Corrigé

Problème 1

On a $N(x) = -x^4 + 28x^3 - 252x^2 + 864x + 1145$ où x est en heure.

a) A 0h00, c'est-à-dire en $x = 0$, le nombre d'auditeurs est $N(0) = \underline{\underline{1145}}$.

b) On a $N'(x) = -4x^3 + 84x^2 - 504x + 864$ et
$N'(12) = -4\cdot 12^3 + 84\cdot 12^2 - 504\cdot 12 + 864 = 0$.
Ainsi $x = 12$ est bien un point à tangente horizontale.
De plus, on a $N''(x) = -12x^2 + 168x - 504$ et
$N''(12) = -12\cdot 12^2 + 168\cdot 12 - 504 = -216 < 0$.
Ainsi $x = 12$ est un point à tangente horizontale où la courbe est concave.
<u>L'affluence est donc bien maximale à midi.</u>

c) D'après b), on a $N'(x) = -4x^3 + 84x^2 - 504x + 864$.
Comme $N'(7) = -4\cdot 7^3 + 84\cdot 7^2 - 504\cdot 7 + 864 = 80 > 0$, $N(x)$ est croissante en $x = 7$ et on a donc bien que <u>la tendance du nombre d'auditeurs est à la hausse à 7 heures.</u>

d) Le point A correspond à $x = 7$.
D'après b), on a $N''(x) = -12x^2 + 168x - 504$.
Comme $N''(7) = -12\cdot 7^2 + 168\cdot 7 - 504 = 84 > 0$, on en déduit que <u>la courbe est convexe en A.</u>

e) Les coordonnées de T sont $(10; N(10))$.
Comme $N(10) = -10^4 + 28\cdot 10^3 - 252\cdot 10^2 + 864\cdot 10 + 1145 = 2585$, les coordonnées de T sont $(10; 2585)$.
De plus, on a $N'(10) = -4\cdot 10^3 + 84\cdot 10^2 - 504\cdot 10 + 864 = 224$.
Ainsi la pente de la tangente cherchée est 224.
L'équation de cette tangente s'écrit donc $y = 224\cdot x + h$.
Avec le point $T(10; 2585)$, en substituant x par 10 et y par 2585, on a $2585 = 224\cdot 10 + h \Rightarrow 2585 = 2240 + h \Rightarrow h = 345$.
L'équation de la tangente est donc $\underline{\underline{y = 224\cdot x + 345}}$.

Problème 2

On a $f(x) = \dfrac{2x^2-17x+35}{(x-4)^2}$.

a) En $x=4$, on a $(x-4)^2=0$ et $2x^2-17x+35 = 2\cdot 4^2 - 17\cdot 4 + 35 = -1 \neq 0$.
Donc $x=4$ est l'asymptote verticale.

On a $(x-4)^2 = x^2-8x+16$ et

$$\begin{array}{r|l} 2x^2-17x+35 & x^2-8x+16 \\ \hline -(2x^2-16x+32) & 2 \\ \hline -x+3 & \end{array}$$

Ainsi $y=2$ est l'asymptote horizontale.

Il n'y a pas d'autres asymptotes.

b) Intersections avec l'axe x: on doit résoudre $f(x)=0 \Rightarrow \dfrac{2x^2-17x+35}{(x-4)^2}=0$
$\Rightarrow 2x^2-17x+35=0$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=2$, $b=-17$ et $c=35$; les solutions sont :

$$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{17\pm\sqrt{(-17)^2-4\cdot 2\cdot 35}}{2\cdot 2} = \frac{17\pm\sqrt{9}}{4} = \frac{17\pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{20}{4}=5 \\ \frac{14}{4}=3{,}5 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ les intersections avec l'axe x sont: $(3{,}5\,;0)$ et $(5;0)$.

Intersection avec l'axe y: on pose $x=0$ et on a $f(0) = \dfrac{35}{(-4)^2} = \dfrac{35}{16}$
$\Rightarrow$ l'intersection avec l'axe y est : $\left(0;\dfrac{35}{16}\right)$.

c) On a $f(x) = \dfrac{u}{v}$ avec $u = 2x^2-17x+35$ et $v=(x-4)^2$.
On a $u' = 4x-17$ et $v' = 2(x-4)$.

Ainsi
$$f'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{(4x-17)(x-4)^2 - (2x^2-17x+35)\cdot 2(x-4)}{((x-4)^2)^2} =$$
$$= \frac{(x-4)\left[(4x-17)(x-4) - 2(2x^2-17x+35)\right]}{(x-4)^4} =$$
$$= \frac{(4x-17)(x-4)-2(2x^2-17x+35)}{(x-4)^3} = \frac{4x^2-16x-17x+68-4x^2+34x-70}{(x-4)^3}$$
$$= \frac{x-2}{(x-4)^3}$$

On a $f'(x)=0 \Longrightarrow \frac{x-2}{(x-4)^3}=0 \Longrightarrow x-2=0 \Longrightarrow x=2$.

Ainsi f admet un <u>seul point à tangent horizontale d'abscisse 2.</u>

d) On a un exclu : $x=4$ et un point à tangente horizontale en $x=2$.
Le tableau de variations se présente comme suit :

x		2		4	
f'	$+$	0	$-$	////	$+$
f	↗		↘	////	↗

avec $x=0$ (par exemple), on a $f'(0)=\frac{-2}{(-4)^3}=\frac{-2}{-64}=\frac{2}{64}>0$, donc f est croissante dans cette zone

avec $x=3$, on a $f'(3)=\frac{1}{(-1)^3}=\frac{1}{-1}<0$, donc f est décroissante dans cette zone

avec $x=5$, on a $f'(5)=\frac{3}{1^3}>0$, donc f est croissante dans cette zone.

On en déduit que f atteint un maximum en $x=2$ et, donc, que la courbe en $x=2$ est <u>concave.</u>

Problème 3

On a $R(x) = 1000 - 20x \cdot \sqrt{3x+4}$, où x est en mois.

a) Après 4 mois, c'est-à-dire $x=4$, le nombre de dossiers ouverts est
$R(4) = 1000 - 20 \cdot 4 \cdot \sqrt{3 \cdot 4 + 4} = 1000 - 80\sqrt{16} = 1000 - 80 \cdot 4 = \underline{\underline{680.}}$

b) En $x = 7$, on a $R(7) = 1000 - 20 \cdot 7 \cdot \sqrt{3 \cdot 7 + 4} = 1000 - 140 \cdot \sqrt{25} = 1000 - 140 \cdot 5 =$
$= 300.$

Le point de tangence est donc $(7; 300)$.

On a $R'(x) = \left(1000 - 20x \cdot \sqrt{3x+4}\right)' = -\left(20x \cdot \sqrt{3x+4}\right)' = -(u \cdot v)'$ où
$u = 20x$ et $v = \sqrt{3x+4}$.

On a $u' = 20$ et $v' = \frac{1}{2\sqrt{3x+4}} \cdot (3x+4)' = \frac{1}{2\sqrt{3x+4}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x+4}}$.

Ainsi $R'(x) = -(uv)' = -(u'v + uv') = -\left(20 \cdot \sqrt{3x+4} + 20x \cdot \frac{3}{2\sqrt{3x+4}}\right) =$

$= -\left(20\sqrt{3x+4} + \frac{30x}{\sqrt{3x+4}}\right) = -\frac{20(3x+4) + 30x}{\sqrt{3x+4}} = -\frac{60x + 80 + 30x}{\sqrt{3x+4}} =$

$= -\frac{90x + 80}{\sqrt{3x+4}}.$

En $x = 7$, on a $R'(7) = -\frac{90 \cdot 7 + 80}{\sqrt{3 \cdot 7 + 4}} = -\frac{710}{5} = -142.$

L'équation de la tangente s'écrit donc $y = -142x + b$.

Avec le point de tangence $(7; 300)$, en substituant x par 7 et y par 300, on obtient $300 = -142 \cdot 7 + b \Rightarrow 300 = -994 + b \Rightarrow b = 1294$.

L'équation de la tangente est donc $\underline{\underline{y = -142x + 1294.}}$

c) Tous les dossiers auront été traités lorsque $R(x) = 0$.

On doit donc résoudre $1000 - 20x \cdot \sqrt{3x+4} = 0$
$\Rightarrow 1000 = 20x\sqrt{3x+4} \Rightarrow 50 = x\sqrt{3x+4}$

Avec $x = 7$, on a $x\sqrt{3x+4} = 7 \cdot \sqrt{3 \cdot 7 + 4} = 7 \cdot 5 = 35.$

Avec $x = 8$, on a $x\sqrt{3x+4} = 8 \cdot \sqrt{3 \cdot 8 + 4} = 8 \cdot \sqrt{28} \cong 42{,}33$

Avec $x = 9$, on a $x\sqrt{3x+4} = 9 \cdot \sqrt{3 \cdot 9 + 4} = 9 \cdot \sqrt{31} \cong 50{,}1.$

On en conclut donc que, <u>après 9 mois, tous les dossiers auront été traités.</u>