Corrigé détaillé des exercices

Exercice 1

$a^4\cdot a^{28}=a^{4+28}=\underline{a^{32}}.$

$x^{25}\cdot x^{-14}=x^{25+(-14)}=x^{25-14}=\underline{x^{11}}.$

$u^{-22}\cdot u^{7}=u^{-22+7}=\underline{u^{-15}}.$

$t^{x-4}\cdot t^{6-x}=t^{x-4+6-x}=\underline{t^{2}}.$

$b^{4n-7}\cdot b^{-n+7}=b^{4n-7+(-n+7)}=b^{4n-7-n+7}=\underline{b^{3n}}.$

$\frac{h^{-4}}{h^{-7}}=h^{-4-(-7)}=h^{-4+7}=\underline{h^{3}}.$

$\frac{n^{0}}{n^{-5}}=n^{0-(-5)}=n^{0+5}=\underline{n^{5}}.$

$\frac{z^{5}}{z^{3-6n}}=z^{5-(3-6n)}=z^{5-3+6n}=\underline{z^{2+6n}}.$

$\frac{(-a)^{17}}{(-a)^{15}}=(-a)^{17-15}=(-a)^{2}=\underline{a^{2}}.$

$\frac{c^{x}}{c}=\frac{c^{x}}{c^{1}}=\underline{c^{x-1}}.$

$\frac{e^{x}}{e^{-x}}=e^{x-(-x)}=e^{x+x}=\underline{e^{2x}}.$

$\frac{54a^3x^5y^{10}}{18a^{-4}xy^{8}}=\frac{54}{18}\cdot\frac{a^3}{a^{-4}}\cdot\frac{x^5}{x^1}\cdot\frac{y^{10}}{y^8}=3\cdot a^{3-(-4)}\cdot x^{5-1}\cdot y^{10-8}=\underline{3a^7x^4y^2}.$

Exercice 2

$(-2a)^5=(-2)^5a^5=\underline{-32a^5}.$

$(-x^6)^4=(-1)^4\cdot(x^6)^4=1\cdot x^{6\cdot4}=\underline{x^{24}}.$

$\frac{(-10x)^6}{(-100x)^3}=\frac{(-10)^6x^6}{(-100)^3x^3}=\frac{10^6x^6}{-10^6x^3}=-1\cdot x^{6-3}=\underline{-x^3}.$

$(ab^0c^{-3})^{-n}=(a\cdot1\cdot c^{-3})^{-n}=(a\cdot c^{-3})^{-n}=a^{-n}(c^{-3})^{-n}=a^{-n}c^{-3\cdot(-n)}=\underline{a^{-n}\cdot c^{3n}}.$

$(-3x^4)^3=(-3)^3(x^4)^3=-27x^{4\cdot3}=\underline{-27x^{12}}.$

$(a^{-3}b^5)^3=(a^{-3})^3(b^5)^3=a^{-3\cdot3}\cdot b^{5\cdot3}=\underline{a^{-9}b^{15}}.$

$(a^5b^{-8}x)^{-4}=(a^5)^{-4}(b^{-8})^{-4}x^{-4}=a^{5\cdot(-4)}\cdot b^{-8\cdot(-4)}\cdot x^{-4}=\underline{a^{-20}b^{32}x^{-4}}.$

$\frac{(-a)^{4n+3}}{(-a^n)^4}=\frac{(-a)^{4n}\cdot(-a)^3}{(-1)^4(a^n)^4}=\frac{a^{4n}\cdot(-a^3)}{1\cdot a^{4n}}=\frac{-a^3}{1}=\underline{-a^3}.$

$\frac{(4a^3b^7)^5}{8(a^2b^3)^2}=\frac{4^5(a^3)^5(b^7)^5}{8(a^2)^2(b^3)^2}=\frac{1024a^{3\cdot5}\cdot b^{7\cdot5}}{8a^{2\cdot2}\cdot b^{3\cdot2}}=\frac{1024\cdot a^{15}\cdot b^{35}}{8a^4\cdot b^6}=\frac{1024}{8}\cdot\frac{a^{15}}{a^4}\cdot\frac{b^{35}}{b^6}=$

$=128a^{15-4}\cdot b^{35-6}=\underline{128a^{11}b^{29}}.$

$\frac{(2x^2)^{1/2}}{\sqrt[6]{8}\cdot x^{-1}}=\frac{2^{1/2}(x^2)^{1/2}}{8^{1/6}\cdot x^{-1}}=\frac{2^{1/2}\cdot x^{2\cdot\frac12}}{(2^3)^{1/6}\cdot x^{-1}}=\frac{2^{1/2}\cdot x}{2^{3\cdot\frac16}\cdot x^{-1}}=\frac{2^{1/2}\cdot x}{2^{1/2}\cdot x^{-1}}=\frac{x^1}{x^{-1}}=x^{1-(-1)}=\underline{x^2}.$

$$\left(\frac{a^5}{b^6}\right)^{-4} = \left(a^5 \cdot b^{-6}\right)^{-4} = \left(a^5\right)^{-4} \cdot \left(b^{-6}\right)^{-4} = a^{5\cdot(-4)} \cdot b^{(-6)\cdot(-4)} = \underline{a^{-20} \cdot b^{24}.}$$

$$\left(\frac{a^4 b^{-4}}{c^7}\right)^3 = \frac{\left(a^4 b^{-4}\right)^3}{\left(c^7\right)^3} = \frac{\left(a^4\right)^3 \cdot \left(b^{-4}\right)^3}{c^{7\cdot 3}} = \frac{a^{4\cdot 3} \cdot b^{-4\cdot 3}}{c^{21}} = \frac{a^{12} \cdot b^{-12}}{c^{21}} = \underline{a^{12} b^{-12} c^{-21}} =$$

$$= \underline{\frac{a^{12}}{b^{12} c^{21}}}.$$

<u>Exercice 3</u>

$$\sqrt[4]{27} = \underline{27^{\frac{1}{4}}} = \left(3^3\right)^{\frac{1}{4}} = 3^{3\cdot\frac{1}{4}} = \underline{3^{\frac{3}{4}}.}$$

$$\sqrt[3]{a^n} = \left(a^n\right)^{\frac{1}{3}} = a^{n\cdot\frac{1}{3}} = \underline{a^{\frac{n}{3}}}.$$

$$\frac{x^4}{\sqrt[5]{x^7}} = \frac{x^4}{\left(x^7\right)^{1/5}} = \frac{x^4}{x^{7\cdot\frac{1}{5}}} = \frac{x^4}{x^{7/5}} = x^{4-\frac{7}{5}} = x^{\frac{20}{5}-\frac{7}{5}} = \underline{x^{\frac{13}{5}}.}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} = \underline{3^{-\frac{1}{2}}.}$$

$$\sqrt[4]{b^8} = \left(b^8\right)^{\frac{1}{4}} = b^{8\cdot\frac{1}{4}} = \underline{b^2.}$$

$$\left(\sqrt[5]{a^6}\right)^{15} = \left(\left(a^6\right)^{\frac{1}{5}}\right)^{15} = a^{6\cdot\frac{1}{5}\cdot 15} = a^{6\cdot 3} = \underline{a^{18}.}$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^{2n^2-n}}} = \frac{1}{\left(a^{2n^2-n}\right)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{a^{(2n^2-n)\cdot\frac{1}{n}}} = \frac{1}{a^{2n-1}} = a^{-(2n-1)} = \underline{a^{-2n+1}.}$$

$$\left(\sqrt{x^4}\right)^{2n} = \left(\left(x^4\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{2n} = x^{4\cdot\frac{1}{2}\cdot 2n} = \underline{x^{4n}.}$$

$$\sqrt[2n-1]{a^{4n-2}} = \left(a^{4n-2}\right)^{\frac{1}{2n-1}} = a^{\frac{4n-2}{2n-1}} = a^{\frac{2(2n-1)}{2n-1}} = \underline{a^2.}$$

$$\left(\sqrt[n]{a^p}\right)^{n\cdot m} = \left(\left(a^p\right)^{\frac{1}{n}}\right)^{n\cdot m} = a^{p\cdot\frac{1}{n}\cdot n\cdot m} = \underline{a^{p\cdot m}.}$$

$$\sqrt{x^{8n}} = \left(x^{8n}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{8n\cdot\frac{1}{2}} = \underline{x^{4n}.}$$

$$\frac{\left(\sqrt{x^3}\right)^{4n}}{\left(\left(x^n\right)^3\right)^2} = \frac{\left(\left(x^3\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{4n}}{x^{n\cdot 3\cdot 2}} = \frac{x^{3\cdot\frac{1}{2}\cdot 4n}}{x^{6n}} = \frac{x^{3\cdot 2n}}{x^{6n}} = \frac{x^{6n}}{x^{6n}} = \underline{1.}$$

Exercice 4

Si $P(3;10{,}648)$ est sur C, cela signifie que $x=3$ et $y=10{,}648$ satisfait à $y=a^x$.
On doit donc avoir $10{,}648=a^3 \Rightarrow a=\sqrt[3]{10{,}648}=\underline{2{,}2}.$

Exercice 5

(1) $7^{x+6}=7^{3x-4} \Rightarrow$
$$\begin{aligned} x+6&=3x-4 && \Big|\ -3x-6\\ -2x&=-10 && \Big|\ :(-2)\\ \underline{x}&\underline{=5} \end{aligned}$$

(2) $3^{5x-8}=9^{x+2} \Rightarrow 3^{5x-8}=(3^2)^{x+2} \Rightarrow 3^{5x-8}=3^{2(x+2)} \Rightarrow 3^{5x-8}=3^{2x+4}$
$$\begin{aligned} \Rightarrow 5x-8&=2x+4 && \Big|\ -2x+8\\ 3x&=12 && \Big|\ :3\\ \underline{x}&\underline{=4} \end{aligned}$$

(3) $3^{2x+3}=3^{(x^2)} \Rightarrow 2x+3=x^2 \Rightarrow x^2-2x-3=0$, équation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=1$, $b=-2$ et $c=-3$; on a $b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-3)=$
$=4+12=16$; d'où $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{2+\sqrt{16}}{2\cdot1}=\dfrac{2+4}{2}=\underline{3}$ et
$x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{2-\sqrt{16}}{2\cdot1}=\dfrac{2-4}{2}=\underline{-1}$

(4) $2^{-100x}=0{,}5^{x-4} \Rightarrow 2^{-100x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-4} \Rightarrow 2^{-100x}=(2^{-1})^{x-4} \Rightarrow 2^{-100x}=2^{-(x-4)}$
$$\begin{aligned} \Rightarrow 2^{-100x}=2^{-x+4} \Rightarrow\quad -100x&=-x+4 && \Big|\ +x\\ -99x&=4 && \Big|\ :(-99)\\ \underline{x}&\underline{=-\tfrac{4}{99}} \end{aligned}$$

(5) $\left(\frac{1}{5}\right)^{6-x}=5 \Rightarrow (5^{-1})^{6-x}=5^1 \Rightarrow 5^{-(6-x)}=5^1 \Rightarrow 5^{-6+x}=5^1$
$\Rightarrow -6+x=1 \Rightarrow \underline{x=7}.$

Exercice 6

On a $N(t) = 600 \cdot 3^{t/2}$, où t est le nombre d'heures depuis 7h.

A 8h, on a $t=1$ et $N(t) = 600 \cdot 3^{1/2} \cong \underline{1039}$.

A 9h, on a $t=2$ et $N(t) = 600 \cdot 3^{2/2} = \underline{1800}$.

A 10h, on a $t=3$ et $N(t) = 600 \cdot 3^{3/2} \cong \underline{3118}$.

A 11h, on a $t=4$ et $N(t) = 600 \cdot 3^{4/2} = \underline{5400}$.

Exercice 7

La formule pour calculer le montant total (intérêts et capital) est $C_n = C_0(1+t)^n$, où C_0 est le capital de départ, C_n est le montant total après n années et t est le taux d'intérêts annuels.

Ici, on a $C_0 = 5'000$, $t = 4\% = 0{,}04$ et $n = 12$ années.

Le montant total est donc $C_n = 5000 \cdot (1+0{,}04)^{12} = \underline{8005{,}16 \text{ frs}}$.

Exercice 8

La situation est similaire à un amortissement. On a $A_n = A_0(1-t)^n$, où A_0 est le nombre de départ, A_n le nombre après n années et t le taux de diminution annuel.

Ici, on a $A_0 = 350$ et $t = 8\% = 0{,}08$.

On obtient donc la forme $A_n = 350(1-0{,}08)^n = 350 \cdot 0{,}92^n$.

Avec $n=5$, on a $A_n = 350 \cdot 0{,}92^5 \cong$ 231 élans restants.

Avec $n=8$, on a $A_n = 350 \cdot 0{,}92^8 \cong$ 180 élans restants.

Avec $n=12$, on a $A_n = 350 \cdot 0{,}92^{12} \cong$ 129 élans restants.

Exercice 9

On a $q(t) = 10 \cdot 0{,}8^t$, où t est en minutes.

Avec $t = 5$ min, on obtient $q(t) = 10 \cdot 0{,}8^5 \cong \underline{3{,}28 \text{ grammes}}$.

Si 80% du sel est dissous, il reste 20% non dissous, soit 20% de 10g = 2g.

On doit donc avoir $2 = 10 \cdot 0{,}8^t \quad : 10$

$$0{,}2 = 0{,}8^t \qquad \Big| \qquad a = b^x \Longrightarrow x = \frac{\log(a)}{\log(b)}$$

$$t = \frac{\log(0{,}2)}{\log(0{,}8)}$$

$$\Longrightarrow t = \underline{7{,}21 \text{ min} = 7 \text{min } 12{,}75 \text{ s}}$$

Exercice 10

Par définition, on a $y = \log_a x \iff a^y = x$.

$y = \log_{10} 1 \Rightarrow 10^y = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \log_{10} 1 = 0.$

$y = \log_{10} 1000 \Rightarrow 10^y = 1000 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow \log_{10} 1000 = 3.$

$y = \log_{10} 10^7 \Rightarrow 10^y = 10^7 \Rightarrow y = 7 \Rightarrow \log_{10} 10^7 = 7.$

$y = \log_{10} \frac{1}{10} \Rightarrow 10^y = \frac{1}{10} = 10^{-1} \Rightarrow y = -1 \Rightarrow \log_{10} \frac{1}{10} = -1.$

$y = \log_{10} \frac{1}{\sqrt[4]{10}} \Rightarrow 10^y = \frac{1}{\sqrt[4]{10}} = \frac{1}{(10)^{1/4}} = 10^{-\frac{1}{4}} \Rightarrow y = -\frac{1}{4} \Rightarrow \log_{10} \frac{1}{\sqrt[4]{10}} = -\frac{1}{4}.$

$y = \log_{10} \sqrt[3]{100} \Rightarrow 10^y = \sqrt[3]{100} = (100)^{\frac{1}{3}} = (10^2)^{\frac{1}{3}} = 10^{\frac{2}{3}} \Rightarrow y = \frac{2}{3} \Rightarrow \log_{10} \sqrt[3]{100} = \frac{2}{3}.$

Exercice 11

Par définition, on a $y = \log_a x \iff a^y = x$.

$y = \log_2 8 \Rightarrow 2^y = 8 = 2^3 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow \log_2 8 = 3.$

$y = \log_2 64 \Rightarrow 2^y = 64 = 2^6 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow \log_2 64 = 6.$

$y = \log_2 1024 \Rightarrow 2^y = 1024 = 2^{10} \Rightarrow y = 10 \Rightarrow \log_2 1024 = 10.$

$y = \log_2 \frac{1}{512} \Rightarrow 2^y = \frac{1}{512} = \frac{1}{2^9} = 2^{-9} \Rightarrow y = -9 \Rightarrow \log_2 \frac{1}{512} = -9.$

$y = \log_3 729 \Rightarrow 3^y = 729 = 3^6 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow \log_3 729 = 6.$

$y = \log_3 \sqrt[4]{3} \Rightarrow 3^y = \sqrt[4]{3} = 3^{1/4} \Rightarrow y = \frac{1}{4} \Rightarrow \log_3 \sqrt[4]{3} = \frac{1}{4}.$

$y = \log_{10}(-1000) \Rightarrow 10^y = -1000$ impossible $\Rightarrow \log_{10}(-1000)$ n'existe pas.

$y = \log_2 \sqrt[5]{8} \Rightarrow 2^y = \sqrt[5]{8} = 8^{1/5} = (2^3)^{1/5} = 2^{3/5} \Rightarrow y = \frac{3}{5} \Rightarrow \log_2 \sqrt[5]{8} = \frac{3}{5}.$

$y = \log_3 \sqrt[4]{27} \Rightarrow 3^y = \sqrt[4]{27} = 27^{1/4} = (3^3)^{1/4} = 3^{3/4} \Rightarrow y = \frac{3}{4} \Rightarrow \log_3 \sqrt[4]{27} = \frac{3}{4}.$

$y = \log_4 \sqrt[5]{64} \Rightarrow 4^y = \sqrt[5]{64} = 64^{1/5} = (4^3)^{1/5} = 4^{3/5} \Rightarrow y = \frac{3}{5} \Rightarrow \log_4 \sqrt[5]{64} = \frac{3}{5}.$

$y = \log_{11} 11^{-\frac{4}{5}} \Rightarrow 11^y = 11^{-\frac{4}{5}} \Rightarrow y = -\frac{4}{5} \Rightarrow \log_{11} 11^{-\frac{4}{5}} = -\frac{4}{5}.$

$y = \log_4 \sqrt[3]{16} \Rightarrow 4^y = \sqrt[3]{16} = 16^{1/3} = (4^2)^{1/3} = 4^{2/3} \Rightarrow y = \frac{2}{3} \Rightarrow \log_4 \sqrt[3]{16} = \frac{2}{3}.$

$y = \log_2 \frac{1}{\sqrt[3]{32}} \Rightarrow 2^y = \frac{1}{\sqrt[3]{32}} = \frac{1}{32^{1/3}} = 32^{-1/3} = (2^5)^{-1/3} = 2^{-5/3} \Rightarrow y = -\frac{5}{3}$

$\Rightarrow \log_2 \frac{1}{\sqrt[3]{32}} = -\frac{5}{3}.$

$y = \log_4 0 \Rightarrow 4^y = 0$ impossible $\Rightarrow \log_4 0$ n'existe pas.

Exercice 12

On a $y = \log_a x \Rightarrow x = a^y$

$x = \log_2 32 \Rightarrow 2^x = 32 = 2^5 \Rightarrow \underline{x = 5.}$

$x = \log_5 125 \Rightarrow 5^x = 125 = 5^3 \Rightarrow \underline{x = 3.}$

$\log_{11} x = 4 \Rightarrow \underline{x = 11^4 = 14641.}$

$\log_4 x = 3 \Rightarrow \underline{x = 4^3 = 64.}$

$\log_x 125 = 3 \Rightarrow x^3 = 125 = 5^3 \Rightarrow \underline{x = 5.}$

$\log_x 1000 = 3 \Rightarrow x^3 = 1000 = 10^3 \Rightarrow \underline{x = 10.}$

$\log_4 128 = x \Rightarrow x^4 = 128 = 2^7 \Rightarrow \underline{x = \sqrt[4]{2^7} = 2^{7/4} \cong 3,364.}$

$\log_2 x = 4 \Rightarrow \underline{x = 2^4 = 16.}$

$\log_5 x = 5 \Rightarrow \underline{x = 5^5 = 3125.}$

$8^{\log_8 32} = x \Rightarrow \log_8 32 = \log_8 x \Rightarrow \underline{x = 32.}$

$\log_x 1 = 0 \Rightarrow x^0 = 1 \Rightarrow$ vrai pour toute valeur de $x \Rightarrow \underline{x \in \mathbb{R}.}$

$\log_4 x = -3 \Rightarrow \underline{x = 4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}.}$

$\log_2 x = 0 \Rightarrow x = 2^0 \Rightarrow \underline{x = 1.}$

$\log_{27} 81 = x \Rightarrow 27^x = 81 \Rightarrow (3^3)^x = 3^4 \Rightarrow 3^{3x} = 3^4 \Rightarrow 3x = 4 \Rightarrow \underline{x = \frac{4}{3}.}$

Exercice 13

A démontrer : (1) $\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$, (2) $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$ et
(3) $\log_a x^p = p \cdot \log_a x$.

(1) Notons $y = \log_a u + \log_a v$; on a $a^y = a^{\log_a u + \log_a v} = a^{\log_a u} \cdot a^{\log_a v}$.
Comme $x^{\log_x z} = z$, on obtient $a^y = u \cdot v \Rightarrow y = \log_a(u \cdot v)$.
D'où $\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$.

(2) Notons $y = \log_a u - \log_a v$; on a $a^y = a^{\log_a u - \log_a v} = \frac{a^{\log_a u}}{a^{\log_a v}} = \frac{u}{v}$
$\Rightarrow y = \log_a\left(\frac{u}{v}\right)$.
D'où $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$.

(3) Notons $y = p \log_a(x)$; on a $a^y = a^{p \log_a(x)} = \left(a^{\log_a(x)}\right)^p = x^p \Rightarrow y = \log_a(x^p)$
D'où $\log_a(x^p) = p \log_a(x)$.

CQFD.

Exercice 14

On va utiliser les règles : ① $\log(uv) = \log(u) + \log(v)$, ② $\log\left(\frac{u}{v}\right) = \log(u) - \log(v)$ et ③ $\log(u^n) = n\log(u)$.

$$\log(a^5\cdot\sqrt{b}) \overset{①}{=} \log(a^5) + \log(\sqrt{b}) = \log(a^5) + \log(b^{1/2}) \overset{③}{=} \underline{5\log(a) + \tfrac{1}{2}\log(b)}.$$

$$\log\left(\frac{a^7\cdot b^4}{\sqrt[5]{a^2}\cdot\sqrt[3]{b}}\right) = \log\left(\frac{a^7}{a^{2/5}}\cdot\frac{b^4}{b^{1/3}}\right) = \log\left(a^{7-\frac{2}{5}}\cdot b^{4-\frac{1}{3}}\right) = \log\left(a^{\frac{33}{5}}\cdot b^{\frac{11}{3}}\right) \overset{①}{=}$$
$$= \log\left(a^{\frac{33}{5}}\right) + \log\left(b^{\frac{11}{3}}\right) \overset{③}{=} \underline{\frac{33}{5}\log(a) + \frac{11}{3}\log(b)}.$$

$$\log\left(\frac{a^n\cdot b^{m-4}}{a^{n-2}\cdot b^{m-6}}\right) = \log\left(a^{n-(n-2)}\cdot b^{m-4-(m-6)}\right) = \log\left(a^{n-n+2}\cdot b^{m-4-m+6}\right) =$$
$$= \log(a^2\cdot b^2) \overset{①}{=} \log(a^2) + \log(b^2) \overset{③}{=} \underline{2\log(a) + 2\log(b)}.$$

$$\log\left(\frac{\sqrt[6]{a^2\cdot b^7}}{\sqrt{a}\cdot b^4}\right) = \log\left(\frac{(a^2\cdot b^7)^{1/6}}{a^{1/2}\,b^4}\right) = \log\left(\frac{a^{2/6}\cdot b^{7/6}}{a^{1/2}\cdot b^4}\right) = \log\left(\frac{a^{1/3}\cdot b^{7/6}}{a^{1/2}\cdot b^4}\right) =$$
$$= \log\left(a^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}\,b^{\frac{7}{6}-4}\right) = \log\left(a^{-\frac{1}{6}}\cdot b^{-\frac{17}{6}}\right) \overset{①}{=} \log\left(a^{-\frac{1}{6}}\right) + \log\left(b^{-\frac{17}{6}}\right) \overset{③}{=}$$
$$= \underline{-\frac{1}{6}\log(a) - \frac{17}{6}\log(b)}.$$

Exercice 15

$$\log_{10}\left(\frac{1000\cdot a^8}{a^2\cdot b^7}\right) = \log_{10}(1000\cdot a^6\cdot b^{-7}) = \log_{10}(1000) + \log_{10}(a^6) + \log_{10}(b^{-7}) =$$
$$= \log_{10}(10^3) + 6\log_{10}a + (-7)\log_{10}b = \underline{3 + 6\log_{10}a - 7\log_{10}b}.$$

$$\log_{10}\left(\frac{(10\cdot a\cdot b)^3}{100\cdot a^4 b^{-4}}\right) = \log_{10}\left(\frac{1000\cdot a^3\cdot b^3}{100\cdot a^4\cdot b^{-4}}\right) = \log_{10}\left(10\cdot a^{3-4}\cdot b^{3-(-4)}\right) =$$
$$= \log_{10}(10\cdot a^{-1}\cdot b^7) = \log_{10}(10) + \log_{10}(a^{-1}) + \log_{10}(b^7) =$$
$$= \underline{1 - \log_{10}a + 7\log_{10}b}.$$

$$\log_{10}\left(\frac{0{,}001\cdot a^8\cdot b^5}{100\cdot a^{-2}\cdot b^3}\right) = \log_{10}\left(0{,}00001\cdot a^{8-(-2)}\cdot b^{5-3}\right) =$$
$$= \log_{10}(10^{-5}\cdot a^{10}\cdot b^2) = \log_{10}(10^{-5}) + \log_{10}(a^{10}) + \log_{10}(b^2) =$$
$$= \underline{-5 + 10\log_{10}(a) + 2\log_{10}(b)}.$$

Exercice 16

On va utiliser que $\log(a)=\log(b) \Leftrightarrow a=b$ (base quelconque).

$\log x = \frac{1}{2}\log 20 - \log 2 = \log(20^{\frac{1}{2}}) - \log(2) = \log(\sqrt{20}) - \log(2) = \log\left(\frac{\sqrt{20}}{2}\right)$

$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{20}}{2} = \frac{\sqrt{4\cdot 5}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \underline{\sqrt{5}.}$

$\log x = \frac{1}{2}\log 9 + \frac{1}{3}\log 8 = \log(9^{1/2}) + \log(8^{1/3}) = \log(\sqrt{9}) + \log(\sqrt[3]{8}) =$

$= \log(3) + \log(2) = \log(3\cdot 2) = \log(6) \Rightarrow \underline{x=6.}$

$\log x = \log\frac{3}{2} - \log\left(\frac{4}{3}\right) + \log\frac{5}{4} = \log\left(\frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{3}}\cdot\frac{5}{4}\right) = \log\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right) = \log\left(\frac{45}{32}\right)$

$\Rightarrow \underline{x = \frac{45}{32}.}$

Exercice 17

On va utiliser que $\log(a)=\log(b) \Leftrightarrow a=b$ (base quelconque).

$\log x = 3\log a + 7\log b = \log(a^3) + \log(b^7) = \log(a^3\cdot b^7) \Rightarrow \underline{x = a^3\cdot b^7.}$

$\log(3x-4) = 2\cdot\log 3 = \log(3^2) = \log(9) \Rightarrow 3x-4=9 \Rightarrow 3x=13$

$\Rightarrow \underline{x = \frac{13}{3}.}$

$\log(x+1) + \log(x+2) = \log(5x+5) \Rightarrow \log[(x+1)(x+2)] = \log(5x+5)$

$\Rightarrow (x+1)(x+2) = 5x+5 \Rightarrow x^2+2x+x+2 = 5x+5$

$\Rightarrow x^2+3x+2 = 5x+5 \Rightarrow x^2-2x-3=0$

$\Rightarrow x = \frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{2\pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}.$

Pour $x=-1$, on ne peut ni calculer $\log(-1+1)=\log(0)$, ni $\log(5(-1)+5) = \log(0)$. La solution est donc $\underline{x=3}$.

Exercice 18

$\log x = 1 + \log 6 = \log(10) + \log(6) = \log(10 \cdot 6) = \log(60) \Rightarrow \underline{x = 60.}$

$\log(3x+1) = 3 = \log(10^3) = \log(1000) \Rightarrow 3x+1 = 1000 \Rightarrow 3x = 999 \Rightarrow \underline{x = 333.}$

$\log x = \frac{1}{2} - \log 5 - \log 8 = \log(10^{\frac{1}{2}}) - \log 5 - \log 8 = \log(\sqrt{10}) - \log 5 - \log 8 =$

$= \log\left(\frac{\sqrt{10}}{5 \cdot 8}\right) = \log\left(\frac{\sqrt{10}}{40}\right) \Rightarrow \underline{x = \frac{\sqrt{10}}{40}.}$

$\log 2x = 2 \log x + 1 = \log(x^2) + \log(10) = \log(10x^2) \Rightarrow 2x = 10x^2$

$\Rightarrow 10x^2 - 2x = 0 \Rightarrow 2x(5x-1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $5x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{5}.$

Comme $\log x$ et $\log 2x$ n'existe pas en $x = 0$, la solution est $\underline{x = \frac{1}{5}.}$

Exercice 19

On a $\log_{10} 5894 \cong 3{,}77.$

$\log_{10} 589400000 = \log_{10}(5894 \cdot 100000) = \log_{10} 5894 + \log_{10} 100000 \cong 3{,}77 + \log_{10}(10^5)$

$= 3{,}77 + 5 = \underline{8{,}77.}$

$\log_{10} 58{,}94 = \log_{10} \frac{5894}{100} = \log_{10} 5894 - \log_{10} 100 \cong 3{,}77 - \log_{10} 10^2 = 3{,}77 - 2 =$

$= \underline{1{,}77.}$

$\log_{10} \sqrt{5{,}894} = \log_{10}(5{,}894^{1/2}) = \frac{1}{2} \log_{10} 5{,}894 = \frac{1}{2} \log_{10} \frac{5894}{1000} =$

$= \frac{1}{2}(\log_{10} 5894 - \log_{10} 1000) \cong \frac{1}{2}(3{,}77 - \log_{10} 10^3) = \frac{1}{2}(3{,}77 - 3) = \frac{1}{2} \cdot 0{,}77 = \underline{0{,}385.}$

Exercice 20

$\log_7 200 = \frac{\log 200}{\log 7} \cong \frac{2{,}3}{0{,}85} \cong \underline{2{,}72.}$

$\log_{5,1} 34{,}7 = \frac{\log 34{,}7}{\log 5{,}1} \cong \frac{1{,}54}{0{,}71} \cong \underline{2{,}18.}$

$\log_{25} 125 = \frac{\log 125}{\log 25} \cong \frac{2{,}1}{1{,}4} = \underline{1{,}5.}$

$\log_{49} 2401 = \frac{\log 2401}{\log 49} \cong \frac{3{,}38}{1{,}69} = \underline{2.}$

Exercice 21

$\ln e = \log_e e^1 = \underline{1.}$

$\ln 1 = \log_e e^0 = \underline{0.}$

$\ln \sqrt{e^{15}} = \ln\left((e^{15})^{1/2}\right) = \ln\left(e^{\frac{15}{2}}\right) = \log_e\left(e^{\frac{15}{2}}\right) = \underline{\frac{15}{2}}.$

$\ln \frac{1}{\sqrt{e^9}} = \ln \frac{1}{(e^9)^{1/2}} = \ln \frac{1}{e^{9/2}} = \ln\left(e^{-9/2}\right) = \log_e\left(e^{-9/2}\right) = \underline{-\frac{9}{2}}.$

Exercice 22

On a $a^x = b \Longleftrightarrow x = \log_a(b)$.

Ainsi $\ln(b) = \ln(a^x) = x\ln(a) \Rightarrow x = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$ et

$\log_{10}(b) = \log_{10}(a^x) = x\log_{10}(a) \Rightarrow x = \frac{\log_{10}(b)}{\log_{10}(a)}.$

On a donc bien $x = \frac{\ln(b)}{\ln(a)} = \frac{\log_{10}(b)}{\log_{10}(a)}$.

$2{,}76^x = 12'000 \Rightarrow x = \frac{\ln(12'000)}{\ln(2{,}76)} \cong \underline{9{,}25} \quad \left(\cong \frac{\log(12'000)}{\log(2{,}76)}\right).$

$47{,}3^x = 8653{,}37 \Rightarrow x = \frac{\ln(8653{,}37)}{\ln(47{,}3)} \cong \underline{2{,}35} \quad \left(\cong \frac{\log(8653{,}37)}{\log(47{,}3)}\right).$

$100 \cdot 3^x = 5000 \Rightarrow 3^x = 50 \Rightarrow x = \frac{\ln(50)}{\ln(3)} \cong \underline{3{,}56} \quad \left(\cong \frac{\log(50)}{\log(3)}\right).$

Exercice 23

N_0 est le nombre initial de cellules.
$N(1)$ correspond à $2 \cdot N_0$ puisque une cellule se subdivise en 2 nouvelles cellules par unité de temps.
Similairement, on a $N(2) = 2 \cdot N(1) = 2 \cdot 2 N_0 = 2^2 N_0$, $N(3) = 2 \cdot N(2) = 2 \cdot 2^2 N_0 =$
$= 2^3 N_0$ et $\underline{N(t) = 2^t \cdot N_0.}$

Avec $N_0 = 200$, on obtient $N(t) = 2^t \cdot 200$.
Cherchons t pour que $N(t) = 10^9$.
On doit résoudre $2^t \cdot 200 = 10^9 \Rightarrow 2^t = 5'000'000 \Rightarrow t = \dfrac{\log(5'000'000)}{\log(2)} \cong 22,25$.

Ainsi, il faudra <u>23 unités de temps.</u>

Exercice 24

Comme on a des intérêts cumulés (composés), on a $\underline{C(n) = C(1+t)^n}$.

Avec $C = 3500$, $t = 4,5\% = 0,045$ et $n = 20$, on a $C(20) = 3500(1+0,045)^{20} =$
$\cong$ <u>8471 frs.</u>

Exercice 25

On a des intérêts composés et la formule $C(n) = C_0(1+t)^n$, où C_0 est le capital de départ, t le taux d'intérêts, n le nombre d'années et $C(t)$ le capital total après t années.
Ici $C_0 = 1000$ et $t = 5,75\% = 0,0575$.
On a donc $C(n) = 1000 \cdot (1+0,0575)^t = 1000 \cdot 1,0575^t$.

Avec $C(n) = 12'000$, on a $12'000 = 1000 \cdot 1,0575^t \Rightarrow 12 = 1,0575^t$
$\Rightarrow t = \dfrac{\log(12)}{\log(1,0575)} \cong 44,46$.
Il faut donc <u>45 ans pour atteindre 12'000.–</u>

Avec $C(n) = 10'000$, on a $10'000 = 1000 \cdot 1,0575^t \Rightarrow 10 = 1,0575^t$
$\Rightarrow t = \dfrac{\log(10)}{\log(1,0575)} \cong 41,19$.
Il faut donc <u>42 ans pour atteindre 10'000.–</u>

Exercice 26

On a des intérêts composés et la formule $C(n) = C_0(1+t)^n$, où C_0 est le capital de départ, t le taux d'intérêts, n le nombre d'années.
On a ici $t = 3,8\% = 0,038$, d'où $C(n) = C_0(1+0,038)^n = C_0 \cdot 1,038^n$.

Capital doublé : $C(n) = 2C_0 \Rightarrow 2C_0 = C_0 \cdot 1,038^n \Rightarrow 2 = 1,038^n$

$$\Rightarrow n = \frac{\log(2)}{\log(1,038)} \cong 18,6 \Rightarrow \text{après 19 ans.}$$

Capital triplé : $C(n) = 3C_0 \Rightarrow 3C_0 = C_0 \cdot 1,038^n \Rightarrow 3 = 1,038^n$

$$\Rightarrow n = \frac{\log(3)}{\log(1,038)} \cong 29,5 \Rightarrow \text{après 30 ans.}$$

Capital quadruplé : $C(n) = 4C_0 \Rightarrow 4C_0 = C_0 \cdot 1,038^n \Rightarrow 4 = 1,038^n$

$$\Rightarrow n = \frac{\log(4)}{\log(1,038)} \cong 37,2 \Rightarrow \text{après 38 ans.}$$

Exercice 27

On a $V(t) = V_0 e^{0,03t}$ avec t en années.

a) On a $V_0 = 400'000$ et $t = 7 \Rightarrow V(t) = 400'000 \cdot e^{0,03 \cdot 7} = \underline{493'471,12 \text{ frs.}}$

b) $V(t) = 650'000.- \Rightarrow 650'000 = 400'000\, e^{0,03t} \Rightarrow 1,625 = e^{0,03t}$

$\Rightarrow 0,03t = \ln(1,625) \Rightarrow 0,03t = 0,4855 \Rightarrow t = 16,18$

$\Rightarrow$ dans 17 ans à partir de l'achat $\Rightarrow$ dans 10 ans à partir de maintenant.

Exercice 28

Une fonction exponentielle est de la forme $N(t) = N_0 e^{kt}$, où N_0 est le nombre de départ, t le nb d'années et $N(t)$ est le nombre après t années. k est un nombre à déterminer.

Si $t = 5$, on a $N_0 = 2800$ et $N(5) = 5160 \Rightarrow 5160 = 2800\, e^{k \cdot 5} \Rightarrow 1,843 = e^{k \cdot 5}$

$\Rightarrow k \cdot 5 = \ln(1,843) = 0,611 \Rightarrow k = 0,122.$

On cherche maintenant $N(t)$ avec $t = 10 + 5 = 15$ ans (depuis les 2800).

On a $N(t) = N_0 e^{kt} = 2800 \cdot e^{0,122 \cdot 15} = 2800\, e^{1,844} = 2800 \cdot 6,259 =$
$\cong \underline{17524 \text{ chiens.}}$

Exercice 29

La situation s'apparente ici à un amortissement et suit la formule $N(n) = N_0(1-t)^n$, où N_0 est le nombre de départ, t le taux de diminution annuelle, n le nombre d'années et $N(n)$ le nombre après n années.

On a ici $N_0 = 35'000$, $t = 8\% = 0{,}08$ et $N(t) = 15'000$.

On obtient $15'000 = 35'000 \cdot (1-0{,}08)^n \Rightarrow 15'000 = 35'000 \cdot 0{,}92^n \Rightarrow 0{,}4286 = 0{,}92^n$

$\Rightarrow n = \dfrac{\log(0{,}4286)}{\log(0{,}92)} \cong 10{,}162.$

Cela se produira donc <u>dans 11 ans.</u>

Exercice 30

On a $P(t) = 1 - e^{-0{,}31t}$, où t est en jours.

Si $t = 0$, on a $P(0) = 1 - e^0 = 1 - 1 = 0$.

Si t devient très grand, on a $P(t) \cong 1 - 0 = 1$.

Ainsi $P(t)$ indique en fait la proportion de gens informés.

On cherche donc t tel que $P(t) = 95\% = 0{,}95$.

On a donc $0{,}95 = 1 - e^{-0{,}31t} \Rightarrow -0{,}05 = -e^{-0{,}31t} \Rightarrow 0{,}05 = e^{-0{,}31t}$

$\Rightarrow \ln(0{,}05) = -0{,}31t \Rightarrow t = \dfrac{\ln(0{,}05)}{-0{,}31} \cong 9{,}664.$

Il faudra donc <u>10 jours.</u>

Exercice 31

a) Le taux de variation t correspondra au taux des intérêts composés ou des amortissements.

<u>Ville A:</u> on a $A(n) = A_0(1+t)^n$; en $n=0$, on a $A_0 = 3000$ et, en $n = 10$, on a $A(10) = 5000$; on obtient $5000 = 3000(1+t)^{10} \Rightarrow 1{,}\overline{6} = (1+t)^{10}$

$\Rightarrow 1+t = 1{,}0524 \Rightarrow t = 0{,}0524 =$ <u>$5{,}24\%$ d'augmentation par année.</u>

<u>Ville B:</u> on a $B(n) = B_0(1-t)^n$; en $n=0$, on a $B_0 = 6000$ et, en $n=10$, on a $B(10) = 4000$; on obtient $4000 = 6000(1-t)^{10} \Rightarrow 0{,}\overline{6} = (1-t)^{10} \Rightarrow 1-t \cong 0{,}9603$

$\Rightarrow t \cong 1 - 0{,}9603 = 0{,}0397 =$ <u>$3{,}97\%$ de diminution par année.</u>

b) $A(n) = B(n) \Rightarrow 3000(1+0{,}0524)^n = 6000(1-0{,}0397)^n$

$\Rightarrow 3000 \cdot 1{,}0524^n = 6000 \cdot 0{,}9603^n \Rightarrow \dfrac{3000}{6000} = \dfrac{0{,}9603^n}{1{,}0524^n}$

$\Rightarrow 0{,}5 = \left(\dfrac{0{,}9603}{1{,}0524}\right)^n \Rightarrow 0{,}5 = 0{,}91245^n$

$\Rightarrow n = \dfrac{\log(0{,}5)}{\log(0{,}91245)} \cong 7{,}57$ années

Cela se produira donc en $1990 + 8 =$ <u>1998.</u>

Exercice 32

a) Le taux de variation t correspondra au taux des intérêts composés ou des amortissements.

FEDERALPHONE : On a $F(n) = F_0(1-t)^n$; en $n=0$, on a $F_0 = 12'212'000$ et, en $n=5$, on a $F(5) = 8'962'000$; on obtient

$8'962'000 = 12'212'000\,(1-t)^5 \Rightarrow 0{,}7339 = (1-t)^5$

$\Rightarrow 1-t = 0{,}94 \Rightarrow t = 1-0{,}94 = 0{,}06 = \underline{6\%\text{ de diminution par année}}$.

MOONRISE : On a $M(n) = N_0(1+t)^n$; en $n=0$, on a $N_0 = 4'500'000$ et, en $n=5$, on a $M(5) = 6'924'000$; on obtient

$6'924'000 = 4'500'000\,(1+t)^5 \Rightarrow 1{,}5387 = (1+t)^5$

$\Rightarrow 1+t = 1{,}09 \Rightarrow t = 0{,}09 = \underline{9\%\text{ d'augmentation par année}}$.

b) $F(n) = M(n) \Rightarrow 12'212'000\,(1-0{,}06)^n = 4'500'000\,(1+0{,}09)^n$

$\Rightarrow 12'212'000 \cdot 0{,}94^n = 4'500'000 \cdot 1{,}09^n$

$\Rightarrow \dfrac{12'212'000}{4'500'000} = \dfrac{1{,}09^n}{0{,}94^n} \Rightarrow 2{,}7138 = \left(\dfrac{1{,}09}{0{,}94}\right)^n$

$\Rightarrow 2{,}7138 = 1{,}16^n \Rightarrow n = \dfrac{\log(2{,}7138)}{\log(1{,}16)} = 6{,}74$ années.

On peut donc s'attendre à ce que cela se produise en $2000 + 7 = \underline{2007}$.

Exercice 33

a) Pour Mercedes, on a $V(n) = V_0(1-t)^n$, où $t = 11\% = 0{,}11$, $n = 6$ ans, $V(6) = 41'880$.

On obtient $41880 = V_0(1-0{,}11)^6 \Rightarrow 41880 = V_0 \cdot 0{,}497 \Rightarrow V_0 = \underline{84'269.-}$

b) Pour Peugeot, on a $W(n) = W_0(1-t)^n$, où $n = 6$ ans, $W_0 = 52'000$ et $W(t) = 31'530$.

On obtient $31'530 = 52'000\,(1-t)^6 \Rightarrow 0{,}606 = (1-t)^6 \Rightarrow 1-t \cong 0{,}92$

$\Rightarrow t \cong 1-0{,}92 = 0{,}08 = \underline{8\%}$.

c) $V(n) = W(n) \Rightarrow 84'269\,(1-0{,}11)^n = 52'000\,(1-0{,}08)^n$

$\Rightarrow 84'269 \cdot 0{,}89^n = 52'000 \cdot 0{,}92^n \Rightarrow \dfrac{84'269}{52'000} = \dfrac{0{,}92^n}{0{,}89^n}$

$\Rightarrow 1{,}6206 = \left(\dfrac{0{,}92}{0{,}89}\right)^n \Rightarrow 1{,}6206 = 1{,}0337^n \Rightarrow n = \dfrac{\log(1{,}0337)}{\log(1{,}6206)} \cong 14{,}56$.

Cela se produira donc dans $15 - 6 = \underline{9\text{ ans}}$.

Exercice 34

a) Le taux annuel de croissance correspondra au taux des intérêts composés.

On a $N(n) = N_o(1+t)^n$, où N_o est le nombre au départ, t le taux de croissance, n le nombre d'années et $N(n)$ le nombre après n années.

Ici, on a $N_o = 2'985'399$, $n = 5$, $N(5) = 3'229'169$ et on cherche t.

On a alors $3'229'169 = 2'985'399(1+t)^5 \Rightarrow 1{,}08165 = (1+t)^5$

$\Rightarrow 1+t \cong 1{,}0158 \Rightarrow t = 0{,}0158 = \underline{1{,}58\,\%}$.

b) Avec $n = 10$ pour l'an 2000, on a $N(10) = N_o(1+t)^n = 2'985'399 \cdot (1+0{,}0158)^{10}$
$\cong \underline{3'493'000 \text{ véhicules}}$.

c) Avec $N(n) = 5'000'000$, on a $N(n) = N_o(1+t)^n \Rightarrow$

$5'000'000 = 2'985'399(1+0{,}0158)^n \Rightarrow 1{,}67485 = 1{,}0158^n$

$\Rightarrow n = \dfrac{\log(1{,}67485)}{\log(1{,}0158)} \cong 32{,}85$ années.

Ça sera donc en $1990 + 33 = \underline{2023}$.

Exercice 35

On a $V(t) = 2600\left(1 - 0{,}51 \cdot e^{-0{,}075t}\right)^3$ avec t en heures.

a) Le montant de la mise initiale est $V(0)$: $V(0) = 2600(1 - 0{,}51 \cdot e^0)^3 =$

$= 2600(1-0{,}51)^3 = 2600 \cdot 0{,}49^3 \cong \underline{305{,}88}$.

b) $V(t) = 1800 \Rightarrow 1800 = 2600(1 - 0{,}51 \cdot e^{-0{,}075t})^3$

$\Rightarrow 0{,}6923 = (1 - 0{,}51 \cdot e^{-0{,}075t})^3 \Rightarrow 0{,}8846 = 1 - 0{,}51 \cdot e^{-0{,}075t}$

$\Rightarrow 0{,}51 \cdot e^{-0{,}075t} = 0{,}1154 \Rightarrow e^{-0{,}075t} = 0{,}2262$

$\Rightarrow -0{,}075t = \ln(0{,}2262) = -1{,}486 \Rightarrow \underline{t \cong 19{,}8 \text{ heures}}$.

Exercice 36

On a $A(t) = \dfrac{36}{1+200e^{-0,2t}}$ avec t en heures et A(t) en milliers de personnes.

a) Avec t = 10 h, on a $A(10) = \dfrac{36}{1+200e^{-0,2\cdot10}} \cong$ 1,28 milliers de personnes.

b) Avec A(t) = 15 milliers, on a $15 = \dfrac{36}{1+200e^{-0,2t}}$

$\Rightarrow 15\cdot(1+200e^{-0,2t}) = 36 \Rightarrow 1+200e^{-0,2t} = 2,4$

$\Rightarrow 200e^{-0,2t} = 1,4 \Rightarrow e^{-0,2t} = 0,007$

$\Rightarrow -0,2t = \ln(0,007) = -4,96 \Rightarrow t \cong$ 24,8 heures.

Exercice 37

On a $N(t) = \dfrac{13}{1+16\cdot2,5^{-0,36t}}$ avec t en semaines et N(t) en milliers.

a) Avec t = 7 semaines, on a $N(7) = \dfrac{13}{1+16\cdot2,5^{-0,36\cdot7}} \cong$ 5,02 milliers.

b) Avec N(t) = 6,5 milliers, on a $6,7 = \dfrac{13}{1+16\cdot2,5^{-0,36t}}$

$\Rightarrow 6,7(1+16\cdot2,5^{-0,36t}) = 13 \Rightarrow 1+16\cdot2,5^{-0,36t} = 1,94$

$\Rightarrow 16\cdot2,5^{-0,36t} = 0,94 \Rightarrow 2,5^{-0,36t} = 0,059$

$\Rightarrow -0,36t = \dfrac{\log(0,059)}{\log(2,5)} = -3,093 \Rightarrow t \cong$ 8,6 semaines.

c) A long terme signifie que t va vers l'infini.
Si t est très grand, on a $2,5^{-0,36t} \cong 0$ et, donc,

$N(t) = \dfrac{13}{1+16\cdot0} = \dfrac{13}{1} =$ 13 milliers.

Exercice 08

a) Le taux annuel de croissance correspond au taux des intérêts composés.

Assurmed: On a $N_1(n) = N_{0_1}(1+t)^n$, où N_{0_1} est la prime en 2000 (début), t le taux de croissance, n le nombre d'années depuis 2000 et $N_1(n)$ la prime après n années.

Ici $N_{0_1} = 172$, $n = 11$ et $N_1(11) = 264,80$.

On a donc $264,8 = 172(1+t)^{11} \Rightarrow (1+t)^{11} = 1,54 \Rightarrow 1+t = 1,04$

$\Rightarrow t = 0,04 = \underline{4\%}$.

Visante: On a $N_2(n) = N_{0_2}(1+t)^n$, où N_{0_2} est la prime en 2000 (début), t le taux de croissance, n le nombre d'années depuis 2000 et $N_2(n)$ la prime après n années.

Ici $N_{0_2} = 131$, $n = 11$ et $N_2(11) = 236,05$.

On a donc $236,05 = 131(1+t)^{11} \Rightarrow (1+t)^{11} = 1,802 \Rightarrow 1+t = 1,055$

$\Rightarrow t = 0,055 = \underline{5,5\%}$.

b) Pour 2008, on a $n = 8$.

Assurmed: $N_1(8) = N_{0_1}(1+t)^8 = 172 \cdot (1+0,04)^8 \cong \underline{235,40}$.

Visante: $N_2(8) = N_{0_2}(1+t)^8 = 131 \cdot (1+0,055)^8 \cong \underline{201,04}$.

c) On cherche n pour lequel les 2 primes sont égales: $N_{0_1}(n) = N_{0_2}(n)$

$\Rightarrow 172(1+0,04)^n = 131 \cdot (1+0,055)^n \Rightarrow \frac{172}{131} = \frac{1,055^n}{1,04^n}$

$\Rightarrow 1,313 = \left(\frac{1,055}{1,04}\right)^n \Rightarrow 1,313 = 1,0144^n$

$\Rightarrow n = \frac{\log(1,313)}{\log(1,0144)} \cong 19,02$

Cela sera donc dès $\underline{2020}$.

Exercice 39

On a $N(t) = \dfrac{800 \cdot e^{0,26t}}{399 + e^{0,26t}}$, avec $N(t)$ en milliers et t en mois.

a) En $t = 0$, on a $N(t) = \dfrac{800 \cdot e^{0}}{399 + e^{0}} = \dfrac{800 \cdot 1}{399 + 1} = \dfrac{800}{400} = 2 \Rightarrow$ 2000 abonnés.

b) En $t = 15$, on a $N(t) = \dfrac{800 \cdot e^{0,26 \cdot 15}}{399 + e^{0,26 \cdot 15}} = \dfrac{800 \cdot e^{5,4}}{399 + e^{5,4}} = \dfrac{177125,133}{620,406} = 285,5$

$\Rightarrow$ 285'500 abonnés.

c) On a $N(t) = \dfrac{800 \cdot e^{0,26t}}{399 + e^{0,26t}} = \dfrac{800 \cdot e^{0,26t} \cdot e^{-0,26t}}{(399 + e^{0,26t})\, e^{-0,26t}} = \dfrac{800 \cdot e^{0}}{399 \cdot e^{-0,26t} + e^{0}} =$

$= \dfrac{800}{399 \cdot e^{-0,26t} + 1}$.

Lorsque t devient très grand, $e^{-0,26t}$ et donc $399 \cdot e^{-0,26t}$ tend vers 0.

Ainsi $N(t)$ tend vers $\dfrac{800}{1} = 800$, c'est-à-dire 800'000 abonnés.

d) $N(t) = 625 \Rightarrow \dfrac{800}{1 + 399e^{-0,26t}} = 625 \Rightarrow 800 = 625\left(1 + 399e^{-0,26t}\right)$

$\Rightarrow 800 = 625 + 249375e^{-0,26t} \Rightarrow 175 = 249375\, e^{-0,26t}$

$\Rightarrow 0,0007 = e^{-0,26t} \Rightarrow \ln(0,0007) = -0,26t$

$\Rightarrow -7,262 = -0,26t \Rightarrow t = 20,17$

Donc, dès 21 mois.

Exercice 40

a) Pour le chiffre d'affaires (en augmentation), on a $C(t) = C_0(1+i)^t$, où C_0 est le chiffre d'affaires de base, i est le taux d'augmentation, t le nombre d'années depuis 2000 et $C(t)$ est le chiffre d'affaires après t années.

Ici, $C_0 = 244$, $t = 10$, $C(10) = 416{,}79$ et on cherche i.

On obtient $416{,}79 = 244(1+i)^{10} \Rightarrow (1+i)^{10} = 1{,}708 \Rightarrow 1+i = 1{,}055$

$\Rightarrow i = 0{,}055 =$ 5,5% d'augmentation annuelle pour le chiffre d'affaires.

Pour l'effectif du personnel (en baisse), on a $P(t) = P_0(1-i)^t$, où P_0 est l'effectif du personnel en 2000, i est le taux de baisse, t le nombre d'années depuis 2000 et $P(t)$ l'effectif du personnel après t années.

Ici, $P_0 = 705$, $t = 10$, $P(10) = 520$ et on cherche i.

On obtient $520 = 705(1-i)^{10} \Rightarrow (1-i)^{10} = 0{,}738 \Rightarrow 1-i = 0{,}97$

$\Rightarrow i = 0{,}03 =$ 3% de baisse annuel pour l'effectif du personnel.

b) Cela signifie que chaque employé (EPT) produit 0,346 millions de francs, soit 346'000.–.

c) On a $C(t) = C_0(1+i)^t = 244(1+0{,}055)^t = 244 \cdot 1{,}055^t$ et

$P(t) = P_0(1-i)^t = 705(1-0{,}03)^t = 705 \cdot 0{,}97^t$.

On a alors $E(t) = \dfrac{C(t)}{P(t)} = \dfrac{244 \cdot 1{,}055^t}{705 \cdot 0{,}97^t} = \dfrac{244}{705} \cdot \left(\dfrac{1{,}055}{0{,}97}\right)^t = 0{,}346 \cdot 1{,}0876^t =$

$= 0{,}346 \cdot (1+0{,}0876)^t$.

Cela signifie que le taux annuel de croissance de l'indicateur est $0{,}0876 =$ 8,76%.

Exercice 41

On a $P(t) = \dfrac{1}{1{,}25 + 7 \cdot e^{-0{,}06t}}$ où t est en mois.

a) Avec $t = 30$, on a $P(30) = \dfrac{1}{1{,}25 + 7 \cdot e^{-0{,}06 \cdot 30}} \cong 0{,}4154 = \underline{41{,}54\,\%}$.

b) $P(t) = 50\% = 0{,}5 \Rightarrow 0{,}5 = \dfrac{1}{1{,}25 + 7 \cdot e^{-0{,}06t}} \Rightarrow 0{,}5\left(1{,}25 + 7 \cdot e^{-0{,}06t}\right) = 1$

$\Rightarrow 0{,}625 + 3{,}5\,e^{-0{,}06t} = 1 \Rightarrow 3{,}5 \cdot e^{-0{,}06t} = 0{,}375 \Rightarrow e^{-0{,}06t} \cong 0{,}107$

$\Rightarrow -0{,}06t \cong \ln(0{,}107) = -2{,}234 \Rightarrow t \cong 37{,}22$.

Ça sera donc <u>dès le 38e mois</u>.

c) Si t devient très grand, $e^{-0{,}06t}$ va vers 0 et donc $P(t)$ va vers $\dfrac{1}{1{,}25} = 0{,}8$
$= \underline{80\%}$.

Exercice 42

a) On utilise la formule des intérêts composés : $C(t) = C_0(1+i)^t$.
Après 3 ans, on a $C(3) = 25'000\,(1 + 0{,}0225)^3 = 25'000 \cdot 1{,}0225^3$.
Après les 4 ans suivants, on a $C(7) = C(3)\,(1 + 0{,}03)^4 = 25'000 \cdot 1{,}0225^3 \cdot 1{,}03^4$.
Après les 5 dernières années, on a $C(12) = C(7)(1 + 0{,}018)^5 = 25'000 \cdot 1{,}0225^3 \cdot 1{,}03^4 \cdot 1{,}018^5$
$\cong \underline{32'886{,}50}$.

b) On utilise $C(t) = C_0(1+i)^t$ où $C_0 = 25'000$, $t = 12$, $C(12) = 32'886{,}5$ et on cherche i.
On a donc $32'886{,}5 = 25'000\,(1+i)^{12} \Rightarrow (1+i)^{12} = 1{,}3155 \Rightarrow 1+i = 1{,}023$
$\Rightarrow i = 0{,}0231 \quad \underline{2{,}31\%}$.

Exercice 43

a) Les taux annuels de croissance correspondent au taux des intérêts composés.

Malaisie : On a $M(t) = M_0(1+i)^t$ où M_0 est la production en 2000, i le taux de croissance, t le nombre d'années depuis 2000 et $M(t)$ la production après t années.

On a $M_0 = 53,03$, $t = 5$ ans, $M(5) = 60$ et on cherche i.

On obtient $60 = 53,03\,(1+i)^5 \Rightarrow (1+i)^5 \cong 1,131$

$\Rightarrow 1+i \cong 1,025 \Rightarrow i \cong 0,025 = \underline{2,5\,\%}$.

Turkménistan : On a $T(t) = T_0(1+i)^t$ où T_0 est la production en 2000, i le taux de croissance, t le nombre d'années depuis 2000 et $T(t)$ la production après t années.

On a $T_0 = 47,43$, $t = 5$ ans, $T(5) = 57,02$ et on cherche i.

On obtient $57,02 = 47,43(1+i)^5 \Rightarrow (1+i)^5 \cong 1,202$

$\Rightarrow 1+i \cong 1,0375 \Rightarrow i \cong 0,0375 = \underline{3,75\%}$.

b) En 2007, c'est-à-dire $t = 7$, on a :

Malaisie : $M(7) = M_0(1+i)^7 = 53,03 \cdot (1+0,025)^7 \cong \underline{63,04 \text{ Gm}^3}$.

Turkménistan : $T(7) = T_0(1+i)^7 = 47,43 \cdot (1+0,0375)^7 \cong \underline{61,37 \text{ Gm}^3}$.

c) $M(t) = T(t) \Rightarrow 53,03(1+0,025)^t = 47,43 \cdot (1+0,0375)^t$

$$\Rightarrow \frac{53,03}{47,43} = \frac{1,0375^t}{1,025^t} \Rightarrow 1,1185 = \left(\frac{1,0375}{1,025}\right)^t$$

$$\Rightarrow 1,1185 = 1,0122^t \Rightarrow t = \frac{\log(1,1185)}{\log(1,0122)} \cong 9,24$$

Ça sera donc $\underline{\text{en 2010}}$.

Exercice 44

On a $P(t) = \dfrac{1}{1{,}5 + 8 \cdot e^{-0{,}02t}}$, avec t en mois.

a) Avec $t = 50$, on a $P(50) = \dfrac{1}{1{,}5 + 8 \cdot e^{-0{,}02 \cdot 50}} \cong 0{,}2251 = \underline{22{,}51\%}$.

b) On veut $P(t) = 50\% = 0{,}5$. On a alors $0{,}5 = \dfrac{1}{1{,}5 + 8e^{-0{,}02 \cdot t}} \Rightarrow 0{,}5(1{,}5 + 8e^{-0{,}02t}) = 1$

$\Rightarrow 1{,}5 + 8e^{-0{,}02t} = 2 \Rightarrow 8e^{-0{,}02t} = 0{,}5 \Rightarrow e^{-0{,}02t} = 0{,}0625$

$\Rightarrow -0{,}02t = \ln(0{,}0625) \cong -2{,}773 \Rightarrow t = 138{,}63$.

Ça sera donc après <u>139 mois.</u>

c) Lorsque $t \to +\infty$, on a $e^{-0{,}02 \cdot t} \to 0$ et, donc $P(t) \to \dfrac{1}{1{,}5 + 8 \cdot 0} = \dfrac{1}{1{,}5}$
$\cong 0{,}6667 = \underline{66{,}67\%}$.

Exercice 45

On a $N(t) = \dfrac{40'500}{45 + 2\ln(t)^2}$, avec t en semaines.

a) Avec $t = 15$, on a $N(15) = \dfrac{40'500}{45 + 2\ln(15)^2} \cong 678{,}77 \Rightarrow \underline{678}$.

b) On veut $N(t) = 500$. On a alors $500 = \dfrac{40'500}{45 + 2\ln(t)^2}$

$\Rightarrow 500(45 + 2\ln(t)^2) = 40'500 \Rightarrow 45 + 2\ln(t)^2 = 81$

$\Rightarrow 2\ln(t)^2 = 36 \Rightarrow \ln(t)^2 = 18 \Rightarrow \ln(t) \cong 4{,}24$

$\Rightarrow t \cong e^{4{,}24} \cong 69{,}59$.

Ça sera donc après <u>70 semaines.</u>

Exercice 46

On a la formule des intérêts composés : $C(t) = C_0(1+i)^t$, où $C_0 = 45'000$ est le capital de départ, $i = 2{,}24\% = 0{,}0224$ est le taux d'intérêts et $C(t) = 61362{,}65$ est le capital après t années.

On a ainsi $61362{,}65 = 45'000\,(1 + 0{,}0224)^t \Rightarrow 1{,}3636 = 1{,}0224^t$

$\Rightarrow t = \dfrac{\log(1{,}3636)}{\log(1{,}0224)} \cong \underline{14 \text{ ans}}$.

Exercice 47

On a $A = \frac{t}{1-\left(\frac{1}{1+t}\right)^n} \cdot D$, où A est l'annuité annuelle en francs, D la dette, t le taux d'intérêt annuel et n le nombre d'années.

a) Ici $D = 60'000$, $n = 6$, $t = 4{,}5\% = 0{,}045$.

Alors $A = \frac{0{,}045}{1-\left(\frac{1}{1+0{,}045}\right)^6} \cdot 60'000 = \underline{11'632{,}70}$.

b) Ici $A = 9411{,}9$, $D = 72435$, $t = 4{,}5\% = 0{,}045$.

On a alors $9411{,}9 = \frac{0{,}045}{1-\left(\frac{1}{1+0{,}045}\right)^n} \cdot 72'435$

$$\Rightarrow 0{,}13 \cong \frac{0{,}045}{1-\left(\frac{1}{1{,}045}\right)^n} \Rightarrow 0{,}13\left(1-\left(\frac{1}{1{,}045}\right)^n\right) \cong 0{,}045$$

$$\Rightarrow 1-\left(\frac{1}{1{,}045}\right)^n \cong 0{,}346 \Rightarrow \left(\frac{1}{1{,}045}\right)^n \cong 1-0{,}346 = 0{,}654$$

$$\Rightarrow n \cong \frac{\log(0{,}654)}{\log\left(\frac{1}{1{,}045}\right)} \cong 9{,}66 \Rightarrow \underline{10 \text{ ans}}.$$