Corrigé

Problème 1

On a $N(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{53}{2}x^2 + 168x + 1500$.

a) En $x = -12$, on a $N(-12) = \frac{1}{4}(-12)^4 - \frac{4}{3}(-12)^3 - \frac{53}{2}(-12)^2 + 168\cdot(-12) + 1500 =$
$= 3156$.

Il y a donc eu **3156 clients** il y a 12 semaines.

b) On a $N'(x) = \frac{1}{4}\cdot 4x^3 - \frac{4}{3}\cdot 3x^2 - \frac{53}{2}\cdot x + 168 = x^3 - 4x^2 - 53x + 168$.

En $x = 6$ (point d'abscisse 6), on a $N'(6) = 6^3 - 4\cdot 6^2 - 53\cdot 6 + 168 = -78 < 0$.

Donc la fonction est **décroissante** au point d'abscisse 6.

c) On a : en A, $x = -7$ et $N'(-7) = (-7)^3 - 4\cdot(-7)^2 - 53\cdot(-7) + 168 = 0$,
en B, $x = 3$ et $N'(3) = 3^3 - 4\cdot 3^2 - 53\cdot 3 + 168 = 0$ et
en C, $x = 8$ et $N'(8) = 8^3 - 4\cdot 8^2 - 53\cdot 8 + 168 = 0$.

Comme les 3 dérivées sont nulles en A, B et C, on en conclut que **A, B et C sont bien des points à tangente horizontale.**

d) On a $N''(x) = 3x^2 - 8x - 53$.

En $x = -7$ (abscisse de A), on a $N''(-7) = 3\cdot(-7)^2 - 8\cdot(-7) - 53 = 150 > 0$.

On en déduit que la courbe est convexe en A et donc que **A est un minimum absolu.**

e) L'abscisse de T est $x = -6$.

On a $N(-6) = \frac{1}{4}(-6)^4 - \frac{4}{3}(-6)^3 - \frac{53}{2}(-6)^2 + 168\cdot(-6) + 1500 = 150$.

On a donc $T(-6\,;150)$.

De plus, $N'(-6) = (-6)^3 - 4\cdot(-6)^2 - 53\cdot(-6) + 168 = 126$.

L'équation de la tangente cherchée s'écrit donc $y = 126x + b$.

En utilisant les coordonnées de T et en substituant x par -6 et y par 150, on obtient $150 = 126\cdot(-6) + b \Rightarrow 150 = -756 + b \Rightarrow b = 906$.

L'équation de la tangente à la courbe au point T est donc **$y = 126x + 906$.**

Problème 2

On a $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{(x-1)^2}$.

a) Comme $x = 1$ correspond à une division par 0, $\underline{x = 1 \text{ est asymptote verticale}}$.

On a $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ et

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 5x + 6 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2} -(x^2 - 2x + 1) & 1 \\ \cline{1-1} -3x + 5 & \end{array}$$

Ainsi $\underline{y = 1 \text{ est asymptote horizontale.}}$

Il n'y a pas d'autres asymptotes.

b) Intersection avec l'axe x: On doit résoudre $f(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2 - 5x + 6}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 1$, $b = -5$ et $c = 6$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ les intersections avec l'axe x sont $\underline{(2;0) \text{ et } (3;0)}$.

Intersection avec l'axe y: On pose $x = 0$ et on a $f(0) = \dfrac{6}{(-1)^2} = 6$
$\Rightarrow$ l'intersection avec l'axe y est $\underline{(0;6)}$.

c) On a $f(x) = \dfrac{u}{v}$ avec $u = x^2 - 5x + 6$ et $v = (x-1)^2$.
Comme $u' = 2x - 5$ et $v' = 2(x-1)$, on a

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(2x-5)(x-1)^2 - (x^2 - 5x + 6)\,2(x-1)}{((x-1)^2)^2} =$$

$$= \frac{(x-1)\big((2x-5)(x-1) - 2(x^2 - 5x + 6)\big)}{(x-1)^4} = \frac{(2x-5)(x-1) - 2(x^2 - 5x + 6)}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - 5x + 5 - 2x^2 + 10x - 12}{(x-1)^3} = \underline{\underline{\frac{3x - 7}{(x-1)^3}}}.$$

Les points à tangente horizontale sont les solutions de $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x - 7}{(x-1)^3} = 0 \Rightarrow 3x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{3}.$$

Ainsi $\underline{\text{la courbe de } f \text{ admet un seul point à tangente horizontale en } x = \frac{7}{3}}$.

d) On a un exclu: $x = 1$, et on a un point à tangente horizontale: $x = \frac{7}{3}$.
Le tableau de variation de f est alors:

x		1		$\frac{7}{3}$	
$f'(x)$	$+$	‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	‖	↘	min	↗

en $x=0$, on a
$$f'(0) = \frac{-7}{(-1)^3} = 7 > 0$$
et donc f est croissante

en $x=2$, on a
$$f'(2) = \frac{6-7}{(2-1)^3} = -1 < 0$$
et donc f est décroissante

en $x=3$, on a
$$f'(3) = \frac{9-7}{(3-1)^3} = \frac{2}{8} > 0$$
et donc f est croissante

On en déduit que f atteint un minimum en $\frac{7}{3}$ et, donc, que la courbe est <u>convexe en $x = \frac{7}{3}$</u> $(\cup)$.

Problème 3

On a $A(x) = 8x \cdot \sqrt{3x+1}$ où x est le nb de mois.

a) On a, en $x = 5$, $A(x) = 8 \cdot 5 \cdot \sqrt{3 \cdot 5 + 1} = 40 \cdot 4 = 160$.
Le point de tangence est donc $(5; 160)$.
La dérivée de $A(x) = u \cdot v$ avec $u = 8x$ et $v = \sqrt{3x+1}$, d'où $u' = 8$ et
$v' = \frac{1}{2\sqrt{3x+1}} \cdot (3x+1)' = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$, et

$$A'(x) = u'v + uv' = 8 \cdot \sqrt{3x+1} + 8x \cdot \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} = \frac{8(3x+1)}{\sqrt{3x+1}} + \frac{12x}{\sqrt{3x+1}}$$

$$= \frac{24x + 8 + 12x}{\sqrt{3x+1}} = \frac{36x+8}{\sqrt{3x+1}}.$$

La pente de la tangente en $(5; 160)$ est donc $A'(5) = \frac{36 \cdot 5 + 8}{\sqrt{3 \cdot 5 + 1}} = \frac{188}{4} = 47$.
L'équation de la tangente s'écrit donc $y = 47x + h$.
Avec le point de tangence $(5; 160)$, en remplaçant x par 5 et y par 160, on obtient $160 = 47 \cdot 5 + h \Rightarrow 160 = 235 + h \Rightarrow h = -75$.
L'équation de la tangente est donc $\underline{y = 47x - 75}$.

b) On a $A(10) \cong 445{,}42$, $A(40) = 3520$, $A(30) \cong 2289{,}45$,
$A(35) \cong 2882{,}78$, $A(33) = 2640$.
Le nombre d'abonnés sera égal à 2640 au $\underline{33^e \text{ mois}}$.