# MATHÉMATIQUES 1 : partie 2

# FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMES

Maxime Zuber, Dr ès sciences

Haute École de Gestion Arc, septembre 2013

## 1 Puissances et racines

### 1.1 Rappels

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $a^n$ comme étant le produit $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ facteurs}}$ et on lit « $a$ puissance $n$ ». On appelle $a$ la **base** et $n$ l'**exposant**. Cette définition s'étend à des exposants non entiers grâce aux règles suivantes.

| | |
|---|---|
| $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ | $(a^n)^m = a^{nm}$ |
| $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ | $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ | $a^0 = 1$ | $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$ | $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ |

| | |
|---|---|
| $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ | $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$ |
| $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$ | $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$ |

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ pour } a > 0}$$

Si $n = 2$, on écrit simplement $\sqrt{a}$ et on lit **racine carrée** de $a$. Par exemple, $\sqrt{4} = 2$ est l'unique nombre positif dont le carré est égal à 4.

**Exercice 1** Simplifier autant que possible les expressions suivantes

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a^4 \cdot a^{28}$ | $x^{25} \cdot x^{-14}$ | $u^{-22} \cdot u^7$ | $t^{x-4} \cdot t^{6-x}$ |
| $b^{4n-7} \cdot b^{-n+7}$ | $\dfrac{h^{-4}}{h^{-7}}$ | $\dfrac{n^0}{n^{-5}}$ | $\dfrac{z^5}{z^{3-6n}}$ |
| $\dfrac{(-a)^{17}}{(-a)^{15}}$ | $\dfrac{C^x}{C}$ | $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{-x}}$ | $\dfrac{54a^3x^5y^{10}}{18a^{-4}xy^8}$ |

**Exercice 2** Idem pour les expressions suivantes

$$(-2a)^5 \qquad (-x^6)^4 \qquad \frac{(-10x)^6}{(-100x)^3} \qquad \left(ab^0c^{-3}\right)^{-n}$$

$$(-3x^4)^3 \qquad (a^{-3}b^5)^3 \qquad (a^5b^{-8}x)^{-4} \qquad \frac{(-a)^{4n+3}}{(-a^n)^4}$$

$$\frac{(4a^3b^7)^5}{8(a^2b^3)^2} \qquad \frac{(2x^2)^{1/2}}{\sqrt[6]{8}\cdot x^{-1}} \qquad \left(\frac{a^5}{b^6}\right)^{-4} \qquad \left(\frac{a^4b^{-4}}{c^7}\right)^3$$

**Exercice 3** Mettre sous la forme d'une puissance.

$$\sqrt[4]{27} \qquad \sqrt[3]{a^n} \qquad \frac{x^4}{\sqrt[5]{x^7}} \qquad \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt[4]{b^8} \qquad \left(\sqrt[5]{a^6}\right)^{15} \qquad \frac{1}{\sqrt[n]{a^{2n^2-n}}} \qquad \left(\sqrt{x^4}\right)^{2n}$$

$$\sqrt[2n-1]{a^{4n-2}} \qquad \left(\sqrt[n]{a^p}\right)^{n\cdot m} \qquad \sqrt{x^{8n}} \qquad \frac{\left(\sqrt{x^3}\right)^{4n}}{((x^n)^3)^2}$$

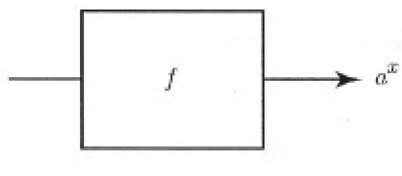
## 2 Introduction et définitions

Les fonctions *exponentielles* et les fonctions *logarithmes* sont d'une importance considérable en mathématiques et elles trouvent des applications innombrables dans tous les domaines de l'investigation humaine. Elles se révèlent particulièrement utiles dans les domaines de l'économie, de la médecine, de la chimie, de la biologie de la physique et des sciences de l'ingénieur, où elles contribuent à décrire la croissance ou la décroissance de certaines grandeurs naturelles.

### 2.1 Fonctions exponentielles

Étant donné un nombre réel strictement positif $a \neq 1$ fixé, on appelle *fonction exponentielle de base* $a$, la fonction

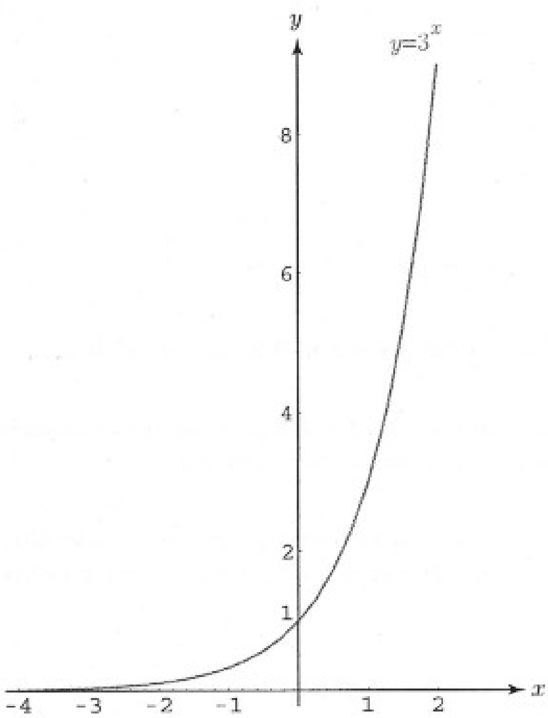
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \\ x &\longmapsto f(x) = a^x. \end{aligned}$$

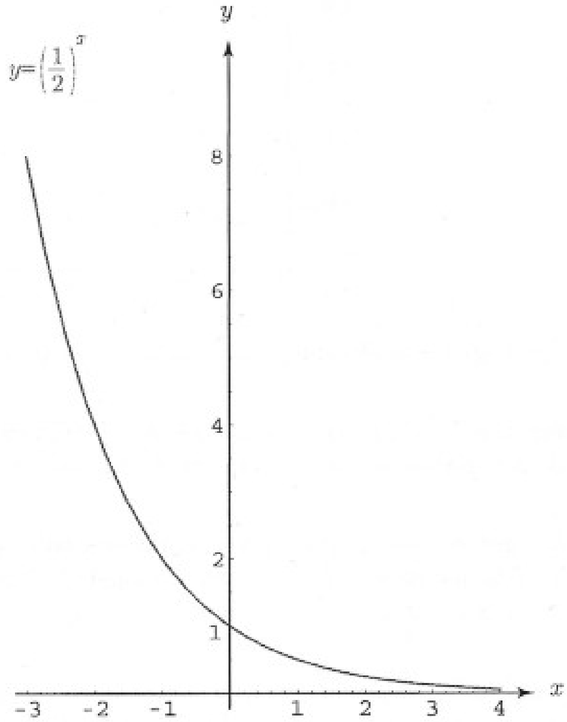



qui, à tout nombre réel $x$, fait correspondre le nombre $a^x$.

**Remarques** Les graphiques suivants correspondent aux cas $a = 3$ et $a = \frac{1}{2}$. Notons qu'on exclut $a < 0$, car $a^x$ ne serait alors pas défini pour tout $x$ réel. En effet, si $a = -4$ et $x = \frac{1}{2}$, par exemple, alors $a^x = \sqrt{-4}$ n'existe pas. On exclut également $a = 1$ qui conduit à la fonction constante

$f(x) = 1^x = 1$ dont la courbe représentative est la droite horizontale $y = 1$.




Si $a > 1$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. On a les résultats inverses pour $a < 1$.

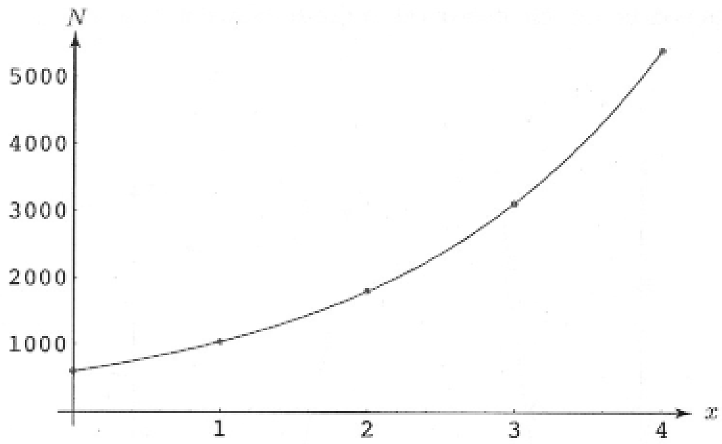
**Exercice 4** Une fonction exponentielle $f$ définie par $f(x) = a^x$ est représentée par une courbe $\mathcal{C}$. Déterminer la valeur de $a$ si l'on sait que le point $P(3; 10{,}648)$ est sur $\mathcal{C}$.

**Exercice 5** Résoudre les équations exponentielles suivantes

$$\begin{aligned} 7^{x+6} &= 7^{3x-4} && (1)\\ 3^{5x-8} &= 9^{x+2}; && (2)\\ 3^{2x+3} &= 3^{(x^2)} && (3)\\ 2^{-100x} &= 0{,}5^{x-4} && (4)\\ \left(\frac{1}{5}\right)^{6-x} &= 5. && (5) \end{aligned}$$

**Exercice 6** Le nombre de bactéries dans une culture croît de 600 à 1800 entre 7 h et 9 h du matin. L'effectif de la population bactérienne $N(t)$ en fonction du temps $t$ (temps qui s'écoule dès 7 h) est donné par la formule exponentielle

$$N(t) = 600 \cdot 3^{t/2}.$$




Donner approximativement le nombre de bactéries dans la culture à 8 h, 9 h, 10 h et 11 h.

**Exercice 7** On place un capital $C = 5'000$ Frs au taux annuel fixe $t = 4\%$ pendant $n = 12$ années. Calculer le montant total (intérêts et capital) en banque au terme de cette période.

**Exercice 8** Une population de 350 élans, tous âgés d'un an, est introduite dans une réserve naturelle. Chaque année, 8% de l'effectif disparaît. Donner le nombre approximatif d'animaux survivant après 5, 8 et 12 ans.

**Exercice 9** Si 10 g de sel sont ajoutés à une quantité d'eau, alors la part $q(t)$ de sel qui reste non dissoute après $t$ minutes est donnée par la formule

$$q(t) = 10 \cdot 0{,}8^t.$$

Quelle part subsiste-t-il après 5 minutes ? Estimer le temps qu'il faut pour que 80% du sel soit dissous.

## 2.2 Logarithmes

Soit $a \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$ ; on appelle *logarithme* en base $a$ d'un nombre $x \in \mathbb{R}_{>0}$, *l'exposant* qu'il faut donner à $a$ pour obtenir $x$ ; on le note $\log_a x$. Ainsi, on a

$$\boxed{y = \log_a x \quad \Longleftrightarrow \quad a^y = x.}$$

### Conséquences de la définition

Les relations suivantes découlent immédiatement de la définition.

$$\boxed{\log_a a = 1 \qquad \log_a 1 = 0 \qquad \log_a a^x = x \qquad a^{\log_a x} = x}$$

**Exercice 10** Calculer

$$\begin{aligned} \log_{10} 1 &= \ldots & \log_{10} \tfrac{1}{10} &= \ldots \\ \log_{10} 1000 &= \ldots & \log_{10} \tfrac{1}{\sqrt[4]{10}} &= \ldots \\ \log_{10} 10^7 &= \ldots & \log_{10} \sqrt[3]{100} &= \ldots \end{aligned}$$

**Exercice 11** Calculer

$$
\begin{array}{llll}
\log_2 8 & = \ldots & \log_2 \sqrt[5]{8} & = \ldots \\
\log_2 64 & = \ldots & \log_3 \sqrt[4]{27} & = \ldots \\
\log_2 1024 & = \ldots & \log_4 \sqrt[5]{64} & = \ldots \\
\log_2 \frac{1}{512} & = \ldots & \log_{11} 11^{-\frac{4}{5}} & = \ldots \\
\log_3 729 & = \ldots & \log_4 \sqrt[3]{16} & = \ldots \\
\log_3 \sqrt[4]{3} & = \ldots & \log_2 \frac{1}{\sqrt[3]{32}} & = \ldots \\
\log_{10}(-1000) & = \ldots & \log_4 0 & = \ldots
\end{array}
$$

**Exercice 12** Résoudre les équations suivantes

$$
\begin{array}{llllll}
x & = & \log_2 32 & \log_2 x & = & 4 \\
x & = & \log_5 125 & \log_5 x & = & 5 \\
\log_{11} x & = & 4 & 8^{\log_8 32} & = & x \\
\log_4 x & = & 3 & \log_x 1 & = & 0 \\
\log_x 125 & = & 3 & \log_4 x & = & -3 \\
\log_x 1000 & = & 3 & \log_2 x & = & 0 \\
\log_4 128 & = & x & \log_{27} 81 & = & x.
\end{array}
$$

## 2.3 Fonctions logarithmes

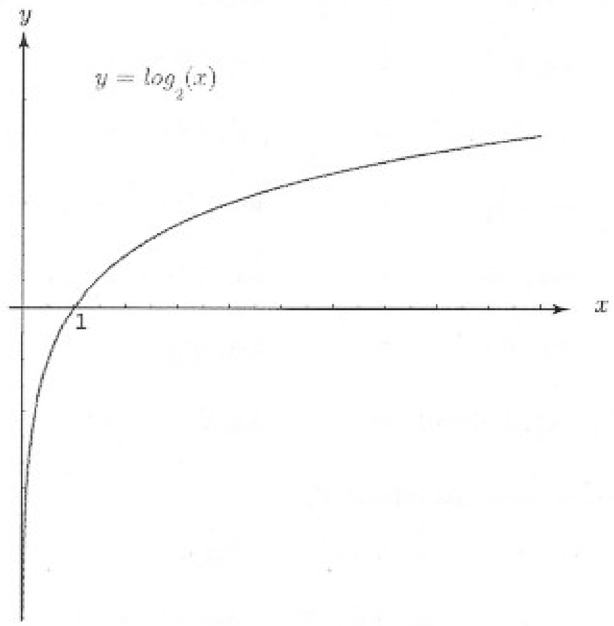
On appelle *fonction logarithme de base* $a \in \mathbb{R}_{>0}$, la fonction $f$ qui, à tout $x$ strictement positif, fait correspondre $\log_a x$.

$$
\begin{array}{rcl}
f : \mathbb{R}_{>0} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
x & \longmapsto & f(x) = \log_a(x).
\end{array}
$$

Considérons le cas particulier $a = 2$ et la fonction correspondante $f(x) = \log_2(x)$.

$$
\begin{array}{rcl}
x & \longmapsto & f(x) \\
 & & \\
2 & \longmapsto & 1 \\
4 & \longmapsto & 2 \\
8 & \longmapsto & 3 \\
16 & \longmapsto & 4 \\
1 & \longmapsto & 0 \\
1/2 & \longmapsto & -1 \\
1/4 & \longmapsto & -2 \\
1/8 & \longmapsto & -3
\end{array}
$$

Le graphique ci-dessous représente la courbe correspondante $y = \log_2(x)$.




Notons que

$$\lim_{x \to 0} \log_2(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to \infty} \log_2(x) = \infty$$

## 3 Propriétés fondamentales des logarithmes

Pour tous $u$, $v$, $x \in \mathbb{R}_{>0}$ et pour tout $p \in \mathbb{R}$, les relations suivantes sont vérifiées.

### 3.1 Propriétés algébriques

– **Logarithme d'un produit**

$$\boxed{\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v}$$

– **Logarithme d'un quotient**

$$\boxed{\log_a \left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v}$$

– **Logarithme d'une puissance**

$$\boxed{\log_a x^p = p \cdot \log_a x}$$

**Exercice 13** Démontrer les trois propriétés précédentes.

**Exercice 14** Mettre sous la forme $\alpha \cdot \log a + \beta \cdot \log b$ les logarithmes suivants (base quelconque)

$$\log\left(a^5 \cdot \sqrt{b}\right) \qquad \log\left(\frac{a^7 \cdot b^4}{\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt[3]{b}}\right) \qquad \log\left(\frac{a^n \cdot b^{m-4}}{a^{n-2} \cdot b^{m-6}}\right) \qquad \log\left(\frac{\sqrt[6]{a^2 \cdot b^7}}{\sqrt{a} \cdot b^4}\right)$$

**Exercice 15** Mettre sous la forme $\alpha \cdot \log a + \beta \cdot \log b + \gamma$ les logarithmes suivants

$$\log_{10}\left(\frac{1000 \cdot a^8}{a^2 \cdot b^7}\right) \qquad \log_{10}\left(\frac{(10 \cdot a \cdot b)^3}{100a^4b^{-4}}\right) \qquad \log_{10}\left(\frac{0{,}001 \cdot a^8 \cdot b^5}{100 \cdot a^{-2} \cdot b^3}\right)$$

**Remarque** Pour résoudre une équation logarithmique, on utilisera les faits suivants. Il est clair que si $\clubsuit = \blacksquare$, alors $\log_a(\clubsuit) = \log_a(\blacksquare)$. La réciproque est vraie, c'est-à-dire que si $\log_a(\clubsuit) = \log_a(\blacksquare)$, alors $\clubsuit = \blacksquare$. Autrement dit, on a l'équivalence suivante

$$\boxed{\clubsuit = \blacksquare \qquad \Longleftrightarrow \qquad \log_a(\clubsuit) = \log_a(\blacksquare)}$$

**Exercice 16** Résoudre les équations suivantes (base quelconque)

$$\begin{aligned} \log x &= \frac{1}{2} \cdot \log 20 - \log 2 \\ \log x &= \frac{1}{2} \cdot \log 9 + \frac{1}{3} \cdot \log 8 \\ \log x &= \log \frac{3}{2} - \log \frac{4}{3} + \log \frac{5}{4} \end{aligned}$$

**Exercice 17** Résoudre les équations suivantes (base quelconque)

$$\begin{aligned} \log x &= 3 \cdot \log a + 7 \cdot \log b \\ \log(3x - 4) &= 2 \cdot \log 3 \\ \log(x+1) + \log(x+2) &= \log(5x+5) \end{aligned}$$

**Exercice 18** Résoudre les équations logarithmiques suivantes en base 10. Ici $\log x := \log_{10} x$.

$$\begin{aligned} \log x &= 1 + \log 6 \\ \log(3x+1) &= 3 \\ \log x &= \frac{1}{2} - \log 5 - \log 8 \\ \log 2x &= 2 \cdot \log x + 1 \end{aligned}$$

**Exercice 19** Que valent les nombres suivants si $\log_{10} 5894 \cong 3{,}77$

$$\log_{10} 589400000 \qquad \log_{10} 58{,}94 \qquad \log_{10} \sqrt{5{,}894}$$

### 3.2 Changement de base

Soit $\log_a x$ le logarithme du nombre $x$ dans la base $a$ ; on choisit une nouvelle base $n$ et on cherche à calculer $\log_n x$. Quelle relation existe-t-il entre les deux logarithmes $\log_a x$ et $\log_n x$ ?

Posons $y = \log_n x$, alors $x = n^y$

calculons alors

$$\log_a x = \log_a n^y = y \cdot \log_a n = \log_n x \cdot \log_a n.$$

On obtient ainsi la *formule du changement de base*

$$\boxed{\log_n x = \frac{\log_a x}{\log_a n}}$$

À l'aide de cette formule, il est possible de déterminer le logarithme d'un nombre dans n'importe quelle base à l'aide de la touche $\log_{10}$ de la calculette

$$\boxed{\log_n x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} n}}$$

**Exercice 20** Calculer

$$\log_7 200 \qquad \log_{5,1} 34{,}7 \qquad \log_{25} 125 \qquad \log_{49} 2401$$

## 4 Le nombre d'Euler

Sur un compte offrant un taux d'intérêt annuel de 100%, on place un franc pendant une année. Après une année, le montant sur ce compte s'élève à

$$S(1) = 2 = (1+1) \cdot 1.$$

Si ce compte avait offert un taux de 50% (deux fois moins) tous les six mois (demi-année), alors on aurait obtenu après une année un montant égal à

$$S(2) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25.$$

Imaginons que ce compte produise tous les mois (un douzième d'année) un taux douze fois moindre. On aurait alors obtenu

$$S(12) = \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} \cong 2{,}613.$$

Un taux hebdomadaire de $\frac{100\%}{52}$ donnerait

$$S(52) = \left(1 + \frac{1}{52}\right)^{52} \cong 2{,}693.$$

Avec un taux quotidien de $\frac{100\%}{365}$ donnerait

$$S(365) = \left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} \cong 2{,}714.$$

Sur $n$ périodes au cours d'une année, un taux de $\frac{100\%}{n}$ conduit à un montant

$$S(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

On s'intéresse aux valeurs que prend $S(n)$ quand $n$ devient très grand. On observe ainsi que

$$\begin{aligned}
S(1000) &= 2{,}71692393224 \\
S(10'000) &= 2{,}71814592683 \\
S(10^5) &= 2{,}71826823717 \\
S(10^6) &= 2{,}71828046932 \\
S(10^7) &= 2{,}71828169255 \\
S(10^8) &= 2{,}71828181487 \\
S(10^9) &= 2{,}71828182710.
\end{aligned}$$

On peut démontrer que la suite des valeurs de $S(n)$ possède une limite lorsque $n$ tend vers l'infini. Cette limite est, par définition, le nombre $e$ d'Euler [1].

$$\boxed{e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281828459045\ldots}$$

## 4.1 Logarithme naturel

Le *logarithme naturel* ou *logarithme népérien*[2] du nombre $x$ est le logarithme en base $e$ de $x$ ; on note

$$\boxed{\ln x := \log_e x}$$

**Exercice 21** Calculer

$$\ln e \qquad \ln 1 \qquad \ln \sqrt{e}^{15} \qquad \ln \frac{1}{\sqrt{e^9}}$$

**Exercice 22** Montrer que *l'équation exponentielle* $a^x = b$ a pour solution

$$x = \frac{\ln b}{\ln a} = \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a}.$$

Résoudre ensuite

$$2{,}76^x = 12000 \qquad 47{,}3^x = 8653{,}37 \qquad 100 \cdot 3^x = 5000$$

# 5 Applications

**Exercic 23** Dans des conditions idéales, une cellule se subdivise en deux nouvelles cellules une fois atteint un certain âge (que l'on choisira comme unité de temps). Soit $N_0$ le nombre initial de cellules et $N(t)$ le nombre de cellules après $t$ unités de temps. Calculer $N(1)$, $N(2)$ et plus généralement $N(t)$. Si $N_0 = 200$, combien de temps faut-il pour que le nombre de cellules dépasse $10^9$ ?

**Exercice 24** On place un capital $C$ au taux d'intérêt annuel fixe $t$. Calculer le capital $C(n)$ (intérêts cumulés) au terme de $n$ années de placement. Calculer $C(20)$ dans le cas particulier où $C = 3500$, $t = 4{,}5\%$.

[1] Ce nombre, appelé $e$ par Euler, est probablement, après $\pi$, la constante mathématique la plus célèbre. Hermite démontra, en 1873, que ce nombre est *irrationnel transcendant*.

[2] De John Neper ou Napier, mathématicien écossais (1550-1617).

**Exercice 25** Combien d'années faut-il pour qu'une somme de 1000 Frs placée au taux d'intérêt annuel fixe de 5,75 % produise un capital de 12000 Frs ? Après combien d'années le capital dépassera-t-il le montant de 10000 francs ?

**Exercice 26** En combien d'années un capital placé au taux de 3,8 % aura-t-il doublé, triplé, quadruplé sa valeur ?

**Exercice 27** La valeur $V$ des maisons unifamiliales en fonction du temps $t$ s'exprime par la relation $V(t) = V_0 e^{0,03t}$ (temps $t$ exprimé en années).

**a)** Que vaut aujourd'hui une maison payée 400000 frs il y a 7 ans ?

**b)** Dans combien d'années, cette même maison vaudra-t-elle 650000 francs ?

**Exercice 28** Un biologiste sait que la population canine d'une ville croît selon une fonction exponentielle. Une enquête faite il y a cinq ans montre qu'il y avait alors 2800 chiens. Aujourd'hui, on en compte 5160 et on demande combien de chiens peupleront cette ville dans dix ans.

**Exercice 29** Une revue compte 35000 abonnés mais en perd chaque année 8%. La revue devra cesser de paraître lorsqu'il restera moins de 15000 abonnés. Si la tendance se maintient, dans combien d'années cela se produira-t-il ?

**Exercice 30** Après $t$ jours de diffusion d'une annonce publicitaire, on observe que la population informée suit la fonction $P(t) = 1 - e^{-0,31t}$. Combien de jours faut-il publier l'annonce si l'on veut que 95% de la population soit informée ?

**Exercice 31** Entre 1990 et 2000, la population de la ville A a passé de 3000 à 5000 habitants. Durant la même période, celle de la ville B a passé de 6000 à 4000 habitants. On se fonde sur l'hypothèse que l'évolution démographique de ces deux villes est exponentielle.

**a)** Déterminer, en %, les taux de variation de ces deux populations.

**b)** En quelle année, la population de la ville A a-t-elle dépassé celle de la ville B ?

**Exercice 32** Établi de longue date, *FEDERALPHONE*, un opérateur de téléphonie mobile en mains de l'État, a vu sa clientèle passer de 12212000 abonnés en l'an 2000 à 8962000 abonnés en 2005. Entré sur le marché à la fin des années nonante, le groupe *MOONRISE* a, quant à lui, augmenté l'effectif de ses clients de 4500000 à 6924000 durant la même période.

**a)** Déterminer, en %, le taux de variation annuel de la clientèle de chacune de ces sociétés.

**b)** En quelle année doit-on s'attendre à ce que le nombre de clients de *MOONRISE* dépasse l'effectif des abonnés de *FEDERALPHONE*?

**Exercice 33** Il y a 6 ans, une entreprise de taxi a acquis deux véhicules : une voiture de tourisme de marque *Mercedes* et un bus *Peugeot*.

**a)** Il est établi que le véhicule *Mercedes* perd 11% de sa valeur chaque année. Aujourd'hui ce véhicule est vendu 41880 francs, ce qui correspond à sa valeur du marché. Quel était le prix à neuf de cette voiture ?

**b)** Le bus *Peugeot* avait été acheté pour le prix de 52000 francs, alors que sa valeur actuelle est de 31530 francs. Quel est le taux de dévaluation annuel de ce véhicule.

**c)** Dans combien d'années, ces deux véhicules auront-ils la même valeur ?

**Exercice 34** En 1990, on a recensé 2985399 voitures de tourisme immatriculées en Suisse (y compris les véhicules de la Confédération mais sans les véhicules militaires). En 1995, ce chiffre s'élevait à 3229169. On suppose que la croissance du nombre de véhicules peut être approchée par une fonction exponentielle.

**a)** Calculer le taux annuel de croissance du nombre de voitures de tourisme immatriculées en Suisse entre 1990 et 1995.

**b)** Estimer, à mille véhicules près, le nombre de voitures qui seront recensées en l'an 2000.

**c)** Déterminer dans le courant de quelle année dépassera-t-on, à ce rythme, le seuil de 5 millions de véhicules.

**Exercice 35** Un bien est mis aux enchères sur un site Internet spécialisé dans la vente en ligne. La valeur $V(t)$ (en CHF) de ce bien en fonction du temps $t$ (en h) peut être décrite par l'expression

$$V(t) = 2600\left(1 - 0{,}51 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}075t}\right)^3.$$

**a)** Quel était le montant de la mise initiale ?

**b)** A quel moment la valeur de ce bien dépassera-t-elle 1800 CHF ?

**Exercice 36** Un Etat-major de conduite en cas de catastrophe a établi un modèle qui simule la dispersion d'une information (annonce d'une catastrophe) au sein de la population d'une ville. Le nombre $A(t)$ de personnes alarmées (en milliers) en fonction du temps $t$ (en heures) est donné par une équation dite *logistique* de la forme

$$A(t) = \frac{36}{1 + 200\mathrm{e}^{-0{,}2t}}.$$

**a)** Combien de personnes disposeront de l'information 10 heures après la première annonce ?

**b)** Après quelle durée 15000 personnes seront-elles alarmées ?

**Exercice 37** Afin d'apporter un soutien populaire et politique au maintien et au développement d'une ligne ferroviaire, un groupe de personnalités lance une pétition en ligne. Le nombre $N(t)$ de signatures enregistrées sur le site de ce comité en fonction du temps $t$ est approximativement décrit par l'expression

$$N(t) = \frac{13}{1 + 16 \cdot 2{,}5^{-0{,}36t}}$$

dans laquelle $t$ est exprimé en semaines et $N(t)$ en milliers.

**a)** De combien de signatures cette pétition sera-t-elle revêtue 7 semaines après son lancement ?

**b)** Après quelle durée, les initiateurs pourront-ils compter sur 6500 signatures ?

**c)** Dans ces conditions, combien de personnes auront signé cette pétition à long terme ?

**Exercice 38** Comme le montre le tableau ci-dessous, pour le même assuré-modèle, les primes de l'assurance-maladie auprès des deux caisses *Assurmed* et *Visante* ont évolué de manière exponentielle entre 2000 et 2011.

| | **2000** | **2011** |
|---|---|---|
| *Assurmed* | 172,00 | 264,80 |
| *Visante* | 131,00 | 236,05 |

Les primes mensuelles sont exprimées en CHF.

**a)** Quels ont été, sur cette période, les taux de croissance respectifs des primes de cet assuré-modèle auprès des deux caisses ?

**b)** Quels étaient les montants respectifs des primes en 2008 ?

**c)** À partir de quelle année la caisse *Assurmed* sera-t-elle la plus avantageuse ?

**Exercice 39** Un nouvel opérateur de téléphonie mobile entré sur le marché examine l'évolution de sa clientèle. Il constate que le nombre $N(t)$ (en milliers) de ses abonnés en fonction du temps $t$ (en mois) suit une courbe représentant la fonction définie par

$$N(t) = \frac{800 \cdot \mathrm{e}^{0{,}36 \cdot t}}{399 + \mathrm{e}^{0{,}36 \cdot t}}$$

**a)** Combien d'abonnés comptait cet opérateur au début des observations ?

**b)** Combien en compte-t-il après 15 mois ?

**c)** Par une opération algébrique simple, démontrer que $N(t)$ s'écrit aussi

$$N(t) = \frac{800}{1 + 399 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}36 \cdot t}}.$$

En déduire le nombre vers lequel l'effectif des abonnés tendra à très long terme.

**d)** À l'aide de cette dernière formule, déterminer à quel moment l'effectif des abonnés dépassera le seuil de 625 mille.

**Exercice 40** Le tableau ci-dessous présente l'évolution du chiffre d'affaires (en millions de francs) et du personnel (en EPT : Équivalents Pleins Temps) d'une entreprise active dans le domaine de la machine-outil entre l'année 2000 et l'année 2010.

| | 2000 | 2010 |
|---|---|---|
| Chiffres d'affaires | 244 | 416,79 |
| Personnel | 705 | 520 |

**a)** Déterminer les taux annuels de croissance, respectivement de décroissance, du chiffre d'affaires $C(t)$ et de l'effectif du personnel $P(t)$ de cette entreprise.

**b)** On définit un indicateur de productivité par le rapport $E(t) = C(t)/P(t)$. En 2000, cet indicateur vaut 0,346. Que signifie ce nombre ?

**c)** Quel est le taux annuel de croissance de cet indicateur ?

**Exercice 41** Dans un groupe de presse, la part $P(t)$ que représentent les produits publicitaires par rapport à l'ensemble des recettes est donnée par la relation suivante

$$P(t) = \frac{1}{1{,}25 + 7 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}06t}}$$

dans laquelle $t$ est exprimé en mois.

**a)** Quelle part représenteront les produits publicitaires après 30 mois ?

**b)** À partir de quand la publicité assurera la moitié des recettes (supérieure à 50%) ?

**c)** Quelle part maximale sera due à long terme à la publicité ?

**Exercice 42** Un montant de 25000 francs est placé sur un compte offrant les conditions suivantes : 2,25% les trois premières années, 3% les quatre années suivantes et 1,8% les 5 dernières années.

**a)** Quel montant se trouvera sur ce compte au terme des 12 années de placement ?

**b)** Quel est le taux moyen de ce placement (le taux constant qui, sur la même période, aurait produit le même intérêt) ?

**Exercice 43** Le tableau ci-dessous présente l'évolution de la production de gaz naturel (en $\mathrm{Gm}^3$) de la Malaisie et du Turkmenistan entre 2000 et 2005. On suppose que les taux d'accroissement annuels des productions sont constants.

| | 2000 | 2005 |
|---|---|---|
| Malaisie | 53,03 | 60,00 |
| Turkmenistan | 47,43 | 57,02 |

**a)** À quels taux annuels respectifs, les productions de ces deux pays croissent-elles ?

**b)** Quelles ont été les productions de ces deux pays en 2007 ?

**c)** En quelle année la production du Turkmenistan dépassera-t-elle celle de la Malaisie ?

**Exercice 44** Les parts de marché $P(t)$ d'une télévision privée progressent selon la relation suivante

$$P(t) = \frac{1}{1{,}5 + 8 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}02t}}$$

($0 \leq P(t) \leq 1$, $t$ en mois).

**a)** Quelle part du marché occupera cette télévision après 50 mois ?

**b)** À partir de quand sa position sera-t-elle dominante (supérieure à 50%) ?

**c)** Quelle part maximale lui sera dévolue à long terme ?

**Exercice 45** Une entreprise décide de mettre sur pied une campagne de publicité au travers d'affiches (format mondial) posées, dans les gares suisses, par une société générale d'affichage. La campagne débute par la pose de 1000 affiches. Chaque semaine qui suit, on retire un certain nombre d'exemplaires de sorte que le nombre $N(t)$ d'affiches qui restent posées $t$ semaines après le lancement de la campagne est donné par

$$N(t) = \frac{40500}{45 + 2\ln(t)^2}$$

**a)** Combien d'affiches resteront posées après 15 semaines ?

**b)** Après combien de semaines le nombre d'affiches visibles sera-t-il inférieur à 500 ?

**Exercice 46** Un capital de 45000 francs est placé à un taux d'intérêt fixe de 2,24%. Quelle est la durée du placement si le capital final en compte se monte à 61362,65 francs ?

**Exercice 47** Pour calculer le montant de l'annuité (montant fixe annuel) $A$ permettant d'amortir une dette $D$ au taux annuel d'intérêt fixe $t$ en $n$ années, on utilise la formule suivante

$$A = \frac{t}{1 - \left(\frac{1}{1+t}\right)^n} \cdot D$$

**a)** Quelle annuité versera un client qui emprunte 60000 francs pour une durée de 6 ans au taux de 4,5% ?

**b)** Sachant que l'annuité à payer est de 9411,90 francs pour rembourser un prêt de 72435 francs au même taux, déterminer la durée de l'amortissement.

## 6 Réponses et corrigés des exercices

**Exercice 1** $a^{32}$, $x^{11}$, $u^{-15}$, $t^2$, $b^{3n}$, $h^3$, $n^5$, $z^{2+6n}$, $a^2$, $C^{x-1}$, $\mathrm{e}^{2x}$, $3a^7x^4y^2$.

**Exercice 2** $-32a^5$, $x^{24}$, $-x^3$, $a^{-n}c^{3n}$, $-27x^{12}$, $a^{-9}b^{15}$, $a^{-20}b^{32}x^{-4}$, $-a^3$, $128a^{11}b^{29}$, $x \cdot |x|$, $a^{-20}b^{24}$, $a^{12}b^{-12}c^{-21}$.

**Exercice 3** $3^{3/4}$, $a^{n/3}$, $x^{13/5}$, $3^{-1/2}$, $b^2$, $a^{18}$, $a^{1-2n}$, $x^{4n}$, $a^2$, $a^{pm}$, $x^{4n}$, 1.

**Exercice 4** On doit avoir $a^3 = 10{,}648$, d'où $a = \sqrt[3]{10{,}648} = 2{,}2$. Il s'agit donc de la fonction $f$ définie par $f(x) = 2{,}2^x$.

**Exercice 5** (1) : $x+6 = 3x-4$, d'où $x = 5$. (2) s'écrit aussi $3^{5x-8} = \left(3^2\right)^{x+2}$ ou $3^{5x-8} = 3^{2x+4}$, d'où $5x-8 = 2x+4$ et donc $x = 4$. (3) : $x^2 = 2x+3$ ou $x^2-2x-3 = 0$ ou encore $(x-3)(x+1) = 0$, d'où $x = -1$ et $x = 3$. (4) s'écrit aussi $2^{-100x} = \left(2^{-1}\right)^{x-4}$ ou $2^{-100x} = 2^{-x+4}$, d'où $-100x = -x+4$ ou $x = -4/99$. (5) s'écrit aussi $\left(5^{-1}\right)^{6-x} = 5^1$ ou $5^{x-6} = 5^1$, d'où $x-6 = 1$ et donc $x = 7$.

**Exercice 6** $N(1) \cong 1039$, $N(2) = 1800$, $N(3) \cong 3117$, $N(4) = 5400$.

**Exercice 7** Si on pose $C(n)$ pour le capital au terme de l'année $n$, alors $C(n) = 1{,}04^n \cdot 5000$. Ainsi $C(12) \cong 8005{,}15$ francs.

**Exercice 8** Le nombre $E(n)$ d'élans au terme de l'année $n$ est donné par la formule $E(n) = 0{,}92^n \cdot 350$. Ainsi $E(5) \cong 230$, $E(8) \cong 179$ et $E(12) \cong 128$.

**Exercice 9** On a $q(5) = 10 \cdot 0{,}8^5 \cong 3{,}28$ g. On cherche $t$ tel que $10 \cdot 0{,}8^t = 2$. Par tâtonnement, on trouve $t = 7$ minutes.

**Exercice 10** $\log_{10} 1 = 0$, $\log_{10} \frac{1}{10} = -1$, $\log_{10} 1000 = 3$, $\log_{10} \frac{1}{\sqrt[4]{10}} = -\frac{1}{4}$, $\log_{10} 10^7 = 7$, $\log_{10} \sqrt[3]{100} = \frac{2}{3}$.

**Exercice 11** $\log_2 8 = 3$, $\log_2 \sqrt[5]{8} = \frac{3}{5}$, $\log_2 64 = 6$, $\log_3 \sqrt[4]{27} = \frac{3}{4}$, $\log_2 1024 = 10$, $\log_4 \sqrt[5]{64} = \frac{3}{5}$, $\log_2 \frac{1}{512} = -9$, $\log_{11} 11^{-\frac{4}{5}} = -\frac{4}{5}$, $\log_3 729 = 6$, $\log_4 \sqrt[3]{16} = \frac{2}{3}$, $\log_3 \sqrt[4]{3} = \frac{1}{4}$, $\log_2 \frac{1}{\sqrt[3]{32}} = -\frac{5}{3}$, $\log_{10}(-1000)$ n'existe pas, $\log_4$ n'existe pas.

**Exercice 12** (1) : $x = \log_2 32 = 5$, (2) : $\log_2 x = 4 \Rightarrow x = 2^4 = 16$, (3) : $x = \log_5 125 = 3$, (4) : $\log_5 x = 5$ $\Rightarrow x = 5^5 = 3125$, (5) : $\log_{11} x = 4 \Rightarrow x = 11^4 = 14641$, $8^{\log_8 32} = x \Rightarrow x = 32$, $\log_4 x = 3, \Rightarrow x = 4^3 = 64$, $\log_x 1 = 0 \Rightarrow$ tout $x \in \mathbb{R}_{>0}$ est solution, $\log_x 125 = 3 \Rightarrow x^3 = 125 \Rightarrow x = 5$, $\log_4 x = -3 \Rightarrow x = 4^{-3} = \frac{1}{64}$, $\log_x 1000 = 3 \Rightarrow x = 10$, $\log_2 x = 0 \Rightarrow x = 1$, $\log_4 128 = x \Rightarrow x = \frac{7}{2}$, $\log_{27} 81 = x \Rightarrow x = \frac{4}{3}$.

**Exercice 13** Posons $t = \log_a u$, $s = \log_a v$ et $r = \log_a x$. **Multiplication :** Comme $u \cdot v = a^t \cdot a^s = a^{s+t}$, on a $\log_a(u \cdot v) = s+t = \log_a u + \log_a v$. **Division :** Comme $\frac{u}{v} = \frac{a^t}{a^s} = a^{t-s}$, on a $\log_a \frac{u}{v} = t-s = \log_a u - \log_a v$. **Puissance :** On a $x^p = (a^r)^p = a^{p \cdot r}$. Ainsi $\log_a x^p = p \cdot r = p \cdot \log_a x$.

**Exercice 14** **(1)** : $\log\left(a^5 \cdot \sqrt{b}\right) = \log a^5 + \log b^{\frac{1}{2}} = 5\log a + \frac{1}{2}\log b$, **(2)** : $\log\left(\frac{a^7b^4}{\sqrt[5]{a^2}\sqrt[3]{b}}\right) = \log\left(a^{\frac{33}{5}}b^{\frac{11}{3}}\right) = \frac{33}{5} \cdot \log a + \frac{11}{3} \cdot \log b$, **(3)** : $\log\left(\frac{a^nb^{m-4}}{a^{n-2}b^{m-6}}\right) = \log\left(a^2b^2\right) = 2\log a + 2\log b$, , **(4)** : $\log\left(\frac{\sqrt[6]{a^2 \cdot b^7}}{\sqrt{a} \cdot b^4}\right) = -\frac{1}{6}\log a - \frac{17}{6}\log b$,

**Exercice 15** **(1)** : $\log_{10}\frac{1000a^8}{a^2b^7} = \log_{10}\frac{1000a^6}{b^7} = 3 + 6\cdot\log_{10}a - 7\cdot\log_{10}b$, **(2)** : $\log_{10}\frac{(10ab)^3}{100a^4b^{-4}} = \log_{10}\frac{1000a^3b^3}{100a^4b^{-4}} = \log_{10}\frac{10b^7}{a} = 1 + 7\cdot\log_{10}b - \log_{10}a$, **(3)** : $\log_{10}\left(\frac{0{,}001\cdot a^8\cdot b^5}{100\cdot a^{-2}\cdot b^3}\right) = \log_{10}\left(10^{-5}\cdot a^{10}\cdot b^2\right) = -5 + 10\log_{10}a + 2\log_{10}b$.

**Exercice 16**

$$\begin{aligned}\log x &= \frac{1}{2}\cdot\log 20 - \log 2\\ \log x &= \log\sqrt{20} - \log 2\\ \log x &= \log\frac{\sqrt{20}}{2}\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $x = \dfrac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$.

$$\begin{aligned}\log x &= \frac{1}{2}\cdot\log 9 + \frac{1}{3}\cdot\log 8\\ \log x &= \log 3 + \log 2\\ \log x &= \log 6\\ x &= 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log x &= \log\frac{3}{2} - \log\frac{4}{3} + \log\frac{5}{4}\\ \log x &= \log\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)\\ \log x &= \log\frac{45}{32}\\ x &= \frac{45}{32}\end{aligned}$$

**Exercice 17**

$$\begin{aligned}\log x &= 3\cdot\log a + 7\cdot\log b\\ \log x &= \log a^3 + \log b^7\\ \log x &= \log a^3b^7\\ x &= a^3b^7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log(3x-4) &= 2\cdot\log 3\\ \log(3x-4) &= \log 9\\ 3x-4 &= 9\\ 3x &= 13\\ x &= \frac{13}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log(x+1) + \log(x+2) &= \log(5x+5)\\ \log\left[(x+1)\cdot(x+2)\right] &= \log(5x+5)\\ x^2+3x+2 &= 5x+5\\ x^2-2x-3 &= 0\\ (x-3)(x+1) &= 0\end{aligned}$$

On en déduit $x = 3$ et $x = -1$ (à rejeter).

**Exercice 18**

$$\begin{aligned}
\log x &= 1 + \log 6\\
\log x &= \log 10 + \log 6\\
\log x &= \log 60\\
x &= 60
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log(3x+1) &= 3\\
\log(3x+1) &= \log 1000\\
3x+1 &= 1000\\
3x &= 999\\
x &= 333
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log x &= \frac{1}{2} - \log 5 - \log 8\\
\log x &= \log\sqrt{10} - \log 40\\
\log x &= \log\frac{\sqrt{10}}{40}\\
x &= \tfrac{\sqrt{10}}{40}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log 2x &= 2\cdot\log x + 1\\
\log 2x &= \log x^2 + \log 10\\
\log 2x &= \log(10x^2)\\
2x - 10x^2 &= 0\\
2x\cdot(1-5x) &= 0
\end{aligned}$$

On trouve ainsi $x = 0$ (à rejeter) et $x = \frac{1}{5}$.

**Exercice 19**

$$\begin{aligned}
\log_{10} 589400000 &= \log_{10}(5894\cdot 100000) = \log_{10} 5894 + \log_{10} 100000 = 3{,}77 + 5 = 8{,}77\\
\log_{10} 58{,}94 &= \log_{10}\frac{5894}{100} = \log_{10} 5894 - \log_{10} 100 = 3{,}77 - 2 = 1{,}77\\
\log_{10}\sqrt{5{,}894} &= \frac{1}{2}\cdot\left[\log_{10}\frac{5894}{1000}\right] = \frac{1}{2}\cdot[\log_{10} 5894 - \log_{10} 1000] = \frac{0{,}77}{2} = 0{,}385
\end{aligned}$$

**Exercice 20**

$$\log_7 200 = \frac{\log_{10} 200}{\log_{10} 7} = 2{,}723, \qquad \log_{5,1} 34{,}7 = \frac{\log_{10} 34{,}7}{\log_{10} 5{,}1} = 2{,}177$$

$$\log_{25} 125 = \frac{\log_5 125}{\log_5 25} = \frac{3}{2} \quad \log_{49} 2401 = \frac{\log_7 2401}{\log_7 49} = \frac{4}{2} = 2.$$

**Exercice 21**

$$\ln \mathrm{e} = 1, \qquad \ln 1 = 0, \qquad \ln\sqrt{\mathrm{e}^{15}} = \frac{15}{2}\cdot\ln \mathrm{e} = \frac{15}{2}, \qquad \ln\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^9}} = -\frac{9}{2}.$$

**Exercice 22** $x = 9{,}251$, $x = 2{,}351$, $x = 3{,}561$.

**Exercice 23** Le nombre de cellules après $t$ périodes est donné par la formule

$$N(t) = 2^t \cdot N_0.$$

On résout ensuite

$$\begin{aligned} 2^t \cdot 200 &= 10^9 \\ 2^t &= 5000000 \\ \log(2^t) &= \log 5000000 \\ t \cdot \log 2 &= \log 5000000 \\ t &= \frac{\log 5000000}{\log 2} \cong 22{,}25. \end{aligned}$$

Le nombre de cellules dépassera un milliard après 23 unités de temps.

**Exercice 24** On a $C(20) = 1{,}045^{20} \cdot 3500 = 8441$ francs.

**Exercice 25** On cherche $n$ tel que $1000 \cdot 1{,}0575^n = 10000$. On trouve alors $n = \frac{\log 10}{\log 1{,}0575} \cong 41{,}18$. Il faut attendre 42 ans.

**Exercice 26** On cherche $n$ tel que $C \cdot 1{,}038^n = 2 \cdot C$. On trouve alors $n = \frac{\log 2}{\log 1{,}038} \cong 18{,}6$. Le capital double après 19 ans. Il va tripler pour $n = \frac{\log 3}{\log 1{,}038} \cong 29{,}45 \cong 30$ ans. Il quadruple pour $n = \frac{\log 4}{\log 1{,}038} \cong 37{,}17 \cong 38$ ans.

**Exercice 27** La maison a aujourd'hui 7 ans. À son acquisition, elle valait 400000 francs. Ainsi

$$V(0) = \begin{cases} V_0 \mathrm{e}^0 = V_0 \\ \\ 400000 \end{cases}$$

Donc, $V_0 = 400000$ et $V(t) = 400000 \cdot \mathrm{e}^{0{,}03t}$. Aujourd'hui, la maison vaut $V(7) = 400000 \cdot \mathrm{e}^{0{,}21} \cong 493471$ francs.

La même maison vaudra 650000 francs quand

$$\begin{aligned} 400000 \cdot \mathrm{e}^{0{,}03t} &= 650000 \\ \mathrm{e}^{0{,}03t} &= 1{,}625 \\ 0{,}03t &= \ln 1{,}625 \\ t &= \frac{\ln 1{,}625}{0{,}03} \cong 16{,}18. \end{aligned}$$

La maison aura alors 17 ans ; ce qui se produit dans 10 ans.

**Exercice 28** Notons $N(t)$ le nombre de chiens l'année $t$. On sait que $N(t) = C \cdot a^t$. Il y a 5 ans (donc en $t = 0$), le nombre de chiens était de 2800. Ainsi

$$N(0) = \begin{cases} C \cdot a^0 = C \\ 2800 \end{cases}$$

Donc, $C = 2800$ et $N(t) = 2800 \cdot a^t$. Aujourd'hui, c'est-à-dire 5 ans plus tard, il y a 5160 chiens ; ainsi

$$N(5) = 2800 \cdot a^5 = 5160.$$

Il s'ensuit que

$$a = \left(\frac{5160}{2800}\right)^{1/5} = 1{,}13.$$

Ce qui signifie que le taux annuel de croissance est de 13%. Dans 10 ans, cette ville comptera

$$N(15) = 2800 \cdot 1{,}13^{15} \cong 17524 \text{ chiens}.$$

**Exercice 29** D'une année à l'autre, la revue ne conserve que 92% de ses abonnés. Le nombre $A(n)$ d'abonnés après $n$ années est donc donné par

$$A(n) = 35000 \cdot 0{,}92^n.$$

On cherche alors $n$ tel que $35000 \cdot 0{,}92^n = 15000$ et on trouve

$$n = \frac{\log 15 - \log 35}{\log 0{,}92} \cong 10{,}16.$$

Cela se produira dans 11 ans.

**Exercice 30** On cherche $t$ tel que $P(t) = 0{,}95$. On résout donc

$$\begin{aligned} 1 - \mathrm{e}^{-0{,}31t} &= 0{,}95 \\ 0{,}05 &= \mathrm{e}^{-0{,}31t} \\ \ln 0{,}05 &= -0{,}31t \\ t &= \frac{\ln 0{,}05}{-0{,}31} \cong 9{,}66. \end{aligned}$$

Il faut donc publier l'annonce 10 jours.

**Exercice 31** Notons $A(t) = A_0 \cdot a^t$, respectivement $B(t) = B_0 \cdot b^t$, les effectifs des populations des villes A et B en $1990 + t$.

**a)** Pour la ville A, comme $A(0) = A_0 = 3000$, on a $A(t) = 3000 \cdot a^t$. Par ailleurs, $A(10) = 3000 \cdot a^{10} = 5000$, on en conclut que $a = \left(\frac{5}{3}\right)^{1/10} \cong 1{,}052$. La ville A connaît donc un taux annuel de croissance de 5,2%.

Pour la ville B, comme $B(0) = B_0 = 6000$, on a $B(t) = 6000 \cdot b^t$. Par ailleurs, $B(10) = 6000 \cdot b^{10} = 4000$, on en conclut que $a = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/10} \cong 0{,}96$. La ville B connaît donc un taux annuel de décroissance de 4%.

**b)** On cherche $t$ tel que $A(t) = B(t)$. On résout ainsi

$$\begin{aligned} 3000 \cdot 1{,}052^t &= 6000 \cdot 0{,}96^t \\ \left(\frac{1{,}052}{0{,}96}\right)^t &= 2 \\ t \cdot \log\left(\frac{1{,}052}{0{,}96}\right) &= \log 2 \\ t &= \frac{\log 2}{\log\left(\frac{1{,}052}{0{,}96}\right)} = 7{,}57. \end{aligned}$$

Cela se produira donc dans le courant de l'année 1998.

**Exercice 32** Notons $F(t) = F_0 \cdot f^t$, respectivement $M(t) = M_0 \cdot m^t$, les effectifs (exprimés en milliers) des clientèles de Federalphone et de Moonrise en $2000 + t$.

**a)** Pour Federalphone, comme $F(0) = F_0 = 12212$, on a $F(t) = 12212 \cdot f^t$. Par ailleurs, $F(5) = 12212 \cdot f^5 = 8962$, on en conclut que $f = \left(\frac{8962}{12212}\right)^{1/5} \cong 0{,}94$. La clientèle de Federalphone connaît donc un taux annuel de décroissance de 6%.

Pour Monrise, comme $M(0) = M_0 = 4500$, on a $M(t) = 4500 \cdot m^t$. Par ailleurs, $M(5) = 4500 \cdot m^5 = 6924$, on en conclut que $m = \left(\frac{6924}{4500}\right)^{1/5} \cong 1{,}09$. La clientèle de Moonrise connaît donc un taux annuel de croissance de 9%.

**b)** On cherche $t$ tel que $F(t) = M(t)$. On résout ainsi

$$\begin{aligned} 12212 \cdot 0{,}94^t &= 4500 \cdot 1{,}09^t \\ \left(\frac{0{,}94}{1{,}09}\right)^t &= \frac{4500}{12212} \\ t \cdot \log\left(\frac{0{,}94}{1{,}09}\right) &= \log\left(\frac{4500}{12212}\right) \\ t &= \frac{\log\left(\frac{4500}{12212}\right)}{\log\left(\frac{0{,}94}{1{,}09}\right)} = 6{,}74. \end{aligned}$$

Cela se produira donc dans le courant de l'année 2007.

**Exercice 33** Notons $M(t)$, respectivement $P(t)$, les valeurs résiduelles de la Mercedes, respectivement de la Peugeot, $t$ années après leur première mise en circulation.

**a)** On a $M(t) = 0{,}89^t \cdot M(0)$. Comme $M(6) = 41880$, on en déduit $0{,}89^6 \cdot M(0) = 41880$. Il s'ensuit que $M(0) = \dfrac{41880}{0{,}89^6} \cong 84250$.

**b)** On sait que $P(6) = a^6 \cdot 52000 = 31530$. Il s'ensuit que

$$a = \left(\frac{31530}{52000}\right)^{\frac{1}{6}} = 0,92.$$

Comme 0,92=1-8%, on en déduit que le taux de dévaluation annuel est de 8%.

**c)** Il s'agit de trouver $t$ tel que $P(t) = M(t)$ en résolvant l'équation

$$\begin{aligned} 0{,}92^t \cdot 52000 &= 0{,}89^t \cdot 84250 \\ \left(\frac{0{,}92}{0{,}89}\right)^t &= \frac{84250}{52000} \\ t \cdot \log\left(\frac{0{,}92}{0{,}89}\right) &= \log \frac{84250}{52000} \\ t &= \frac{\log \frac{84250}{52000}}{\log\left(\frac{0{,}92}{0{,}89}\right)} \cong 14{,}5. \end{aligned}$$

Cela se produira dans 9 ans.

**Exercice 34** Désignons par $V(t)$ le nombre de véhicules immatriculés en Suisse en $1990 + t$.

**a)** Comme $V(0) = 2985399$, on a $V(t) = 2985399 \cdot a^t$. Puis, comme $V(5) = 3229169$, on a $V(5) = 2985399 \cdot a^5 = 3229169$. Il s'ensuit que

$$a = \left(\frac{3229169}{2985399}\right)^{\frac{1}{5}} \cong 1{,}0158.$$

Le taux de croissance annuel est donc de 1,58 %.

**b)** En 2000, le nombre de véhicules sera égal à

$$V(10) = 2985399 \cdot 1{,}0158^{10} \cong 3492000.$$

**c)** Cela se produira l'année 1990+33=2023, comme on l'observe en résolvant l'équation

$$\begin{aligned} 1{,}0158^t &= \frac{5000000}{2985399} \\ t \cdot \log 1,0158 &= \log \frac{5000000}{2985399} \\ t &= \frac{\log \frac{5000000}{2985399}}{\log 1{,}0158} \cong 32{,}9. \end{aligned}$$

**Exercice 35**

**a)** La mise initiale est de $V(0) = 2600 \cdot 0{,}49^3 \cong 305{,}9$ CHF.

**b)** On cherche $t$ tel que $V(t) = 1800$ en résolvant l'équation

$$\begin{aligned}
2600 \cdot \left(1 - 0{,}51 \cdot e^{-0{,}075t}\right) &= 1800 \\
\left(1 - 0{,}51 \cdot e^{-0{,}075t}\right)^3 &= \frac{9}{13} \\
-0{,}51 \cdot e^{-0{,}075t} &= \sqrt[3]{\frac{9}{13}} - 1 \\
e^{-0{,}075t} &= \frac{0{,}1154}{0{,}51} \\
t &\cong 19{,}82.
\end{aligned}$$

Cela se passera à la vingtième la heure.

**Exercice 36** **a)** Après 10 heures le nombre de personnes informées est de $V(10) = \frac{36}{1+200 \cdot \mathrm{e}^{-2}} \cong 1{,}28$ milliers.

**b)** On cherche $t$ tel que $V(t) = 15$ (attention : pas 15000 !). On résout ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{36}{1 + 200 \cdot \mathrm{e}^{-0,2t}} &= 15 \\
36 &= 15 + 3000 \cdot \mathrm{e}^{-0,2t} \\
21 &= 3000 \cdot \mathrm{e}^{-0,2t} \\
0{,}007 &= \mathrm{e}^{-0,2t} \\
\ln 0{,}007 &= -0{,}2t \\
t &= = -\frac{\ln 0{,}007}{0{,}2} = 24{,}8
\end{aligned}$$

Cela se produira donc après 25 heures.

**Exercice 37** **a)** 5019 signatures, **b)** Après 9 semaines, **c)** 13000 signatures.

**Exercice 38** Posons $A(t) = 172 \cdot a^t$ et $V(t) = 264{,}8 \cdot v^t$ pour les montants des primes en $2000 + t$.

**a)** Comme $A(11) = 264{,}8 = 172 \cdot a^{11}$, on en déduit que

$$a = \left(\frac{264{,}8}{172}\right)^{\frac{1}{11}} = 1{,}04 = 104\%$$

d'où le taux de croissance de $\boxed{4\%}$ pour Assurmed.

Comme $V(11) = 236{,}05 = 131 \cdot v^{11}$, on en déduit que

$$v = \left(\frac{236{,}05}{131}\right)^{\frac{1}{11}} = 1{,}055 = 105{,}5\%$$

d'où le taux de croissance de $\boxed{5{,}5\%}$ pour Visante.

**b)** En 2008, les montants des primes sont $A(8) = 172 \cdot 1{,}04^8 = \boxed{235{,}4}$ et $V(8) = 131 \cdot 1{,}055^8 = \boxed{201{,}05}$.

**c)** On cherche $t$ tel que $A(t) = V(t)$, autrement dit, on résout l'équation

$$\begin{aligned}
172 \cdot 1{,}04^t &= 131 \cdot 1{,}055^t \\
\tfrac{172}{131} &= \tfrac{1{,}055^t}{1{,}04^t} \\
\tfrac{172}{131} &= \left(\tfrac{1{,}055}{1{,}04}\right)^t \\
\log\left(\tfrac{172}{131}\right) &= t \cdot \log\left(\tfrac{1{,}055}{1{,}04}\right)
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$t = \frac{\log\left(\frac{172}{131}\right)}{\log\left(\frac{1,055}{1,04}\right)} \cong 19,02.$$

Dans ces conditions, c'est en $\boxed{2020}$ que Assurmed sera la caisse la plus avantageuse.

**Exercice 39**

**a)** On a $N(0) = \frac{800}{399+1} = \boxed{2}$.

**b)** Après 15 mois

$$N(15) = \frac{800 \cdot e^{0,36\cdot 15}}{399 + e^{0,36\cdot 15}} \cong \boxed{285,5}$$

**c)** En multipliant le numérateur et le dénominateur de la fraction par $e^{-0,36\cdot t}$, on obtient

$$\frac{800 \cdot e^{0,36\cdot t}}{399 + e^{0,36\cdot t}} \cdot \frac{e^{-0,36\cdot t}}{e^{-0,36\cdot t}} = \frac{800 \cdot e^{0,36\cdot t} e^{-0,36\cdot t}}{399 \cdot e^{-0,36\cdot t} + e^{0,36\cdot t} e^{-0,36\cdot t}} = \frac{800 \cdot e^{0}}{399 \cdot e^{-0,36\cdot t} + e^{0}} = \boxed{\frac{800}{1 + 399 \cdot e^{-0,36\cdot t}}}$$

Quand $t \to \infty$, le terme au dénominateur $e^{-0,36\cdot t} \to 0$ et donc

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \frac{800}{1+0} = \boxed{800}$$

**d)** On résout l'équation

$$\begin{array}{rcl|l} \dfrac{800}{1 + 399 \cdot e^{-0,36\cdot t}} & = & 625 & \cdot\dfrac{1 + 399 \cdot e^{-0,36\cdot t}}{625} \\ 1,28 & = & 1 + 399 \cdot e^{-0,36\cdot t} & -1 \\ 0,28 & = & 399 \cdot e^{-0,36\cdot t} & : 399 \\ \frac{0,28}{399} & = & e^{-0,36\cdot t} & \ln(...) \\ \ln\left(\frac{0,28}{399}\right) & = & -0,36t & \end{array}$$

On en conclut que

$$t = \frac{\ln\left(\frac{0,28}{399}\right)}{-0,36} \cong 20,17$$

Cela se produira donc le $\boxed{21^e}$ mois.

**Exercice 40** **a)** CHA : taux de croissance de 5,5%, Personnel : taux de décroissance de 3%, **b)** Chaque EPT assure un CHA annuel de 346000 frs. **c)** 8,76%.

**Exercice 41** **a)** La part sera $P(30) \cong 41,54\%$, **b)** Cela se produira dès le mois 38, **c)** 80%.

**Exercice 42** **a)** 32886,50 frs, **b)** Taux moyen 2,31%.

**Exercice 43** **a)** Malaisie 2,5%, Turkmenistan 3,75%, **b)** Malaisie 63,04, Turkmenistan 61,37, **c)** Cela se produira en 2010.

**Exercice 44** **a)** $P(50) \cong 22,51\%$, **b)** Cela se produira après 139 mois, **c)** Part maximale 2/3.

**Exercice 45** **a)** $N(15) \cong 678$, **b)** Après 70 semaines.

**Exercice 46** Après 14 ans.

**Exercice 47** **a)** 11632,70 frs, **b)** 10 ans.