut $p = \frac{-2-4}{1-(-1)} = -3$. L'équation explicite a donc la forme $y = -3x + h$. Comme $A(-1; 4)$ est sur d, on doit avoir $4 = -3 \cdot (-1) + h$, on en déduit que $h = 1$. Il s'ensuit l'équation explicite $y = -3x + 1$.

Exercice 1 Représenter la droite définie par l'équation cartésienne $d : y = 2x - 3$. Choisir deux points sur d et calculer la pente du segment qui les lie. Déterminer l'ordonnée à l'origine de d.

Exercice 2 Donner l'équation d'une droite d de pente -3 passant par le point $A(4; 7)$.

Exercice 3 Déterminer l'équation cartésienne de la droite d passant par les points $A(-1; -9)$ et $B(3; 11)$.

Exercice 4 Déterminer le point d'intersection des droites d et g d'équations $d : y = 2x - 4$ et $g : y = -x + 5$.

Exercice 5 Soit le triangle $\Delta = ABC$ de sommets $A(-4; -3)$, $B(7; 1)$, $C(1; 8)$. Déterminer les équations des trois côtés de Δ.

1.2 Applications

Exercice 6 On a effectué les mêmes trajets avec deux taxis différents. Avec le premier, on a payé 8,50 francs pour un trajet de 2,5 km et 15,70 francs pour un trajet de 5,5 km. Avec le second taxi, pour les mêmes distances, on a payé respectivement 8,25 francs et 16,35 francs. Pour chaque taxi, trouver la fonction donnant le prix de la course en fonction de la longueur du trajet. Représenter graphiquement les fonctions trouvées. Pour quel trajet, le prix de la course est-il le même avec les deux taxis ?

Exercice 7 Les services industriels d'une commune ont révisé un règlement relatif aux taxes et émoluments (épuration, protection contre les incendies, raccordement au réseau électrique, etc...) imposés aux propriétaires immobiliers. Ces taxes se calculent sur la base de la valeur officielle d'un bâtiment. Avec l'ancien tarif, un bâtiment d'une valeur officielle de 250'000 francs était taxé 500 francs par année ; avec le nouveau tarif, ce montant passe à 575 francs. Pour une villa familiale d'une valeur de 650'000 francs, la taxe de 1300 francs (ancien tarif) est ramenée à 1'175 francs par année avec le nouveau tarif.

a) Donner les expressions décrivant les tarifications y_A (ancienne) et y_N (nouvelle) en fonction de la valeur officielle x d'un bâtiment.

b) Pour quelle valeur officielle, les tarifs coïncident-ils ? Quel montant est alors facturé au propriétaire d'un bâtiment ayant cette valeur ?

Exercice 8 En règle générale, le temps de production d'une décolleteuse dépend du nombre de pièces à produire et de la durée de la mise en train de la machine. Deux machines A et B ont produit deux séries de pièces très spéciales. Les temps de production sont présentés dans le tableau suivant.

Production Nombre de pièces x	Machine A Temps y en h	Machine B Temps y en h
20	1,3	1,2
100	4,5	5,2

a) Quel sera le temps respectif de production de ces deux machines pour un lot de 300 pièces ?

b) Déterminer le nombre de pièces pour lequel les temps de production des deux machines sont égaux.

c) La mise en train d'une machine C dure $0,8$ heure. Pour la production trouvée sous **b)**, cette machine met le même temps que les décolleteuses A et B. Quel serait le temps de production de la machine C pour un lot de 100 pièces ?

Exercice 9 A certaines occasions, les gérants des pizzerias UNO et DUE font appel à des étudiants pour assurer la bonne marche du service de leur établissement. L'un indemnise en restituant simplement un pourcentage du chiffre d'affaires réalisé par chacun des ses auxiliaires, l'autre offre une prime de base à laquelle il ajoute un pourcentage du chiffre d'affaire réalisé.

- Anke, qui a travaillé chez UNO, a reçu 218,65 Frs pour 982,90 Frs de recettes samedi et 287,10 Frs pour 1839,70 Frs de recettes dimanche.
- Bart, qui a travaillé chez DUE, a reçu 217,35 Frs pour 1278,40 Frs de recettes samedi et 292,60 Frs pour 1721,10 Frs de recettes dimanche.

a) Déterminer le système de rémunération de ces deux pizzerias (on arrondira à 1% près et à 10 francs près pour la prime).

b) Calculer pour quel chiffre d'affaires le salaire sera identique dans les deux pizzerias.

Exercice 10 Les entreprises qui livrent du mazout aux particuliers établissent leurs factures selon différents procédés. En particulier, au prix du litre (en centimes), certaines ajoutent parfois une taxe de base (en francs). La comparaison des factures de deux entreprises fait apparaître ce qui suit :

- avec l'entreprise **A**, on a payé 548,80 francs pour une livraison de 1960 litres et 862,40 francs pour 3080 litres ;
- avec l'entreprise B, on a payé respectivement 733,20 francs et 923,60 francs pour les mêmes quantités de carburant.

a) Déterminer les fonctions des procédures de facturation de ces deux entreprises.

b) Pour quelle quantité de mazout les décomptes de ces deux entreprises sont-ils équivalents ?

Exercice 11 Trois agents d'assurances comparent leur salaire mensuel.

- **A** reçoit les 10% de son chiffre d'affaires ;
- **B** reçoit un fixe de 1000 Frs plus 6% de son chiffre d'affaires ;
- **C** reçoit un fixe de 3500 Frs plus 2,5% de son chiffre d'affaires.

Illustrer cette situation par un graphique et déterminer, en fonction du chiffre d'affaire, quel agent profite de la rétribution la plus avantageuse.

Exercice 12 Une maison spécialisée dans le commerce *shareware* offre les conditions annuelles suivantes :

- **A** : Chaque disquette à 8 Frs sans autre condition ;
- **B** : Chaque disquette à 4 Frs et versement d'une cotisation annuelle forfaitaire de 100 Frs ;
- **C** : Versement de 150 Frs donnant droit à 25 disquettes, puis 8 Frs pour chaque disquette supplémentaire.

Déterminer graphiquement et par calculs les seuils pour lesquels une proposition est plus avantageuse que les autres.

2 Le trinôme du deuxième degré

2.1 La Formule de Viète

Une équation du deuxième degré en l'inconnue x a la forme générale suivante

$$\boxed{a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0.}$$

Les nombres réels $a \neq 0$, b et c sont les *coefficients* de l'équation.

Exemples

$$\begin{aligned} 3x^2 - \tfrac{1}{2} \cdot x + 11,5 &= 0, \qquad a = 3,\ b = -\tfrac{1}{2},\ c = 11,5\ ; \\ -x^2 + 7 &= 0, \qquad a = -1,\ b = 0,\ c = 7. \end{aligned}$$

Comme nous le verrons plus loin, une telle équation peut, selon les valeurs de ses coefficients, posséder *une* solution unique, *deux* solutions distinctes ou peut n'en posséder *aucune*.

C'est au mathématicien français François Viète (1540-1603), plus connu à son époque comme maître de requêtes et conseiller d'Henri IV, que l'on doit la méthode générale de résolution d'une équation du deuxième degré. Cette méthode s'applique comme suit.

Soit donc à résoudre, l'équation

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0.$$

On calcule le *discriminant* de l'équation

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac.}$$

Les trois cas suivants peuvent alors se présenter.
- $\Delta < 0$ et alors l'équation ne possède pas de solution (réelle) ;
- $\Delta = 0$ et alors l'équation possède une solution unique $x = -\frac{b}{2a}$;
- $\Delta > 0$ et alors l'équation possède deux solutions $x_1 \neq x_2$ qui sont

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

En résumé, les solutions de l'équation s'obtiennent en calculant

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

C'est cette dernière expression qu'on appelle communément *formule de Viète*.

Exemple 1

Soit à résoudre l'équation

$$3x^2 - 5x + 16 = 0.$$

On calcule

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 16 = -167 < 0.$$

Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution.

Exemple 2

Soit à résoudre l'équation

$$25x^2 - 20x + 4 = 0.$$

On calcule

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-20)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 4 = 0.$$

Comme $\Delta = 0$, on en déduit que l'équation possède une solution unique

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}.$$

Exemple 3

Soit à résoudre l'équation

$$3x^2 + 10x - 8 = 0.$$

On calcule

$$\Delta = b^2 - 4ac = (10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-8) = 196.$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède les deux solutions distinctes

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 + 14}{6} = \frac{2}{3} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 - 14}{6} = -4.$$

Exercice 13 Résoudre les équations suivantes à l'aide de la formule de Viète

$$9x^2 + 42x + 69 = 0; \tag{1}$$

$$81x^2 - 90x + 25 = 0; \tag{2}$$

$$14x^2 - 57x - 27 = 0. \tag{3}$$

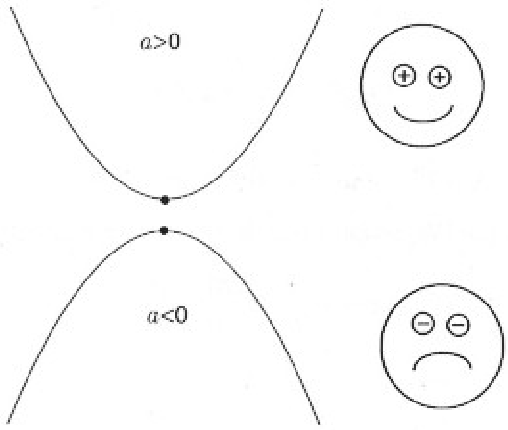
3 Propriétés de la parabole

L'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient la relation

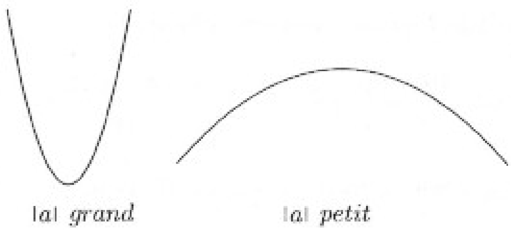
$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

est une courbe appelée *parabole*. Elle a les propriétés suivantes.

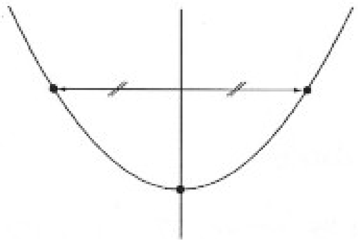
Orientation Son sommet est en bas si $a > 0$ et en haut si $a < 0$.



Courbure Sa courbure est d'autant plus forte (la courbe est d'autant plus resserrée) que $|a|$ est grand.



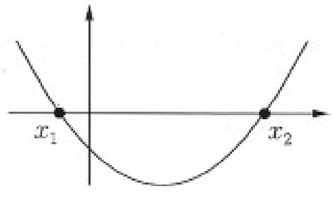
Symétrie La courbe est symétrique par rapport à un axe vertical passant par son sommet.

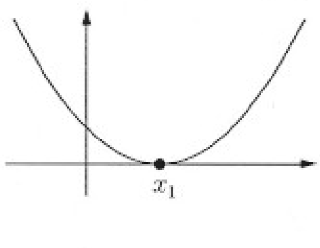


Intersection avec l'axe horizontal

Si $\Delta > 0$, la courbe a deux points d'intersection avec Ox dont les abscisses sont :

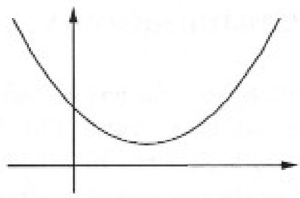
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2\,a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2\,a}.$$





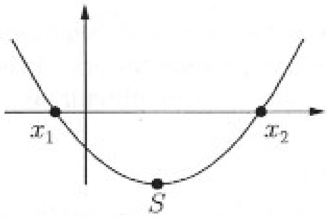
Si $\Delta = 0$, la courbe est tangente à Ox en un point d'abscisse $x_1 = \dfrac{-b}{2\,a}$.

Si $\Delta < 0$, il n'y a pas d'intersection.



Sommet Le sommet de la parabole a les coordonnées suivantes ; il est situé au milieu des éventuels zéros.

$$S\left(-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right) = S\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \ldots\right).$$



Exercice 14 Représenter graphiquement la courbe $\mathcal{C}$ dans chacun des cas suivants

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} : y &= -\frac{1}{2} \cdot x^2 + 2x + 6 \,; \\
\mathcal{C} : y &= \frac{1}{4} \cdot (x-2)(x-6) \,; \\
\mathcal{C} : y &= \frac{2}{9} \cdot (x-3)^2 + \frac{5}{9} \,.
\end{aligned}$$

Déterminer les coordonnées du sommet ainsi que les éventuels points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec les axes de coordonnées.

Exercice 15 Déterminer les points d'intersection de la parabole $\mathcal{C}$ avec la droite d dans chacun des cas suivants

a)	$\mathcal{C} : y = x^2 + 7x - 5$	$d : y = 4x + 5$;
b)	$\mathcal{C} : y = 4x^2 - x + 2$	$d : y = 3x + 1$;
c)	$\mathcal{C} : y = 7x^2 + 3x + 2$	$d : y = x - 2$.

Exercice 16 Trouver les points d'intersections des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{K}$ suivantes

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} : y &= 4x^2 + 20x - 9 \,; \\
\mathcal{K} : y &= -2x^2 + 3x + 5.
\end{aligned}$$

Exercice 17 Même question pour les courbes courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{K}$ suivantes

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} : y &= x^2 + 5x - 2 \,; \\
\mathcal{K} : y &= 2x^2 + 11x - 9.
\end{aligned}$$

4 Optimisation

Exercice 18 Un fermier estime que s'il arrache ses pommes-de-terre aujourd'hui, il en récoltera 120 hl valant 25 francs l'hl. Il sait que s'il attend, la récolte augmentera de 20 hl par semaine, alors que le prix par hl baissera de $2,50$ francs. Au bout de combien de temps le fermier devra-t-il arracher ses pommes-de-terre pour en obtenir le meilleur revenu ?

Exercice 19 Un magasin spécialisé loue actuellement $3'000$ vidéos par année au prix unitaire de 12 frs. Une étude l'a informé que, durant ces prochaines années, ce prix baisserait chaque année de 1 fr, mais qu'en compensation, il louerait 500 cassettes de plus. À court terme, avec ces pronostics, le magasin devrait augmenter son revenu. Dans combien d'années va-t-il réaliser ses recettes maximales ?

Exercice 20 Dans un salon de quilles, il se joue quotidiennement $3'000$ parties à 2 francs la partie. En supposant que chaque diminution de 5 centimes du prix de la partie entraîne une augmentation de 100 parties jouées, trouver le prix à fixer pour obtenir un revenu maximal. Quel est alors ce revenu maximal ?

Exercice 21 Dans un champ, contre une barrière existante, on dispose de 200 m de treillis pour clôturer 6 boxes rectangulaires contigus disposés en deux rangées de trois boxes. Déterminer les dimensions de la surface clôturée qui rend maximale l'aire de chaque box.

Exercice 22 Une fabrique produit des grille-pain. Une étude lui a permis d'établir que la demande x en fonction du prix p est donnée par la relation $x = 10'200 - 300p$. La compagnie calcule que la production va requérir un investissement fixe de $14'400$ frs auquel s'ajouteront 8 frs par grille-pain fabriqué. Quel prix la compagnie devra-t-elle fixer pour ses grille-pain si elle entend réaliser un bénéfice maximal ?

Exercice 23 Un manufacturier de meubles sait qu'il a une forte demande pour un certain fauteuil. Cette demande x, s'exprime en fonction du prix de vente p, par la relation $x = 9000 - 20p$. Le manufacturier a également calculé qu'il lui en coûte un montant fixe de $4'000$ francs plus 20 francs par fauteuil pour la fabrication de ceux-ci. Quel prix le manufacturier doit-il fixer pour ses fauteuils s'il veut

a) un profit maximal ;

b) un revenu maximal ;

c) atteindre le seuil de rentabilité inférieur ;

d) atteindre le seuil de rentabilité supérieur ;

e) Quel sera le bénéfice maximal ?

f) Quel sera le revenu maximal ?

Exercice 24 Pour fabriquer un nouveau produit, une entreprise compte $35'000$ francs d'investissement auxquels il faut ajouter 8 francs par article. Une étude a permis d'établir que la demande n du produit en fonction de son prix p est donnée par la relation $n = 25'000 - 1'000p$. Avec ces données, déterminer précisément les prix que doit fixer l'entreprise et le nombre d'articles qu'elle doit produire, si elle recherche

a) les seuils de rentabilité inférieur et supérieur ;

b) le revenu maximal ;

c) le bénéfice maximal.

Exercice 25 Une grande entreprise internationale de machines-outils exporte aux États-Unis des machines d'une nouvelle génération. Les fluctuations du cours du franc suisse par rapport au dollar ont un effet très sensible sur le volume des ventes. Plus précisément, l'entreprise vend en moyenne 600 machines par année quand le prix d'une unité est de 270'000 dollars. Toute variation (augmentation ou baisse) de 15'000 dollars du prix unitaire entraîne une variation (augmentation ou baisse) de 25 unités par année.

a) Quel est, dans ces conditions, le prix unitaire en dollars qui assure à l'entreprise des recettes maximales ?

b) En 1996, année de lancement sur le marché de la machine, les cours étaient relativement bas et les américains en ont profité. Le montant annuel des ventes s'est alors élevé à 147 millions de dollars. Combien de machines ont été vendues cette année-là ?

Exercice 26 Une parfumerie veut mettre sur le marché une nouvelle essence. Une étude de marché lui indique que la demande pour le format de 30 ml s'exprime, en fonction du prix de vente p, par l'expression $660 - 22p$. D'autre part, on évalue les coûts de production à 820 francs de frais fixes plus 7 francs de frais variables pour chaque flacon de parfum fabriqué.

a) Calculer les prix qui déterminent les seuils de rentabilité.

b) Trouver le nombre de flacons que la parfumerie devra vendre afin d'obtenir une recette ou un bénéfice maximum.

Exercice 27 L'agence de voyages *Beach and Sun* affrète un charter de 400 places pour un voyage aux îles Maldives. Quel que soit le nombre de participants, les frais totaux engagés par l'agence s'élèvent à 240'000 francs. Dans le cas où l'avion peut être complètement rempli, l'agence fixe le prix du voyage à 660 francs par personne. Ce prix individuel se trouve toutefois majoré de 3 francs pour chaque place du charter qui ne serait pas occupée.

a) Déterminer le nombre de passagers et le prix qu'ils paieront si le bénéfice de l'agence est maximal.

b) Qu'en est-il si l'agence doit en plus s'acquitter auprès de l'aéroport d'une taxe supplémentaire s'élevant à 12 francs pour chaque place occupée dans l'avion ?

5 Réponses aux exercices

Exercice 1 Pente 2, ordonnée à l'origine -3.

Exercice 2 $y = -3x + 19$.

Exercice 3 $y = 5x - 4$.

Exercice 4 $I(3; 2)$.

Exercice 5 côté $a = BC : y = -\frac{7}{6}x + \frac{55}{6}$, côté $b = AC : y = \frac{11}{5}x + \frac{29}{5}$, côté $c = AB : y = \frac{4}{11}x - \frac{17}{11}$.

Exercice 6 Pour une distance x, le taxi A applique le tarif suivant.

Tarif y_A	8,50	15,70
Distance x	2,5	5,5

La relation $y_A = p \cdot x + h$ entre la distance x de la course et son prix y_A est représentée par une droite liant les points (2,5; 8,50) et (5,5; 15,70). Cette droite a, pour pente

$$p = \frac{15{,}70 - 8{,}50}{5{,}5 - 2{,}5} = \frac{7{,}20}{3} = 2{,}40.$$

Ainsi $y_A = 2{,}40x + h$. Comme le point (2,5; 8,50) est sur la droite, on doit avoir $8{,}50 = 2{,}40 \cdot 2{,}5 + h$. D'où $h = 8{,}50 - 2{,}40 \cdot 2{,}5 = 2{,}50$. Le tarif du taxi est donc donné par la relation

$$\boxed{y_A = 2{,}40 \cdot x + 2{,}50}$$

dans laquelle 2,40 francs correspond au prix par km et 2,50 est le prix de la prise en charge.

Pour le taxi B, on a

Tarif y_B	8,25	16,35
Distance x	2,5	5,5

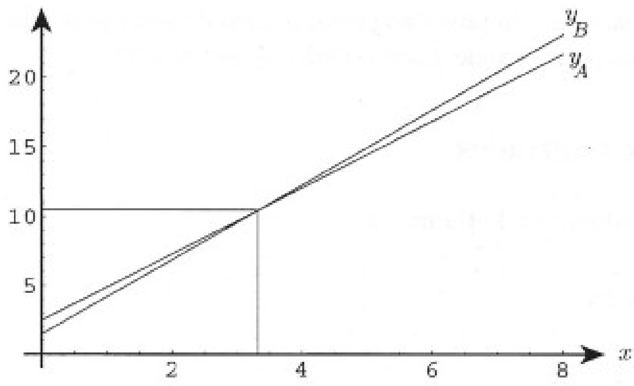
La droite passant par les points (2,5; 8,25) et (5,5; 16,35) a pour pente

$$p = \frac{16{,}35 - 8{,}25}{5{,}5 - 2{,}5} = \frac{8{,}10}{3} = 2{,}70.$$

Ainsi $y_B = 2{,}70x + h$. Comme le point (2,5; 8,25) est sur la droite, on doit avoir $8{,}25 = 2{,}70 \cdot 2{,}5 + h$. D'où $h = 8{,}25 - 2{,}70 \cdot 2{,}5 = 1{,}50$. Le tarif du taxi est donc donné par la relation

$$\boxed{y_B = 2{,}70 \cdot x + 1{,}50}$$

Ici le prix au km s'élève à 2,70 francs alors que la prise en charge n'est que de 1,50 francs.



Le prix de la course sera le même pour les deux taxis, lorsque $2{,}4x + 2{,}5 = 2{,}7x + 1{,}5$, c'est-à-dire quand $1 = 0{,}3x$ donc pour une distance de 3,33 km.

Exercice 7 Pour un bâtiment de valeur officielle x (exprimée en F) , on doit s'acquitter des taxes suivantes conformément à l'ancien et au nouveau tarif.

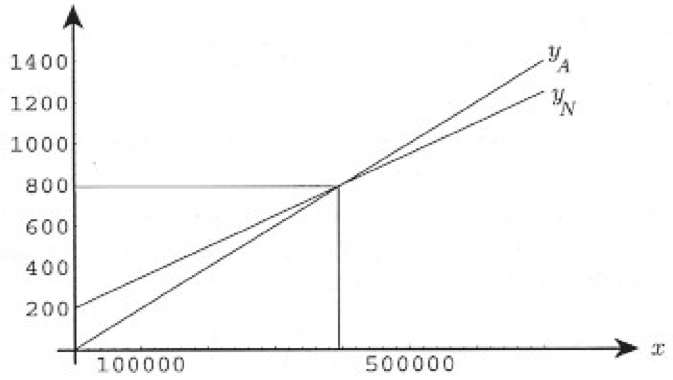
Valeur officielle x	250000	650000
Ancien tarif y_A	500	1300
Nouveau tarif y_N	575	1175

a) L'ancien tarif est décrit par une droite d'équation $y_A = p \cdot x + h$, relation dans laquelle la pente vaut $p = \frac{1300-500}{650000-250000} = 0{,}002$. Ainsi $y_A = 0{,}002x + h$. Comme le point $(250000, 500)$ est sur la droite, on doit avoir $500 = 0{,}002 \cdot 250000 + h$. Et donc, $h = 0$. On en déduit que

$$\boxed{y_A = 0{,}002x}$$

Dans la relation décrivant le nouveau tarif, la pente vaut $p = \frac{1175-575}{400000} = 0{,}0015$. Comme on connaît le couple $(250000, 575)$, on doit avoir $575 = 0{,}0015 \cdot 250000 + h$. Ainsi $h = 200$. D'où l'expression du nouveau tarif

$$\boxed{y_N = 0{,}0015x + 200}$$



b) Les deux tarifs coïncident pour x vérifiant l'équation

$$\begin{aligned} 0{,}002x &= 0{,}0015x + 200 \\ 0{,}0005x &= 200 \\ x &= 400000 \end{aligned}$$

Dans ce cas, on a $y_A = y_B = 800$.

Exercice 8

a) **Machine A** : La droite liant les points $(20; 1{,}3)$ et $(100; 4{,}5)$ a pour pente $p = \frac{3{,}2}{80} = 0{,}04$. Son équation a la forme $y_A = 0{,}04x + h$. On doit avoir $1{,}3 = 0{,}04 \cdot 20 + h$. D'où $h = 0{,}5$. Ainsi

$$\boxed{y_A = 0{,}04x + 0{,}5}$$

Pour $x = 300$, on a donc $y_A = 12{,}5$.

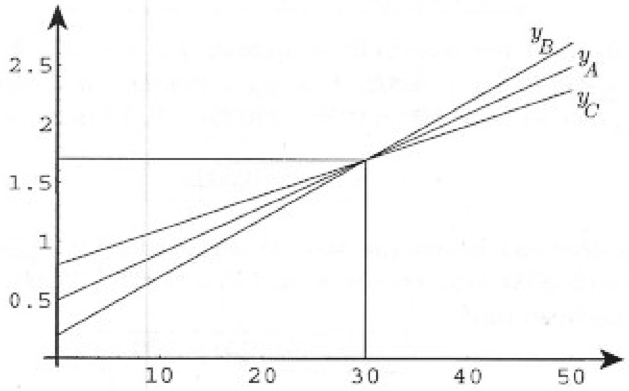
Machine B : La droite liant les points $(20; 1{,}2)$ et $(100; 5{,}2)$ a pour pente $p = \frac{4}{80} = 0{,}05$. Son équation a la forme $y_A = 0{,}05x + h$. On doit avoir $1{,}2 = 0{,}05 \cdot 20 + h$. D'où $h = 0{,}2$. Ainsi

$$\boxed{y_B = 0{,}05x + 0{,}2}$$

Pour $x = 300$, on a donc $y_B = 15{,}2$.

b) On a $y_B = y_A$ quand $0{,}05x + 0{,}2 = 0{,}04x + 0{,}5$ ou quand $0{,}01x = 0{,}3$; c'est-à-dire pour $x = 30$ pièces. Notons qu'alors $y_A = y_B = 1{,}7$. Les deux droites passent donc par le même point $(30; 1{,}7)$.

c) On cherche l'équation de la droite passant par les points $(0; 0{,}8)$ et le point $(30; 1{,}7)$. Elle a pour pente $p = \frac{0{,}9}{30} = 0{,}03$.



Son équation s'écrit donc

$$\boxed{y_C = 0{,}03x + 0{,}8}$$

Exercice 9 Soit x le montant des recettes et y_U, y_D les rémunérations correspondantes versées chez UNO, respectivement chez DUE.

a) **UNO** : La droite liant les points $(982{,}90; 218{,}65)$ et $(1839{,}70; 287{,}10)$ a pour pente $p = \frac{287{,}10-218{,}65}{1839{,}70-982{,}90} = 0{,}08$. Son équation a la forme $y_U = 0{,}08x + h$. On doit avoir $218{,}65 = 0{,}08 \cdot 982{,}90 + h$. D'où $h = 140$. Ainsi

$$\boxed{y_U = 0{,}08x + 140}$$

DUE : La droite liant les points $(1278{,}40; 217{,}35)$ et $(1721{,}10; 292{,}60)$ a pour pente $p = \frac{292{,}60-217{,}35}{1721{,}10-1278{,}40} = 0{,}17$. Son équation a la forme $y_D = 0{,}17x + h$. On doit avoir $217{,}35 = 0{,}17 \cdot 1278{,}40 + h$. D'où $h = 0$. Ainsi

$$\boxed{y_U = 0{,}17x}$$

b) On a $y_U = y_D$ quand $0{,}08x + 140 = 0{,}17x$, c'est-à-dire pour une recette $x = 1555{,}55$ francs.

Exercice 10 Soit x le nombre de litres livrés et y_A, y_D les montants facturés par les entreprises A et B.

a) **Entreprise A** : La droite liant les points $(1960; 548{,}80)$ et $(3080; 862{,}40)$ a pour pente $p = \frac{862{,}40-548{,}80}{3080-1960} = 0{,}28$. Son équation a la forme $y_A = 0{,}28x + h$. On doit avoir $862{,}40 = 0{,}28 \cdot 1960 + h$. D'où $h = 0$. Ainsi

$$\boxed{y_A = 0{,}28x}$$

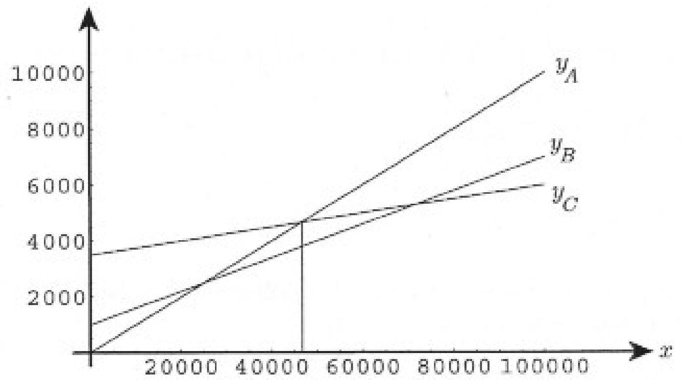
Entreprise B : La droite liant les points $(1960; 733{,}20)$ et $(3080; 923{,}60)$ a pour pente $p = \frac{923{,}60-733{,}20}{3080-1960} = 0{,}17$. Son équation a la forme $y_B = 0{,}17x + h$. On doit avoir $733{,}20 = 0{,}17 \cdot 1960 + h$. D'où $h = 400$. Ainsi

$$\boxed{y_B = 0{,}17x + 400}$$

b) On a $y_A = y_B$ quand $0{,}28x = 0{,}17x + 400$, c'est-à-dire pour une recette $x = 3636$ litres.

Exercice 11 Pour un chiffre d'affaires x (exprimé en francs), les agents d'assurances perçoivent les rétributions suivantes :

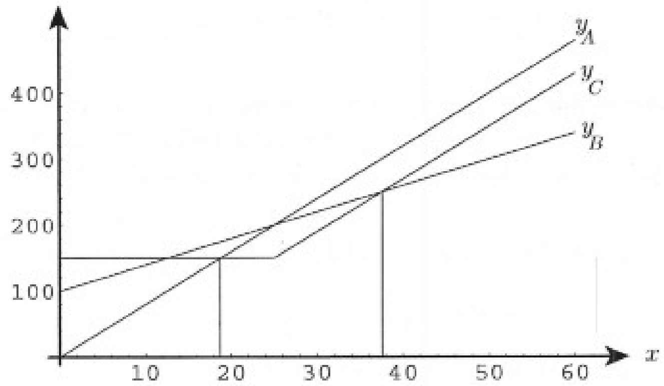
$$y_A = 0{,}1x \qquad y_B = 0{,}06x + 1000 \qquad y_C = 0{,}025x + 3500.$$



On a $y_A = y_C$ quand $0{,}1x = 0{,}025x + 3500$, c'est-à-dire quand $0{,}075x = 3500$ et donc, pour $x = 46666{,}65$. Ainsi, jusqu'à ce montant de 46666,65 francs, c'est l'agent C qui est le mieux rétribué. Au-delà, c'est l'agent A qui reçoit la meilleure rétribution.

Exercice 12 Pour l'achat de x disquettes, les conditions suivantes sont appliquées

$$y_A = 8x, \qquad y_B = 4x + 100, \qquad y_C = \begin{cases} 150 & \text{si } x \leq 25 \\ 150 + 8(x - 25) & \text{si } x \geq 25. \end{cases}$$



On a $y_A = y_C$ quand $8x = 150$ c'est-à-dire pour $x = 18{,}75$. Ainsi, jusqu'à 18 disquettes, c'est la condition A qui est la plus favorable. On a $y_B = y_C$ quand

$$\begin{aligned} 4x + 100 &= 150 + 8(x - 25) \\ 4x + 100 &= 8x - 50 \\ 150 &= 4x \\ 37{,}5 &= x \end{aligned}$$

Entre 19 et 37 disquettes, la condition C est la plus avantageuse. À partir de 38 disquettes, la condition B devient la plus favorable.

Exercice 13 (1) pas de solution, (2) $x = 5/9$, (3) $x = 9/2$ et $x = -3/7$.

Exercice 14 Parabole 1 : $S(2;8)$, $V(0;6)$, $H_1(-2;0)$, $H_2(6;0)$. Parabole 2 : $S(4;-1)$, $V(0;3)$, $H_1(2;0)$, $H_2(6;0)$. Parabole 3 : $S(3;5/9)$, $V(0;23/9)$.

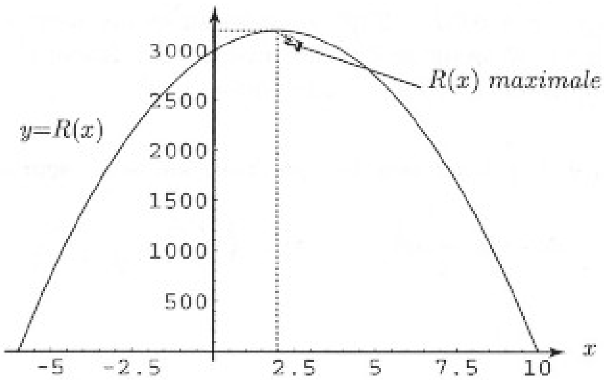
Exercice 15 a) $I(-5;-15)$ et $J(2;13)$, b) $I(1/2;5/2)$, c) pas d'intersection.

Exercice 16 $I(-7/2;-30)$, $J(2/3;55/9)$.

Exercice 17 $I(-7;12)$, $J(1;4)$.

Exercice 18 En attendant x semaines, le fermier récoltera $120 + 20x$ hl qu'il pourra vendre au prix de $25 - 2{,}5x$ francs par hl. Son revenu sera donc

$$R(x) = (120 + 20x) \cdot (25 - 2{,}5x).$$

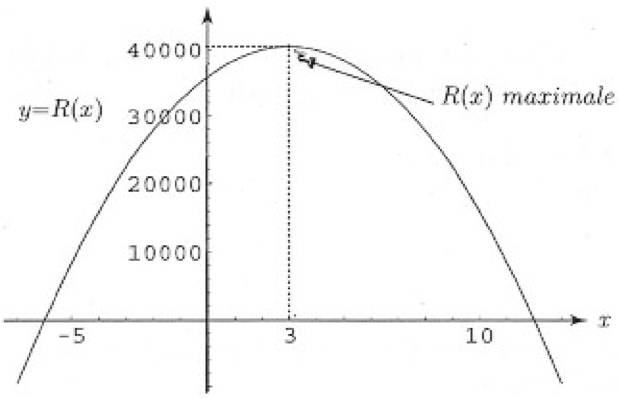


La fonction $R(x)$ est représentée par une parabole. Comme $R(x) = 0$ pour $x = -6$ et $x = 10$, $R(x)$ est maximale pour $x = \frac{-6+10}{2} = 2$. Le fermier doit donc attendre 2 semaines, pour récolter 160 hl qu'il pourra vendre au prix de 20 francs l'hl. Le revenu correspondant sera donc $R(2) = 3200$ francs.

Exercice 19 Dans x années, le magasin louera $3000 + 500x$ cassettes au prix unitaire de $12 - x$ francs. Son revenu

$$R(x) = (3000 + 500x) \cdot (12 - x)$$

est décrit par une fonction représentée par une parabole.



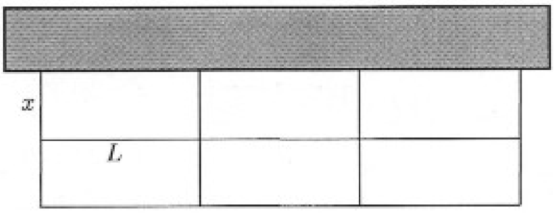
Comme $R(x) = 0$ pour $x = -6$ et $x = 12$, celle-ci a un sommet d'abscisse $x = \frac{-6+12}{2} = 3$. En attendant 3 ans, le magasin louera 4500 cassettes au prix unitaire de 9 francs et réalisera ainsi des recettes maximales d'un montant de $R(3) = 40500$ francs.

Exercice 20 En accordant x diminutions de 5 centimes, ce salon vendra $3000 + 100x$ parties au prix unitaire de $2 - 0{,}05x$. Son revenu

$$R(x) = (3000 + 100x) \cdot (2 - 0{,}05x)$$

est décrit par une fonction représentée par une parabole. Comme $R(x) = 0$ pour $x = -30$ et $x = 40$, $R(x)$ est maximal pour $x = \frac{-30+40}{2} = 5$. Ainsi, en fixant à 1,75 franc le prix de la partie, le salon vendra 3500 parties et réalisera ainsi un revenu maximal de $R(5) = 6125$ francs.

Exercice 21 Soit x la largeur d'un box et L sa longueur. Comme la longueur du fil est de 200 m, on sait que $8x + 6L = 200$. Ainsi $L = \frac{1}{6} \cdot (200 - 8x)$.



L'aire d'un box est donnée par la fonction

$$A(x) = x \cdot L = \frac{1}{6} \cdot x \cdot (200 - 8x)$$

qui est représentée par une parabole. Comme $A(x) = 0$ pour $x = 0$ et $x = 25$, $A(x)$ sera maximale pour $x = 12{,}5$. Dans ce cas, $L = \frac{50}{3}$ et la surface clôturée a pour dimension 25×50.

Exercice 22 21 francs.

Exercice 23 a) 235 frs, b) 225 frs, c) 20, 50 frs, d) 449, 50 frs, e) 920′500 frs, f) 1′012′500 frs.

Exercice 24 Si p désigne le prix de vente unitaire, alors le revenu est donné par

$$R(p) = n \cdot p = (25000 - 1000p) \cdot p = -1000p^2 + 25000p.$$

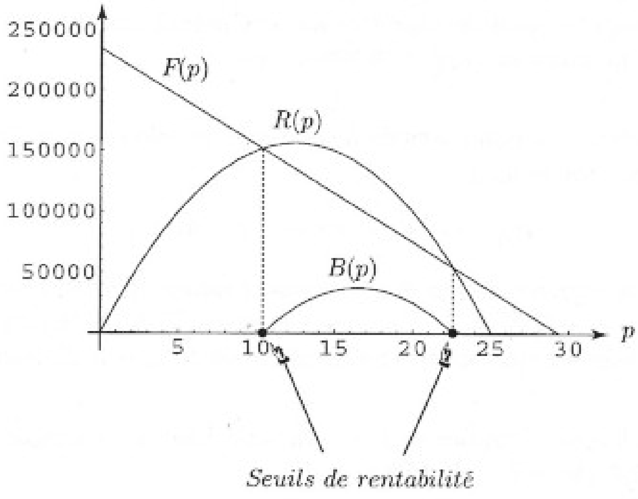
Les frais s'expriment alors

$$F(p) = 35000 + 8 \cdot n = 35000 + 8 \cdot (25000 - 1000p) = 235000 - 8000p.$$

Enfin, le bénéfice est donné par

$$B(p) = R(p) - F(p) = -1000p^2 + 25000p - (235000 - 8000p) = -1000p^2 + 33000p - 235000.$$

Graphiquement, la fonction $F(p)$ est représentée par une droite de pente négative, tandis que les fonctions $R(p)$ et $B(p)$ sont représentées par des paraboles. Les valeurs de p pour lesquelles le bénéfice est nul, c'est-à-dire telles que $R(p) = F(p)$ (les revenus et les frais sont égaux), sont appelées *seuils de rentabilité*.



a) Le bénéfice $B(p) = -1000p^2 + 33000p - 235000$ s'annule quand $p^2 - 33p + 235 = 0$, c'est-à-dire pour

$$p = \frac{33 \pm \sqrt{33^2 - 4 \cdot 235}}{2} = \begin{array}{l} \nearrow \ 10{,}397 \\ \searrow \ 22,603 \end{array}$$

Les seuils de rentabilité sont donc : 10, 40 et 22,60 francs. Pour rester dans l'intervalle de rentabilité on arrondit le seuil inférieur vers le haut et le seuil supérieur vers le bas.

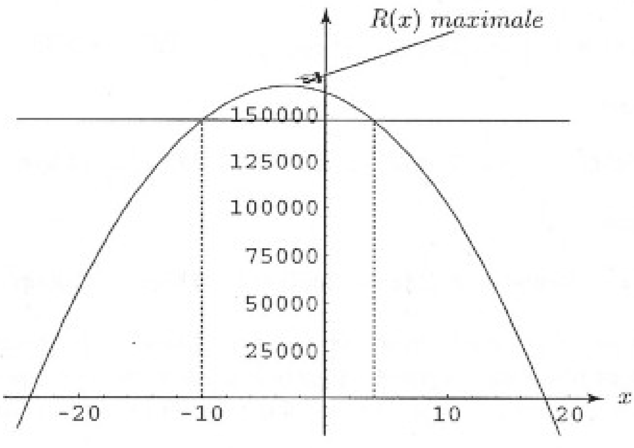
b) Le revenu $R(p) = -1000p^2 + 25000p$ est maximal quand $p = -\frac{b}{2a} = 12{,}50$ francs. Son montant est de $R(12{,}50) = 156250$. Dans ce cas, on vend $n(12{,}5) = 12500$ articles.

c) Quant au bénéfice $B(p) = -1000p^2 + 33000p - 235000$ il est maximal quand $p = -\frac{b}{2a} = 16{,}50$ francs. Son montant est de $B(16{,}50) = 37250$. Dans ce cas, on vend $n(16{,}5) = 8500$ articles.

Exercice 25 Nous utiliserons l'unité du k\$ (milliers de dollars). Si x dénote le nombre de variations (rabais) d'un montant de 15 k\$ sur le prix de vente, alors la société vendra $600 + 25x$ machines au prix unitaire de $270 - 15x$. Ses recettes

$$R(x) = (600 + 25x) \cdot (270 - 15x)$$

sont décrites par une fonction représentée par une parabole.



a) Comme $R(x) = 0$ quand $x = -24$ et $x = 18$, $R(x)$ est maximale pour $x = \frac{-24+18}{2} = -3$. Le prix unitaire assurant un revenu maximal est donc de 315 k\$.

b) On résout $R(x) = 147000$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}(600+25x)\cdot(270-15x) &= 147000 \\ -375x^2-2250x+15000 &= 0 \quad \text{(on divise par } -375) \\ x^2+6x-40 &= 0 \\ (x-4)\cdot(x+10) &= 0\end{aligned}$$

On obtient ainsi $x = -10$ et $x = 4$. Comme les Américains ont profité d'un prix bas, il convient de choisir $x = 4$. L'entreprise a donc vendu cette année-là 700 machines au prix unitaire de 210 k\$.

Exercice 26 a) $8,80$ frs et $28,25$ frs, b) R_{max} pour $p = 15$ frs et $n = 330$, B_{max} pour $p = 18,50$ et $n = 253$.

Exercice 27 Si x désigne le nombre de places vides, alors le prix de chacune des $400 - x$ occupées sera de $660 + 3x$.

a) Le bénéfice de la compagnie s'exprime sous la forme

$$B(x) = (660+3x)\cdot(400-x) - 240000 = -3x^2 + 540x + 24000$$

d'une fonction représentée par une parabole. $B(x)$ est maximale pour $x = -\frac{540}{-6} = 90$. Dans ce cas, les 310 passagers paient leur place 930 francs.

b) Ici les revenus $R(x) = (660+3x)\cdot(400-x)$ restent les mêmes. En revanche, les frais s'expriment sous la forme $F(x) = 240000 + 12\cdot(400-x) = 244800 - 12x$. En conséquence, le bénéfice s'écrit

$$B(x) = R(x) - F(x) = -3x^2 + 552x + 19200.$$

Il est maximal pour $x = -\frac{552}{-6} = 92$. Dans ce cas, les 308 passagers paient leur place 936 francs.