CALCUL DIFFÉRENTIEL

Maxime Zuber, Dr ès sciences
Giuseppe Melfi, Dr ès sciences

Haute École de Gestion ARC, février 2018

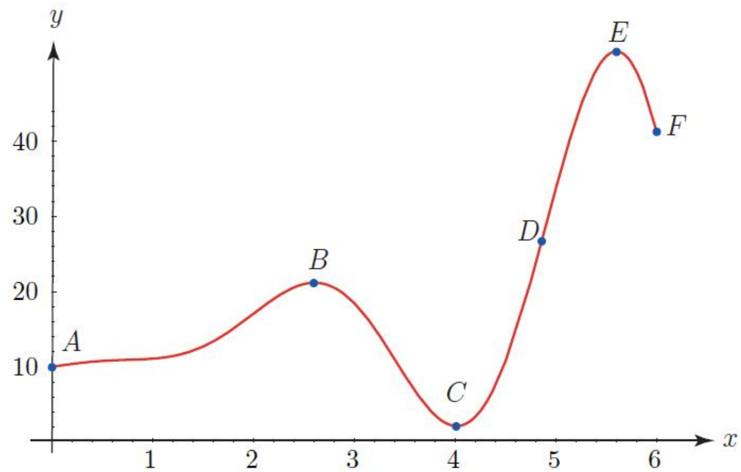
1 Introduction et rappels

À l'origine calcul des «indivisibles» ou infiniment petits, **l'analyse** est née de problèmes tels que l'étude des vitesses et accélérations, la recherche de tangentes aux courbes ou de maxima de fonctions, de problèmes d'interpolation ou d'approximation. Cette branche des mathématiques repose sur le **calcul différentiel** et le **calcul intégral**, deux disciplines qui ont pour objet l'étude des notions de **fonction**, de **limite**, de **dérivée** et d'**intégrale**.

1.1 La notion de fonction

1.1.1 Exemple introductif

Un analyste financier s'intéresse à la valeur y (en CHF) d'une action cotée en Bourse en fonction du temps x (en mois). Ce spécialiste a trouvé une formule explicite $f(x)$ qui donne la valeur de l'action au temps x.



En détenant cette formule, l'analyste pourra se livrer à des prévisions qui lui permettront, par exemple, de trouver :

- la valeur initiale de l'action (deuxième coordonnée du point A);
- le moment où l'action atteint un maximum relatif (première coordonnée du point B);
- la valeur minimale de l'action sur les 6 premiers mois (deuxième coordonnée de C);
- le moment où la vitesse de croissance de la valeur est la plus forte (point D);
- le moment où le cours atteint un maximum (point E);
- la valeur finale de l'action (point F).

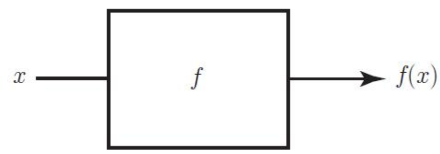
Les méthodes du calcul différentiel permettent de traiter ce genre de questions avec précision et non seulement au travers d'approximations graphiques.

1.1.2 Définition générale

Soient D et A deux sous-ensembles de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. On appelle **fonction** de D vers A une relation f qui, à chaque élément $x \in D$, fait correspondre un unique élément y dans A.

Pour désigner une telle fonction, on utilise la notation

$$\begin{array}{rcrcl} f & : & D & \to & A \\ & & x & \mapsto & y = f(x). \end{array}$$



L'image de la fonction f est l'ensemble $\text{Im}(f)$ de toutes les images $f(x)$ des éléments $x \in D$.

La donnée d'une relation explicite (formule) $y = f(x)$ permet de définir une fonction f. L'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $f(x)$ est bien défini, c'est-à-dire calculable, et unique est appelé **ensemble** ou **domaine de définition** de f. Cet ensemble est noté D_f.

Exemple 1 *La relation $y = \sqrt{16 - x^2}$ permet de calculer y pour autant que $16 - x^2 \geq 0$, c'est-à-dire pour $x \in D_f = [-4; 4]$. Elle définit donc une fonction*

$$\begin{array}{rclcl} f & : & [-4; 4] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f(x) = \sqrt{16 - x^2}. \end{array}$$

Exemple 2 *La relation associant un nombre non nul à son inverse définit la fonction*

$$\begin{array}{rcrcl} f & : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f(x) = \dfrac{1}{x}. \end{array}$$

Exercice 1 Donner le domaine de définition de chacune des fonctions définies comme suit.

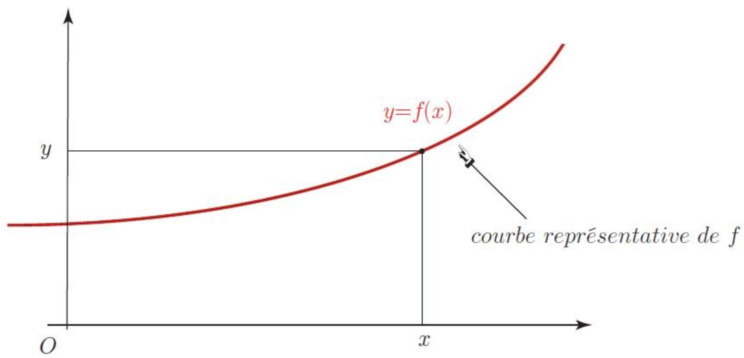
$$f(x) = \frac{x^2}{2x - 6} \qquad g(x) = \sqrt{x^2 - 36} \qquad h(x) = \frac{3}{x^2 + x - 6} \qquad i(x) = e^{x^2 - x - 1}$$

Exercice 2 Même question avec

$$f(x) = \ln(3x - 5), \qquad g(x) = \sqrt{50 - 2x^2}, \qquad i(x) = \frac{|x|}{x}$$

1.2 Graphe et représentation graphique

On appelle **graphe** de f l'ensemble de tous les couples $\big(x, f(x)\big)$ avec $x \in D_f$. Il est noté $G_f = \big\{\big(x, f(x)\big) \mid x \in D_f\big\}$. Il s'agit d'un sous-ensemble du produit cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Si, dans le plan cartésien muni d'un repèère, on dessine tous les points dont le couple de coordonnées $\big(x; f(x)\big)$ appartient au graphe de f, alors on obtient un objet géométrique appelé **courbe représentative** ou **représentation graphique** de la fonction f.



Exercice 3 Considérer la fonction f définie par

$$f(x) = x^3 - x.$$

a) Calculer $f(-2)$, $f(3)$ et $f(5)$.

b) Donner les coordonnées des points d'intersection de la courbe représentative de f avec les axes de coordonnées.

c) Esquisser la courbe représentative de f.

d) Déterminer x tel que $f(x) = 6$.

1.3 Fonctions élémentaires

À l'image d'une molécule, qui est le regroupement d'atomes liés, une fonction peut être constituée de fonctions **élémentaires** combinées par les opérations fonctionnelles d'addition, de multiplication et de composition (corollairement par les opérations de soustraction et de division) définies comme suit :

- **addition** : $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$;
- **multiplication** : $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$;
- **composition** : $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$.

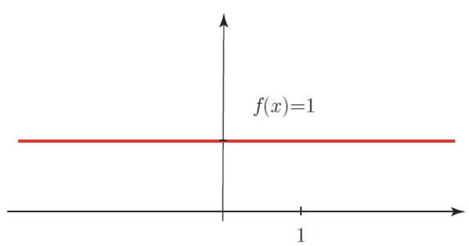
Par exemple, la fonction f définie par

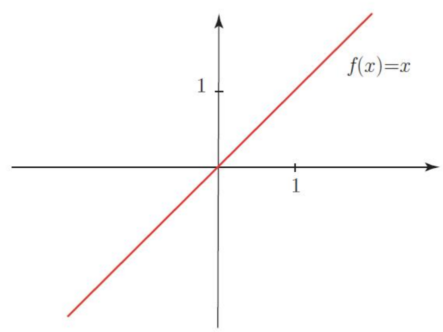
$$f(x) = e^{2x} - \frac{x^3}{\ln(x)} \cdot \left(x^2 + 3\right)$$

est obtenue par les opérations fonctionnelles appliquées aux fonctions élémentaires 1, x, e^x, $\ln(x)$.

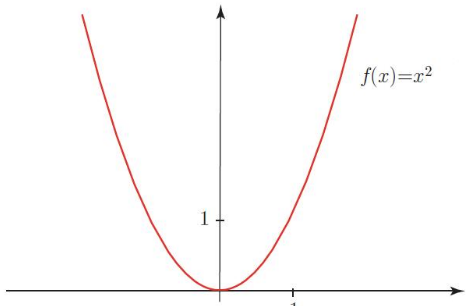
1.3.1 Graphes des fonctions élémentaires

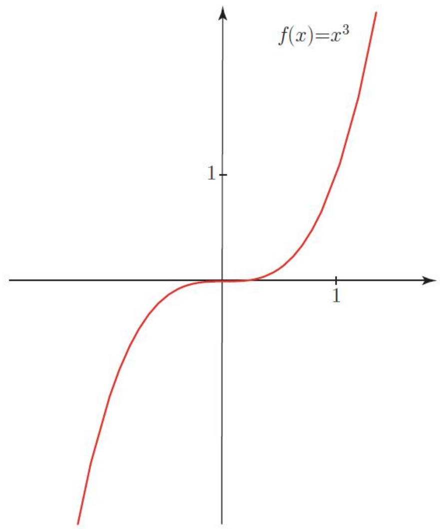
Les figures suivantes présentent les courbes représentatives de fonctions élémentaires.





De manière plus générale, la fonction dite linéaire affine de la forme $f(x) = p \cdot x + h$ est représentée par une droite oblique de pente p et d'ordonnée à l'origine h.

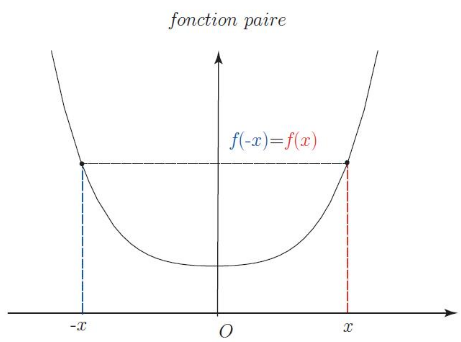


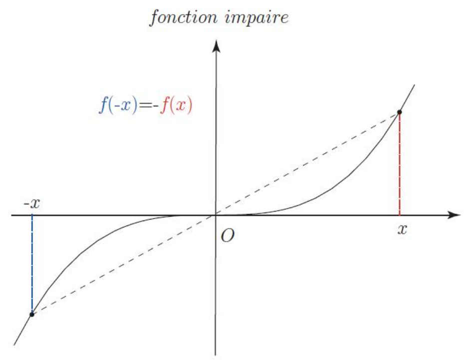


La fonction puissance $f(x) = x^n$ (avec $n \geq 2$) est représentée par une courbe qui présente une symétrie :

- axiale, par rapport à la droite verticale $x = 0$, si n est pair (par exemple x^2, x^4, etc.).
- centrale, par rapport à l'origine, si n est impair (par exemple x, x^3, x^5, etc.).

De manière plus générale, on dit ainsi qu'une fonction est **paire** si et seulement si sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe vertical. Dans ce cas, $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$. Une fonction f est dite **impaire** si et seulement si sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine $O(0;0)$. Alors, $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in D_f$.



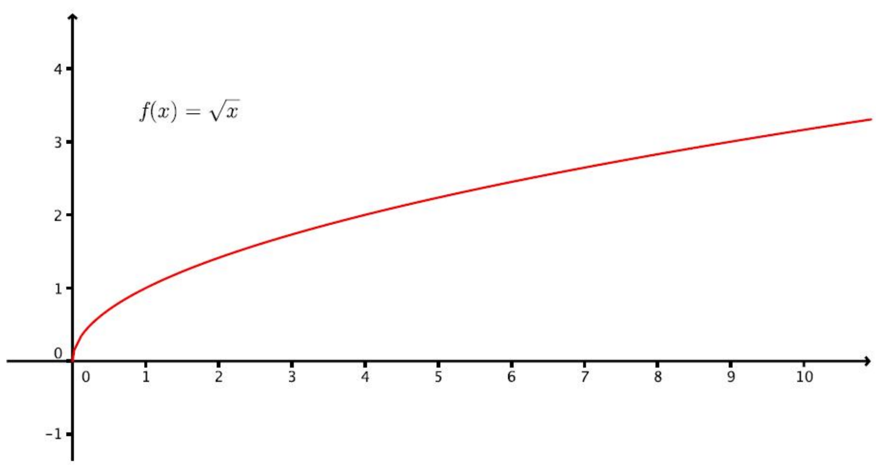


Exercice 4 Discuter les éventuelles symétries des courbes représentant les fonctions suivantes.

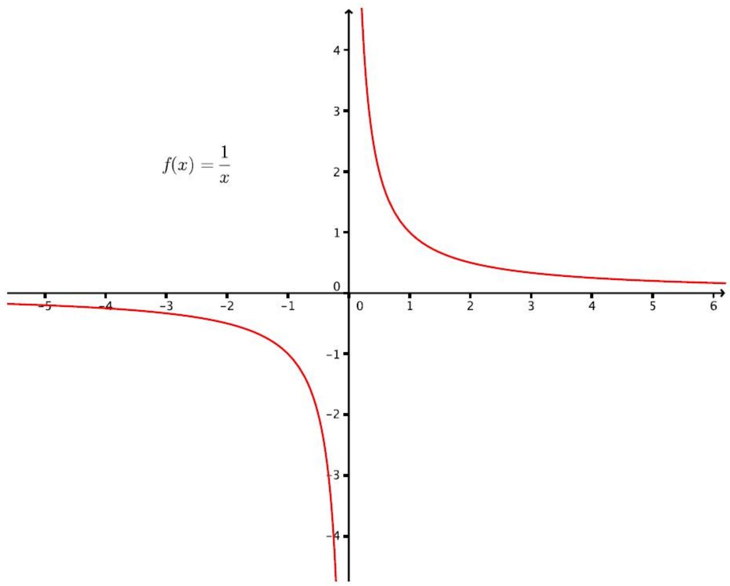
a) $f(x) = 7x^2$ **b)** $g(x) = 8x^3 - 6x$
c) $h(x) = 4^x$ **d)** $j(x) = \ln(|x| + 1)$
e) $m(x) = 0$ **f)** $n(x) = |x| \cdot (x^4 - 3)$

1.3.2 Autres fonctions

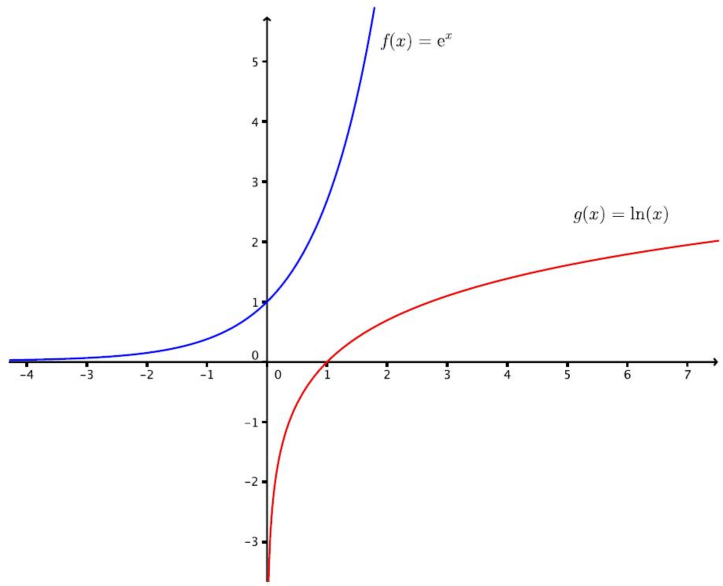
La fonction racine $f(x) = \sqrt{x}$ n'est définie que pour $x \geq 0$. Toutes ses valeurs sont positives.



La fonction rationnelle $f(x) = \frac{1}{x}$ n'est évidemment pas définie pour $x = 0$. Quand $x \simeq 0$ infinitésimal, $f(x)$ est très grand positif ou négatif selon le signe de x. Plus x est grand, plus son inverse $f(x)$ est petit. On constate donc que la courbe représentative se rapproche de la droite horizontale $y = 0$ à mesure que x grandit. Cette courbe, qui porte le nom d'hyperbole équilatère, est symétrique par rapport à l'origine des coordonnées puisque f est une fonction impaire. En effet $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$.



Les fonctions e^x et $\ln(x)$ sont représentées par des courbes symétriques l'une de l'autre. Elles ont été étudiées en détail dans un chapitre précédent.



2 Applications

Exercice 5 Une société souhaite établir un modèle empirique exprimant son bénéfice annuel y en fonction du volume x de ses ventes sous la forme d'une relation linéaire affine $y = f(x)$ avec $f(x) = p \cdot x + h$. Pour ce faire, elle choisit les résultats correspondants à deux années particulières. Lesquels, exprimés en milliers de francs, sont contenus dans le tableau ci-dessous.

Ventes x en kF	1850	5420
Bénéfice y en kF	293,25	1096,50

a) Déterminer l'expression de la fonction $f(x)$.

b) À quel bénéfice conduira un volume de ventes de 4 millions de francs ?

c) Quel volume des ventes se traduit par un bénéfice de 664500 de francs ?

d) Que représentent, en termes économiques, les coefficients p et h ?

Exercice 6 La somme totale des points qu'il est possible de réaliser à un examen écrit d'économie est de 85. Donner la fonction linéaire affine $N(x)$ qui définit la note, comprise entre 1 et 6, correspondant à x points si la note 6 est attribuée à 85 points et la note 1 à 0 point.

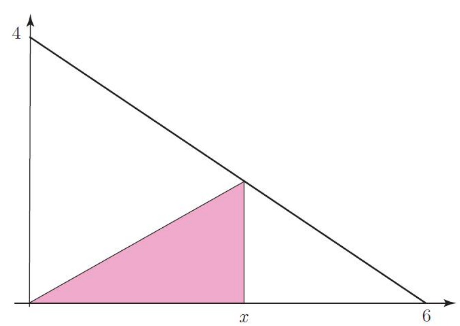
Exercice 7 Une PME, qui vend des briquets à gaz comme supports publicitaires, apprend d'une étude de marché qu'elle peut s'attendre à vendre $n = 12500 - 2000p$ articles en fixant à p leur prix de vente unitaire. Les frais de production étant réduits à un investissement fixe de 3400 francs ainsi qu'à 80 centimes de matière pour chaque article produit, déterminer, dans ces conditions (en arrondissant au centime) :

a) les fonctions $R(p)$, $F(p)$, $B(p)$ décrivant respectivement les revenus, les frais et le bénéfice;

a) les prix unitaires relatifs aux seuils de rentabilité inférieur et supérieur;

b) le nombre d'articles (et le prix unitaire) que doit produire cette PME pour obtenir un bénéfice maximal.

Exercice 8 On considère la figure ci-dessous



a) Déterminer la fonction $A(x)$ qui donne l'aire du triangle.

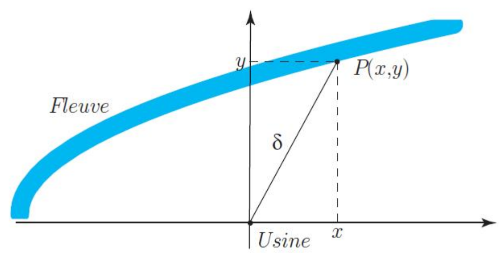
b) Pour quelle valeur de x, cette aire est-elle maximale ?

c) Que vaut alors cette aire ?

Exercice 9 Un fleuve a un lit dont le tracé coïncide approximativement avec la courbe d'équation

$$y = \sqrt{2x + 11}$$

par rapport aux coordonnées d'une usine située à l'origine $O(0; 0)$ de deux axes perpendiculaires disposés comme l'indique la figure ci-dessous (x et y sont exprimés en kilomètres). Cette usine doit être alimentée en eau par une conduite rectiligne la liant à un point de pompage $P(x; y)$ situé au bord du fleuve.



a) Le point de pompage $P(x; y)$ étant fixé, appliquer le théorème de Pythagore pour déterminer la fonction $C(x) = \delta^2$ qui donne le carré de la distance δ séparant l'usine du point de pompage P.

b) Pour quelle valeur de x, la fonction $C(x)$ prend-elle une valeur minimale ? En déduire les coordonnées du point sur la rive du fleuve pour lequel la conduite d'eau a une longueur minimale.

c) Quelle est alors cette distance ?

Exercice 10 Une association caritative met sur pied un réseau d'entraide faisant appel à des bénévoles. Elle lance un appel au moyen d'une campagne publicitaire destinée à encourager les bénévoles à offrir leurs services. Ceux-ci s'inscrivent en ligne à une adresse Internet activée à cette fin. On observe que le nombre $N(t)$ d'inscriptions enregistrées sur le site en fonction du temps t est approximativement décrit par l'expression

$$N(t) = \frac{11}{1 + 17 \cdot 2{,}6^{-0{,}32t}}$$

dans laquelle t est exprimé en semaines et $N(t)$ en milliers.

a) Combien d'inscriptions seront enregistrées 7 semaines après le début de la campagne publicitaire ?

b) Après quelle durée, l'association pourra-t-elle compter sur 5500 bénévoles ?

c) Dans ces conditions, combien de bénévoles se seront annoncés à long terme ?

Exercice 11 On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 + x^2 - 12x$.

a) Calculer $f(-1)$, $f(2)$, $f(5)$.

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe représentative de f avec l'axe vertical de coordonnées.

c) Même question avec l'axe horizontal.

d) Déterminer pour quelles valeurs de x, la valeur $f(x)$ est positive ou négative.

e) Esquisser le graphe de f.

3 La notion de limite

Considérons la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$. Il est clair que $x = 1$ n'appartient pas à son domaine de définition puisque $f(1)$ conduit à la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. On se demande toutefois vers quelle valeur s'approche $f(x)$ lorsque x tend vers 1. Voyons ce qu'on obtient quand x est de plus en plus proche de 1.

$$\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl}
f(0,9) & = & 0{,}51316701949 & f(1,1) & = & 0{,}488088481702 \\
f(0,99) & = & 0{,}50125628933 & f(1,01) & = & 0{,}498756211210 \\
f(0,999) & = & 0{,}50012506254 & f(1,001) & = & 0{,}499875062500 \\
f(0,9999) & = & 0{,}50001250060 & f(1,0001) & = & 0{,}499987501000 \\
f(0,99999) & = & 0{,}50000125000 & f(1,00001) & = & 0{,}499998750000 \\
f(0,999999) & = & 0{,}50000013000 & f(1,000001) & = & 0{,}499999000000.
\end{array}$$

On constate que $f(x)$ est aussi proche qu'on veut de $\frac{1}{2}$, pour autant que x soit assez proche de 1. Ainsi, bien que $f(1)$ n'existe pas (en effet, on tombe sur l'expression indéterminée $\frac{0}{0}$), le nombre $\frac{1}{2}$ est la valeur limite de $f(x)$ quand x tend vers 1. On notera alors

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2}.$$

Définition On dit que le nombre L est **la limite de la fonction f lorsque x tend vers a**, si $f(x)$ est arbitrairement proche de L pour autant que x soit assez proche de a. Autrement dit, $f(x)$ se rapproche de L quand x tend vers a; dans ce cas, on note

$$L = \lim_{x\to a} f(x).$$

Exemple 3 $\lim_{x\to 4}(2x-3) = 5, \qquad \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x} - 1\right) = 0.$

Exercice 12 Calculer les limites suivantes si elles existent. Dans le cas contraire, expliquer pourquoi la limite n'existe pas.

a) $\lim_{x\to 5} \frac{5x}{5+x}$

b) $\lim_{x\to -3} \frac{x-3}{x^2+3}$

c) $\lim_{x\to 3} \frac{x-2}{x+2}$

d) $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x+2}$

e) $\lim_{x\to -2} \frac{x+3}{x+2}$

f) $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-x-6}$

g) $\lim_{x\to 2} \frac{1}{4-2x}$

h) $\lim_{x\to 1} \frac{(3x-1)^2}{(2x+1)^3}$

i) $\lim_{x\to 4} \sqrt{25-x^2}$

j) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2+4}{x^3+8}$

Exemple 4 *Soit, à calculer, la limite* $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x-2}$. *L'évaluation en* $x = 2$ *du quotient* $\frac{x^2+x-6}{x-2}$ *conduit à la* ***forme indéterminée*** $\frac{0}{0}$. *Il est possible de lever cette singularité en factorisant le numérateur. On obtient alors*

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\cdot(x+3)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x+3}{1} = 5.$$

Exemple 5 *Pour démontrer que la limite* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ *est bien égale à* $\frac{1}{2}$*, on applique l'astuce algébrique suivante.*

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)\cdot(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

Exercice 13 Calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{x^2-x-12}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$

e) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+x-6}{-3x^2+6x+45}$

f) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2+x-6}{3x^3+8x^2+8x+8}$

3.1 Théorèmes sur les limites

Si les limites $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L_1$ et $\lim\limits_{x\to a}g(x)=L_2$ existent, alors

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=L_1+L_2,$$
$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=L_1\cdot L_2,$$
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L_1}{L_2},\quad \text{si}\quad L_2\neq 0.$$

Autrement dit :

- La limite d'une somme est égale à la somme des limites.
- La limite d'un produit est égale au produit des limites.
- La limite d'un quotient est égale au quotient des limites si la limite du dénominateur n'est pas nulle.

En vertu de ces théorèmes, le calcul de la limite d'une fonction quelconque revient aux calculs des limites correspondantes pour les fonctions élémentaires qui la constituent.

Exemple 6 *Calculons la limite* $\lim\limits_{x\to 3}\left[\dfrac{x^2-9}{x-3}\cdot(4x-5)+(5x-7)\right]$ *en appliquant les théorèmes précédents. On a alors*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\left[\frac{x^2-9}{x-3}\cdot(4x-5)+(5x-7)\right] &= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\cdot(x+3)}{x-3}\cdot\lim_{x\to 3}(4x-5)+\lim_{x\to 3}(5x-7)\\ &= 6\cdot 7+8\\ &= 50.\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 3}\left[\frac{x^2-9}{x-3}\cdot(4x-5)+(5x-7)\right] = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\cdot(x+3)}{x-3}\cdot\lim_{x\to 3}(4x-5)+\lim_{x\to 3}(5x-7) = 6\cdot 7+8 = 50.$$

Exercice 14 Calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-1}{x-1}+x+3\right)$

b) $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{3h^3-2h^2+h}{h^2-3h}\right)$

c) $\lim\limits_{h\to 0}(3+h)\cdot(5+2h+h^2)$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-2x}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{(x-1)^2}$

f) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+x-1}{x^3+1}$

3.2 Limite à l'infini

On considère la fonction f définie par $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$. On se pose la question de savoir vers quelle valeur s'approche $f(x)$ quand x positif devient de plus en plus grand. On calcule donc

$$
\begin{array}{lcl}
f(1) & = & 2 \\
f(10) & = & 2{,}59374246010 \\
f(100) & = & 2{,}70481382942 \\
f(10^3) & = & 2{,}71692393224 \\
f(10^4) & = & 2{,}71814592683 \\
f(10^5) & = & 2{,}71826823717 \\
f(10^6) & = & 2{,}71828046932 \\
f(10^7) & = & 2{,}71828169255 \\
f(10^8) & = & 2{,}71828181487 \\
f(10^9) & = & 2{,}71828182709.
\end{array}
$$

Il semble que $f(x)$ se rapproche du nombre e d'Euler[1] quand x devient très grand. On notera[2] alors

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Définition. On dit que le nombre L est **la limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$** (respectivement vers $-\infty$), si $f(x)$ est arbitrairement proche de L pour autant que x soit assez grand positif (respectivement assez grand négatif); on note alors

$$L = \lim_{x \to +\infty} f(x), \qquad \text{respectivement} \qquad L = \lim_{x \to -\infty} f(x).$$

Remarque. Les résultats relatifs à la limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient restent valables pour une limite à l'infini.

Exemple 7 (1) *Calculons la limite suivante* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 7x + 1}{x^2 + 3x - 5}$. *Lorsqu'on donne à x des valeurs tendant vers $+\infty$, on aboutit à la* ***forme indéterminée*** $\frac{+\infty}{+\infty}$. *La limite se calcule en divisant le numérateur et le dénominateur*

[1] **Leonhard Euler**, mathématicien suisse (1707-1783). Il est le principal artisan de l'essor de l'analyse qu'il réorganisa autour du concept fondamental de fonction. Il exerÂIJa sa puissance inventive dans tous les domaines de la physique mathématique.

[2] On doit le symbole ∞ de l'infini au mathématicicien anglais **John Wallis** (1616-1703).

de la fraction par x^2. Ainsi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-7x+1}{x^2+3x-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2-\overbrace{\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}}^{\to 0}}{1+\underbrace{\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}_{\to 0}} = \frac{2}{1} = 2.$$

Exemple 8 *L'estimation de la limite* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x-5}{x^2-4x+9}$ *conduit également à la forme indéterminée* $\frac{-\infty}{+\infty}$. *En divisant les deux termes de la fraction par x^2, on obtient*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-5}{x^2-4x+9} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}^{\to 0}}{1-\underbrace{\frac{4}{x}+\frac{9}{x^2}}_{\to 0}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Exemple 9 *La limite* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{8x^3-5x+1}{2x^2-x}$, *dont l'estimation débouche aussi sur* $\frac{-\infty}{+\infty}$, *n'existe pas. En effet, quand $x\to-\infty$,*

$$\frac{8x^3-5x+1}{2x^2-x} = \frac{\overbrace{8x}^{\to-\infty}-\overbrace{\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}^{\to 0}}{2-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}} \longrightarrow -\infty.$$

3.3 Limite à l'infini d'une fraction rationnelle

Sur la base des exemples traités ci-dessus, on peut énoncer le résultat suivant.

Théorème. Soit une fraction rationnelle

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{h_n x^n + \cdots + h_1 x + h_0}{b_d x^d + \cdots + b_1 x + b_0}.$$

La limite $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ est donnée par la limite $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{h_n x^n}{b_d x^d}$ du quotient des termes de plus hauts degrés du numérateur et du dénominateur de la fraction.

Autrement dit, en cas de compétition conduisant à la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$, la limite se calcule par celle du quotient des termes de dominants.

Exercice 15 Calculer les limites à l'infini suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{3x-100}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^4-3x^2-12x}{5x^3+11x^2-7x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3+3x^2-1}{x^3-2x^2}$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+3x^2-1}{x^4+3x^2-x+1}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3+3x^2-1}{x^2-2x}$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2(x-1)^2}{x^2+3x}$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^5-5x^3-3x}{x\cdot(x^2-3)^2}$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3(2-x)^3}{(x-2)^3}$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7000x^{12}+9500x^{11}}{2x^{13}}$

3.4 Limites à gauche et à droite

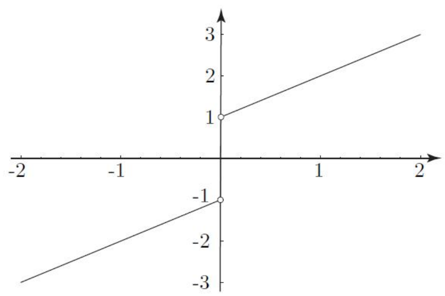
On peut s'intéresser au calcul de la limite d'une fonction f lorsque x tend vers a en demeurant supérieur ou égal à a; si cette limite existe, on l'appelle **limite à droite** de f quand x tend vers a et on la note alors $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$. De même, on peut considérer la **limite à gauche** de f lorsque x tend vers a par des valeurs inférieures et on la note $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

Exemple 10 *Considérons la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{|x|+x^2}{x}$. Pour $x \geq 0$, on a $|x| = x$. La limite à droite est donc donnée par*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|+x^2}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x\cdot(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} (1+x) = 1.$$

En revanche, pour $x < 0$, $|x| = -x$. D'où la limite à gauche

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x| + x^2}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x \cdot (-1 + x)}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-1 + x) = -1.$$



Remarque. Pour que la limite $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, il faut que $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$.

Exercice 16 On appelle **partie entière** de x, et on note $[x]$, le plus grand entier inférieur ou égal à x. Ainsi, par exemple, $[3{,}1] = 3, [-4{,}25] = -5$, $[7] = 7$. Calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} [2x + 3]$

b) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} [2x + 3]$

c) $\lim\limits_{x \to -4^-} [3x - 2]$

d) $\lim\limits_{x \to -3^+} [-x + 1]$

Exercice 17 Calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{2x - x^2}{4|x|}$

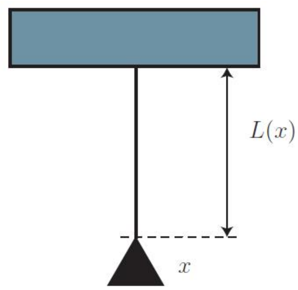
b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{4|x|}{2x - x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2x - [x]}{|x|}$

d) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{2[x] - 3x}{x}$

4 Continuité

Exemple 11 *Si une masse x (en kg) est attachée à une corde élastique supportant une masse maximale M, alors la longueur $L(x)$ (en cm) de la corde* *est fonction de x. Des valeurs voisines $x \simeq a$ de la charge conduisent à des longueurs voisines $L(x) \simeq L(a)$ de la corde. On dit que l'élongation $L(x)$ dépend continément de la charge x. Dans le domaine de continuité de la fonction L, des causes voisines produisent des effets voisins. Quand x se rapproche de la charge de rupture M, la longueur $L(x)$ tend vers la longueur maximale $L(M)$. Si x dépasse cette valeur M, même de manière infinitésimale, la corde se rompt et sa longueur n'est plus définie. Il y a donc discontinuité de la fonction L en M.*



Exemple 12 *Lorsqu'on pose la tête d'une allumette sur la plaque chaude d'une cuisinière, sa température $T(t)$ croît continément en fonction du temps t jusqu'à atteindre une température limite T_M au-delà de laquelle l'allumette prend feu. À cet instant précis (disons t_M), la température «fait un saut». La fonction T a donc une discontinuité en t_M.*

Définition. On dit qu'une fonction f est **continue** en $x = a$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. La fonction f est bien définie en a, c'est-à-dire que le nombre $f(a)$ existe (peut être calculé).
2. On a $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Autrement dit, si f est continue en a, alors on a l'implication suivante : $x \simeq a \implies f(x) \simeq f(a)$.

Exemple 13 *Soit la fonction f définie par* $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } x < -3 \\ 2x+1 & \text{si } x \geq -3. \end{cases}$

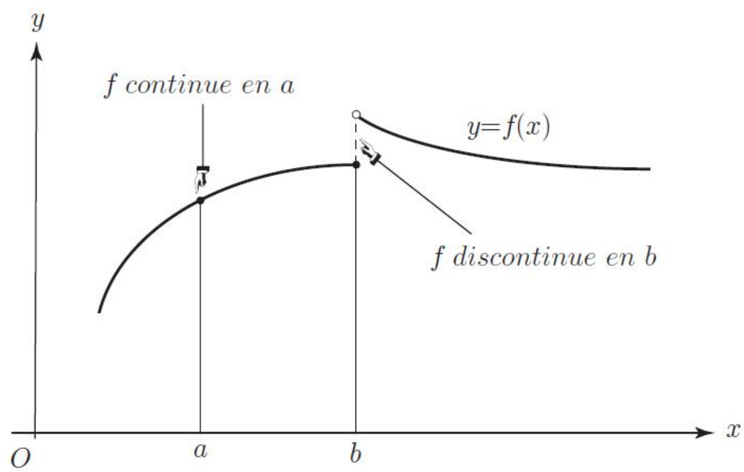
La première condition est bien remplie puisque $f(x)$ est définie pour tout

x. Il est évident, de par sa définition, que f est continue en tout $x \neq -3$. Elle est aussi continue en -3. En effet, $f(-3) = 2 \cdot (-3) + 1 = -5$ existe. De plus, on a

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^-} (x-2) = -5 \quad \textit{et} \quad \lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} (2x+1) = -5.$$

et donc, $\lim_{x \to -3} f(x) = -5 = f(-3)$.

Intuitivement, on peut considérer qu'une fonction f est continue en a, si sa courbe représentative est continue au voisinage du point $\big(a; f(a)\big)$; c'est-à-dire qu'on peut la tracer sans lever le crayon. Le dessin ci-dessous représente le graphe d'une fonction continue en a et discontinue en b.



Remarque. La notion de continuité est une propriété locale d'une fonction (on parle d'une fonction continue en un point). Le **domaine de continuité** d'une fonction f est l'ensemble des x en lesquels elle est continue. On dira qu'une fonction est **continue** si elle est **continue en tous les points** de son domaine de définition.

Exercice 18 Donner le domaine de continuité de chacune des fonctions définies comme suit.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - 1 & \text{si } x < 2 \\ -x + 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ 4 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

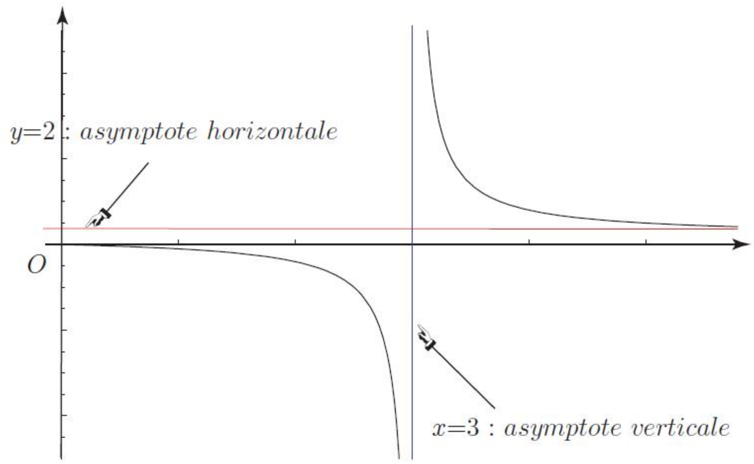
c) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

d) $i(x) = \dfrac{3}{x - 4}$

5 Asymptotes

Considérons la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$. Elle est continue partout sauf en $x = 3$. Au voisinage de cette discontinuité, on observe que $\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$ et que $\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$. Géométriquement, ceci s'illustre par le fait que la courbe représentative de f fuit vers $\pm\infty$, en collant à la droite verticale $x = 3$, à mesure que x se rapproche de 3 par la gauche ou par la droite. Cette droite est appelée **asymptote verticale** de la fonction f.

Par ailleurs, comme $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$, la courbe va s'écraser sur la droite horizontale d'équation $y = 2$ quand x tend vers $\pm\infty$. Cette droite est appelée **asymptote horizontale** de f.



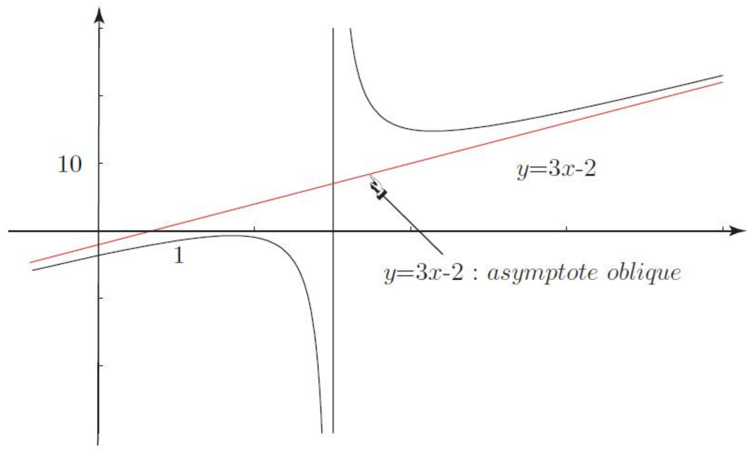
Considérons maintenant la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3x^2 - 11x + 11}{x - 3}$, pour laquelle la droite $x = 3$ est aussi asymptote verticale. Comme les limites $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} 3x$ n'existent pas, cette fonction n'admet pas d'asymptote horizontale. En revanche, en écrivant, après division euclidienne, la fonction f sous la forme

$$f(x) = 3x - 2 + \frac{5}{x - 3},$$

on constate que le terme $\frac{5}{x-3}$ devient évanescent à mesure que x tend vers $\pm\infty$, ce qui signifie que, pour $x \to \pm\infty$,

$$f(x) = 3x - 2 + \underbrace{\frac{5}{x - 3}}_{\to 0} \simeq 3x - 2$$

et donc que $f(x)$ se comporte comme la fonction affine $3x - 2$ qui, elle, est représentée par la droite d d'équation $y = 3x - 2$. On dit alors que cette droite est **asymptote oblique** de f.



Définitions et recherche des asymptotes. De manière générale, on définit trois types d'asymptotes.

- **Asymptote verticale** : La droite d'équation $x = a$ est dite asymptote verticale de f, si l'une au moins des conditions suivantes est vérifiée
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty.$$
- **Asymptote horizontale** : On dit que la fonction f admet la droite d'équation $y = b$ comme asymptote horizontale quand x tend vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$) si
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b, \quad \text{respectivement} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$
- **Asymptote oblique** : On dit que la fonction f admet la droite d'équation $y = p \cdot x + h$ comme asymptote oblique quand x tend vers $+\infty$, si
$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (px + h)] = 0.$$
Ainsi, la pente p et l'ordonnée à l'origine h s'obtiennent par le calcul des limites suivantes
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = p, \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - px) = h,$$
(propriété analogue en $-\infty$). Pour une fonction rationnelle, la division donne directement le second membre de l'équation de l'asymptote.

Exercice 19 Déterminer les éventuelles asymptotes de chacune des fonctions définies comme suit.

a) $f(x) = \dfrac{3x-2}{x+4}$

b) $g(x) = -\dfrac{2x-1}{x^2-9}$

c) $h(x) = 2x - 5 - \dfrac{3}{x-4}$

d) $i(x) = \dfrac{-2x^2-3x+33}{x+5}$

Exercice 20 Il ressort d'observations que, dans une ville, la densité de population D (en habitants par km^2) est fonction de la distance x (en km) par rapport au centre. Cette fonction empirique est définie par

$$D(x) = \frac{250x^2 + 5000x + 9000}{x^2 + 36}$$

a) Comment varie la densité de population lorsqu'on s'éloigne du centre de la ville de 20 à 25 km ?

b) Quelle densité constatera-t-on à un endroit très éloigné du centre ?

c) Dans quelles zones de la ville la population excèdera-t-elle 650 habitants par km^2 ?

Exercice 21 Une compagnie d'assurances couvrant les dégâĂřts sur des cultures agricoles a élaboré un modèle exprimant le coét $C(x)$ (en millions d'euros) d'un sinistre en fonction de la part x (en %) de la surface touchée par le sinistre. Cette fonction s'exprime sous la forme

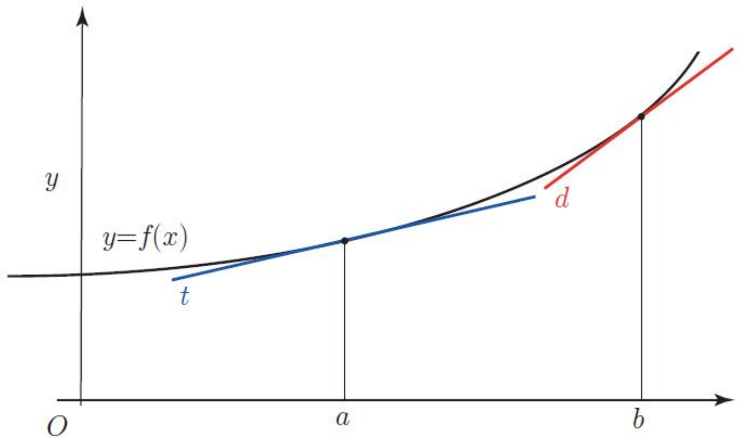
$$C(x) = \frac{20x}{101 - x}$$

a) Comparer $C(100)$ à $C(90)$.

b) Représenter graphiquement la fonction C et préciser son comportement quand x s'approche de 100.

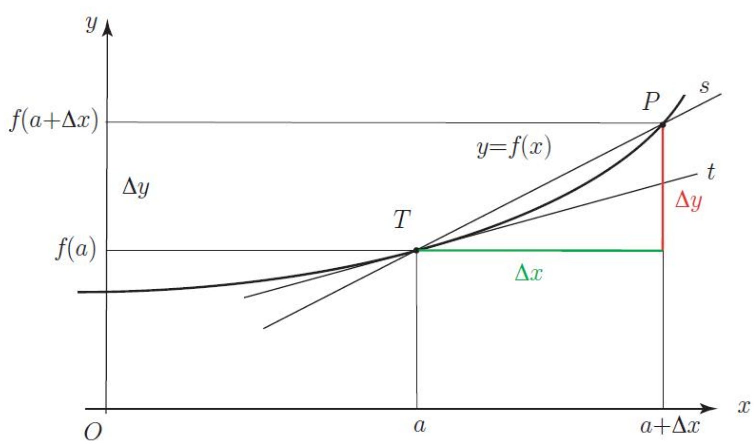
6 Nombre dérivé - Fonction dérivée

La courbe ci-dessous représente le graphe d'une fonction continue croissante.



Manifestement, la fonction f croît plus rapidement en b qu'en a, comme on le constate en comparant les pentes des tangentes à la courbe aux points d'abscisses a et b. Il est clair que la pente de la droite d est plus forte que celle de la tangente t. La pente de la tangente à la courbe mesure ainsi la *«vitesse de croissance»* de la fonction en un point donné. Notre projet sera désormais le suivant.

Projet. Déterminer la pente de la droite t tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $T(a; \ldots)$ d'abscisse a.



Soit une sécante s, liant le point T à un autre point très voisin $P\big(a+\Delta x; f(a+\Delta x)\big)$ sur la courbe $\mathcal{C}$. Si Δx est trèès petit, alors la pente de la sécante s est très proche de la pente de la tangente t. Or, la pente de la sécante vaut

$$S = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

Ainsi, quand Δx tend vers 0, on aura

$$\begin{array}{lcl} \text{la sécante } s & \longrightarrow & \text{la tangente } t; \\ \text{la pente de } s & \longrightarrow & \text{la pente de } t; \\ \dfrac{\Delta y}{\Delta x} & \longrightarrow & p; \\ \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} & = & p. \end{array}$$

Définition. Si elle existe, la limite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ est appelée **nombre dérivé** de la fonction f en a et est notée $f'(a)$. On a donc

$$\boxed{f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}}$$

Géométriquement, $f'(a)$ décrit la pente de la droite tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$ au point T d'abscisse a. Dans ce cas, on dit que la fonction f est **dérivable** en a.

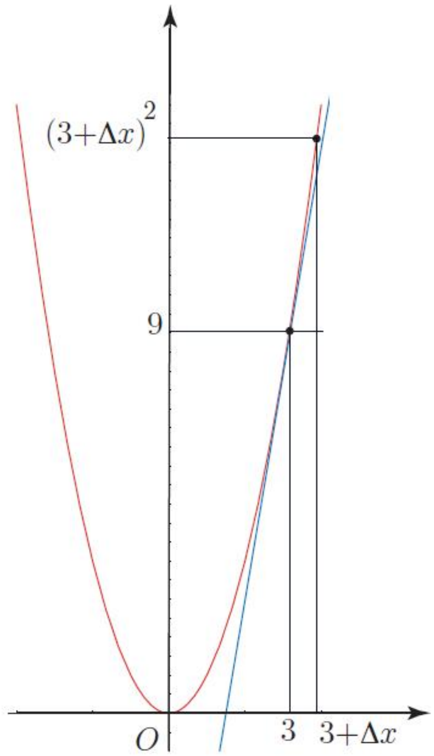
Exemple 14 *Déterminons $f'(a)$ pour $f(x) = 2x + 1$. Puisque la courbe $\mathcal{C} : y = f(x)$ est en fait une droite de pente 2, qui est confondue avec sa tangente, on a donc $f'(a) = 2$ pour tout a. Ce que confirme la méthode de calcul des accroissements. En effet*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \frac{2(a + \Delta x) + 1 - (2a + 1)}{\Delta x} = \frac{2\Delta x}{\Delta x}.$$

Ainsi

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2.$$

Exemple 15 *Soit $f(x) = x^2$; calculons $f'(3)$, c'est-à-dire la pente de la tangente à la parabole au point $(3; 9)$.*



On a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \frac{(3+\Delta x)^2 - 3^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x \cdot (6+\Delta x)}{\Delta x} = 6 + \Delta x.$$

Ainsi

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} (6 + \Delta x) = 6.$$

En effectuant les mêmes calculs, on peut trouver les pentes des tangentes à la courbe aux points d'abscisses -1, 0, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 5. *On obtient alors les résultats suivants.*

Abscisse a	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	5	x
Pente $f'(a)$	-2	0	1	2	4	10	$2x$

Exercice 22 Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3$. Déterminer la pente de la tangente à sa courbe représentative au point d'abscisse 1, puis 2, puis 5 et x.

Exercice 23 Même question avec la fonction $f(x) = 1$.

6.1 Fonction dérivée

Si la fonction f est dérivable pour tous les nombres x d'un intervalle I, alors on dit que f **est dérivable dans** I. Dans ce cas, il est possible d'envisager la nouvelle fonction

$$\begin{array}{rcl} f' : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) = \text{ le nombre dérivé de } f \text{ en } x. \end{array}$$

Cette fonction s'appelle **la fonction dérivée de la fonction** f ou, par abus, **la dérivée** de la fonction f.

Notation. La notation ($expression$ en x)$'$ servira à désigner la dérivée de la fonction f définie par l'expression en x contenue dans la parenthèse. On notera donc, par exemple, $\left(x^2\right)' = 2x$.

Exemple 16 *Comme on vient de le voir, la fonction $f(x) = x^2$ est dérivable sur $I = \mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction*

$$\begin{array}{rcl} f' : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) = 2x. \end{array}$$

Exemple 17 *On a vu que $(1)' = 0$, $(x)' = 1$, $\left(x^2\right)' = 2x$. Si, plus généralement pour $n \geq 3$, on dérive $f(x) = x^n$, alors on obtient*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + (\Delta x)^2 \cdot R(x, \Delta x) - x^n}{\Delta x},$$

où $R(x, \Delta x)$ est un polynôme de degré $n - 2$ en x. Il s'ensuit que

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[nx^{n-1} + \Delta x \cdot R(x, \Delta x)\right] = nx^{n-1}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\boxed{\left(x^n\right)' = nx^{n-1}.}$

Exercice 24 Soit $f(x) = x^6$; déterminer $f'(x)$. Quelle est la pente de la droite tangente à la courbe représentative au point d'abscisse 2 ?

Remarque La définition et la méthode de calcul par quotients des accroissements permettent de déterminer les dérivées des fonctions élémentaires. On a, par exemple, les résultats suivants, dont certains seront établis plus loin par d'autres méthodes.

$f(x)$	c	x	x^2	x^3	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\ln(x)$	e^x
$f'(x)$	0	1	$2x$	$3x^2$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$\frac{1}{x}$	e^x

7 Les règles de dérivation

En général, le calcul de la dérivée d'une fonction quelconque à partir de la définition se révèle ardu. L'objectif consiste donc désormais à établir des règles de dérivation qui permettront de ramener le calcul de la dérivée d'une fonction «compliquée» à celui des fonctions élémentaires qui la constituent et dont les dérivées sont connues.

7.1 Dérivée d'une somme

Si f et g sont deux fonctions dérivables en x, alors la fonction somme $f+g$ l'est également et l'on a $(f+g)' = f' + g'$. Autrement dit

$$\boxed{[f(x)+g(x)]' = f'(x) + g'(x).}$$

Cette règle découle directement de la définition.

Exemple 18 *On a ainsi*

$$\left(x^2 + x^5\right)' = (x^2)' + \left(x^5\right)' = 2x + 5x^4$$

ou encore

$$\left(3x + e^x\right)' = (3x)' + \left(e^x\right)' = 3 + e^x.$$

Exercice 25 Déterminer $\left(x^4 + x^7\right)'$, $\left(5 + x^9\right)'$, $\left(e^x + x\right)'$.

7.2 Dérivée du produit d'une fonction par un nombre

Si $c \in \mathbb{R}$ est un nombre réel quelconque et si f est une fonction dérivable en x, alors la fonction $c \cdot f$ est également dérivable en x et sa dérivée est $(c \cdot f)' = c \cdot f'$. Plus précisément

$$\boxed{[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x).}$$

Exemple 19 *Cette règle, qui se déduit directement de la définition, permet d'écrire*

$$\big(7x^4\big)' = 7 \cdot \big(x^4\big)' = 7 \cdot 4x^3 = 28x^3 \qquad ou \qquad \big(-5 \cdot e^x\big)' = (-5) \cdot \big(e^x\big)' = -5 \cdot e^x.$$

Corollaire. En combinant ces deux dernières règles, avec le cas particulier $c = -1$, on obtient la règle de dérivation d'une différence de deux fonctions

$$\boxed{[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x).}$$

Exercice 26 Déterminer $\big(2x^6 + 3x^7\big)'$, $\big(5x^2 - 2x^5\big)'$, $\big(8e^x + 11\ln(x)\big)'$.

7.3 Dérivée d'un produit de deux fonctions

Si f et g sont deux fonctions dérivables en x, alors la fonction produit $f \cdot g$ l'est aussi.

Mise en garde. Attention ! **La dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées !** En effet, prenons par exemple $f(x) = g(x) = x$. On a $\big(f(x) \cdot g(x)\big)' = \big(x^2\big)' = 2x$. Or, $f'(x) \cdot g'(x) = 1 \cdot 1 = 1 \neq 2x$.

En fait la dérivée est donnée par : $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$; c'est-à-dire que

$$\boxed{[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).}$$

Cette dernière règle se déduit aussi de la définition, mais moins facilement que les autres règles.

Exemple 20 *On pourra donc écrire*

$$\big(x^3 \cdot (e^x + 1)\big)' = \big(x^3\big)' \cdot (e^x + 1) + x^3 \cdot (e^x + 1)' = 3x^2 \cdot (e^x + 1) + x^3 \cdot e^x$$

ou $\big[x^5(2x+4)\big]' = \big(x^5\big)' \cdot (2x+4) + x^5 \cdot (2x+4)' = 5x^4 \cdot (2x+4) + x^5 \cdot 2 = 12x^5 + 20x^4.$

Exercice 27 Calculer $\left(x^2 \cdot (4x^3 - 3x)\right)'$, $\left(\ln(x) \cdot x^4\right)'$

7.4 Dérivée d'un quotient

Si f et g sont deux fonctions dérivables en x et si $g(x) \neq 0$, alors la fonction quotient $\frac{f}{g}$ est également dérivable en x et sa dérivée est donnée par $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$. Ainsi

$$\boxed{\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}.}$$

Cette propriété se déduit de la précédente en dérivant les deux termes de l'égalité $g \cdot \frac{f}{g} = g$. Soulignons que **la dérivée d'un quotient n'est pas le quotient des dérivées**.

Exemple 21 *Avec cette règle, on a*

$$\begin{aligned}
\left(\frac{4x-1}{x^3}\right)' &= \frac{(4x-1)' \cdot x^3 - (4x-1) \cdot \left(x^3\right)'}{\left(x^3\right)^2} \\
&= \frac{4x^3 - (4x-1) \cdot 3x^2}{x^6} \\
&= \frac{-8x^3 + 3x^2}{x^6} \\
&= \frac{-8x+3}{x^4}
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{x^2}{e^x}\right)' = \frac{(x^2)' \cdot e^x - x^2 \cdot (e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{x \cdot (2-x)}{e^x}.$$

Exercice 28 Calculer

$$\left(\frac{x^2-1}{3x+1}\right)', \qquad \left(\frac{8x+1}{x^2+x-3}\right)'$$

Exercice 29 Dériver, par rapport à x.

a) 5 **b)** $4x+3$

c) $3 \cdot x^2$ **d)** $-11 \cdot x^5$

e) $17x^4 - 13x^3 + 5x^2 - 6x + 2$ **f)** $2 \cdot \sqrt{x} + 3 \cdot e^x - 4x^2$

g) $3x^2 \cdot \ln(x)$ **h)** $5x^2 \cdot e^x$

Exercice 30 Même question.

a) $(x+5) \cdot (x-3)$ **b)** $(3x^2+5) \cdot (x^2-1)$

c) $\frac{1}{x} \cdot (1 - \ln(x))$ **d)** $e^x \cdot \sqrt{x}$

e) $\dfrac{3x+4}{2-5x}$ **f)** $\dfrac{x^3}{1-x^2}$

g) $\dfrac{5x^2-x+3}{x^3-4x^2+x-1}$ **h)** $\dfrac{2x+3}{x^2+1}$

7.5 Dérivée d'une fonction composée

Rappel. Si f et g sont deux fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors on peut définir la fonction **composée** $f \circ g$ par

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big).$$

Exemple 22 *Soient les fonctions f et g définies par $f(x) = -x^2 + 2x - 7$ et $g(x) = 3x - 1$. La fonction $f \circ g$ est alors définie comme suit*

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = -(3x-1)^2 + 2 \cdot (3x-1) - 7 = -9x^2 + 12x - 10.$$

Si f est une fonction dérivable en $g(x)$ et g une fonction dérivable en x, alors la fonction composée $f \circ g$ est dérivable en x et sa dérivée est donnée par $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$ et donc

$$\boxed{\Big[f\big(g(x)\big)\Big]' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x).}$$

Ainsi, on a

fonction	dérivée
$f(x)$	$f'(x)$
$f(\clubsuit)$	$f'(\clubsuit) \cdot \clubsuit'$

Le facteur $\clubsuit'$ est appelé **dérivée intérieure**. Remarquons que, dans le cas particulier où $\clubsuit = x$, on retrouve bien

$$f'(x) = [f(\clubsuit)]' = f'(\clubsuit) \cdot \underbrace{\clubsuit'}_{1}.$$

Exemple 23 (1) *Reprenons l'exemple précédent, dans lequel* $f(x) = -x^2 + 2x - 7$ *et* $g(x) = 3x - 1$. *Comme* $f'(x) = -2x + 2$ *et* $g'(x) = 3$, *on aura* $f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = (-2 \cdot (3x - 1) + 2) \cdot 3 = -18x + 12$. *Ce qui est bien*

$$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = (-9x^2 + 12x - 10)'.$$

Exemple 24 (2) *Cette règle permet de calculer la dérivée suivante*

$$\big[(x^2+3)^{10}\big]' = 10(x^2+3)^9(x^2+3)' = 10(x^2+3)^9 2x = 20x(x^2+3)^9$$

Exercice 31 Calculer la dérivée de chacune des fonctions définies comme suit.

a) $(x^2 - 1)^{10}$

b) $\sqrt{1 - 4x^2}$

c) $(4x^3 - 5x^2 + 2x - 7)^{11}$

d) $\dfrac{2x}{(x-1)^2}$

e) $\sqrt{e^x}$

f) $\ln(3x^2 + 4x + 1)$

g) $3 \cdot e^{4x}$

h) e^{x^4}

Exercice 32 Idem.

a) $\dfrac{x}{\ln(x)}$

b) $\sqrt{x^2+1}$

c) $\ln(x^2)$

d) $\dfrac{(2x+1)^2}{x-2}$

e) $(x-1)^3 \cdot (2x+1)^2$

f) $\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

g) $5 \cdot (\ln(x))^5$

h) $(\sqrt{x})^8$

8 Équation de la tangente

La droite t tangente au graphe d'une fonction f au point d'abscisse a admet pour équation explicite

$$\boxed{t \ : \ y = f'(a) \cdot (x-a) + f(a).}$$

Le coefficient de x étant $f'(a)$, la pente de cette droite est effectivement égale au nombre dérivé. Par ailleurs, le point $T\big(a; f(a)\big)$ est bien sur t, comme on le vérifie en posant $x = a$ dans l'équation.

Exemple 25 *Déterminons l'équation de la droite tangente à la courbe $y = x^2$ au point d'abscisse 3. Avec la formule ci-dessus, comme $f(3) = 9$ et $f'(3) = 6$, l'équation s'écrit $y = 6(x-3) + 9$, c'est-à-dire $y = 6x - 9$.*

Exercice 33 Donner l'équation de la tangente à la courbe d'équation

$$y = \frac{x^2 - 2x + 5}{x+1}$$

au point d'abscisse 2.

Exercice 34 Soit la courbe $\mathcal{C}$ définie par la relation $y = \sqrt{2x+1}$. Donner l'équation cartésienne de la droite t tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 4.

Exercice 35 Soit la courbe $\mathcal{C}$ définie par la relation $y = \dfrac{x^2-1}{2x+1}$. Donner l'équation cartésienne de la droite t tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -1.

9 Variation de f et signe de sa dérivée

Définition. On dit qu'une fonction f est **croissante** en x si et seulement si, au voisinage de x, les accroissements $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ et Δx ont **le même signe**. Elle est **décroissante** en x si les accroissements Δy et Δx ont **des signes opposés**.

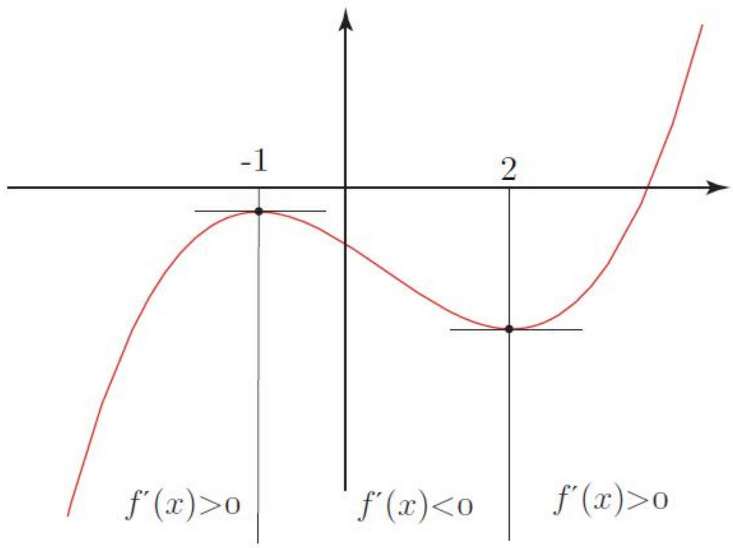
Rappelons que le nombre $f'(a)$ est la pente de la droite t tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $T\big(a; f(a)\big)$. On en déduit alors le résultat suivant.

pente $> 0 \iff f'(a) > 0 \iff$ la fonction f est strictement **croissante** en a;

pente $< 0 \iff f'(a) < 0 \iff$ la fonction f est strictement **décroissante** en a;

pente $= 0 \iff f'(a) = 0 \iff$ la fonction f admet un **point à tangente horizontale** en a.

Exemple 26 *Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^3 - \frac{3}{4} \cdot x^2 - 3x - 3$. Pour déterminer sa variation, on calcule la dérivée $f'(x) = \frac{3}{2} \cdot x^2 - \frac{3}{2} \cdot x - 3 = \frac{3}{2} \cdot (x-2) \cdot (x+1)$. Il s'agit d'un polynôme de degré 2 qui prend des valeurs positives en dehors de l'intervalle $[-1; 2]$ limité par ses zéros (-1 et 2). Ainsi, f est strictement croissante hors de cet intervalle et décroissante à l'intérieur. Notons que, comme $f'(-1) = 0 = f'(2)$, la courbe représentative admet des points à tangente horizontale en $x = -1$ et $x = 2$.*



Exercice 36 Discuter la variation de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 4x + 11$.

Exercice 37 Même question pour $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 120x + 19$.

Exercice 38 Même question pour $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{2x}$.

10 Dérivées d'ordre supérieur, courbure et convexité

10.1 Dérivées d'ordre supérieur

Soit une fonction f «assez régulière»; si elle est dérivable, alors, comme on l'a vu, sa dérivée est une nouvelle fonction f'.

Il se peut alors que f' soit à nouveau dérivable, auquel cas sa dérivée est une nouvelle fonction, notée f'', et appelée **deuxième dérivée** de f.

Si f'' est dérivable, alors sa dérivée est notée $f^{(3)}$ et est appelée **troisième dérivée** de f.

Il se peut donc qu'une fonction f possède des dérivées d'ordre supérieur : f'', $f^{(3)}$, $f^{(4)}$, $f^{(5)}$, $f^{(6)}$, ...

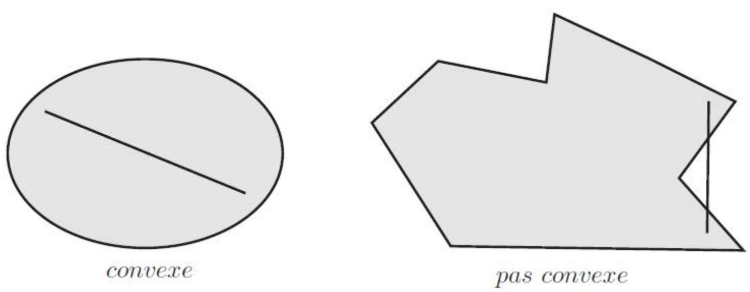
Exemple 27 *La fonction f définie par $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 9$ a pour dérivées successives*

$$f'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 10x - 8, \quad f''(x) = 36x^2 - 12x + 10,$$

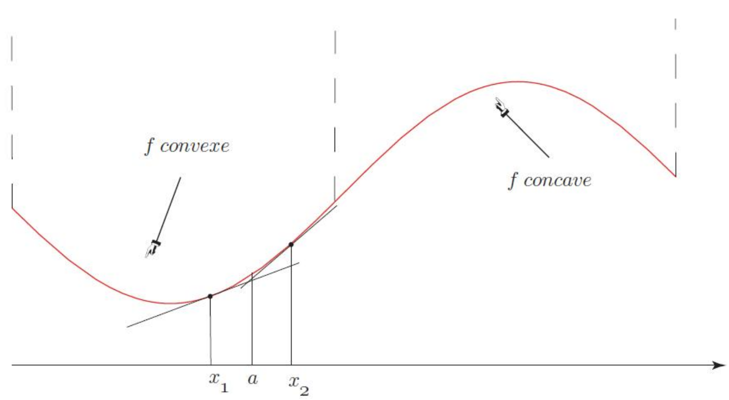
$$f^{(3)}(x) = 72x - 12, \quad f^{(4)}(x) = 72, \quad f^{(n)}(x) = 0, \text{ pour tout } n \geq 5.$$

10.2 Convexité, courbure et dérivée seconde

Définitions. Un sous-ensemble du plan $\mathbb{R}^2$ est dit **convexe** s'il contient entièrement tout segment reliant un couple quelconque de ses points.



Une fonction f est dite **convexe** en $x = a$ si, dans un voisinage du point $A\big(a; f(a)\big)$, les points situés au-dessus de sa courbe représentative forment un ensemble convexe. Si, au contraire, ce sont les points situés au-dessous de sa courbe représentative qui forment un ensemble convexe, alors la fonction est dite **concave**.

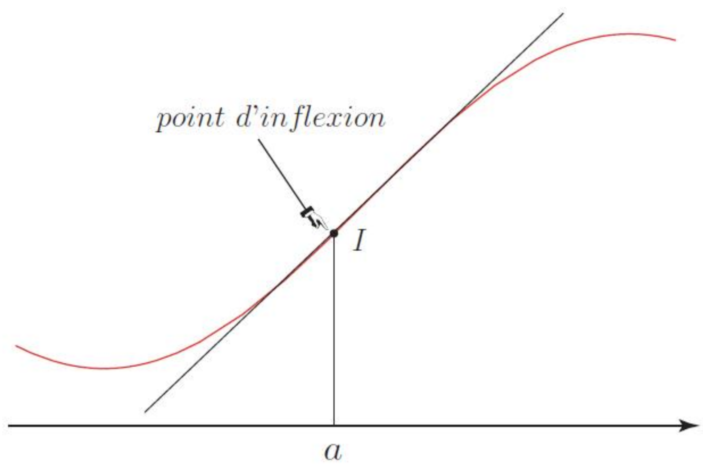


Soit une fonction f convexe au voisinage de a; si $x_1 < x_2$ appartiennent à ce voisinage, alors la pente de la tangente au graphe de f en $\big(x_1; f(x_1)\big)$ est inférieure à celle de la tangente au point $\big(x_2; f(x_2)\big)$. Ainsi, la dérivée f' est une fonction croissante en a et il s'ensuit que $f''(a) > 0$. Plus généralement, le résultat suivant est valable.

$$\boxed{\begin{array}{lcl} f \text{ est convexe en } a & \iff & f''(a) > 0; \\ f \text{ est concave en } a & \iff & f''(a) < 0. \end{array}}$$

Ainsi, le signe de la deuxième dérivée f'' renseigne sur l'orientation de la courbe représentative de f. En outre, plus $|f''(a)|$ est grande, plus la courbure est forte au voisinage de a. À l'inverse, plus $|f''(a)|$ est petite et plus la courbe est aplatie. Notons que, pour la fonction $f(x) = p \cdot x + h$, qui est représentée par une droite, $f''(x) = 0$ et la courbure est nulle partout.

Définition On dit que la fonction f possède **un point d'inflexion** en $x = a$ si la convexité de f change en a. Dans ce cas, si $f''(a)$ existe, alors $f''(a) = 0$.



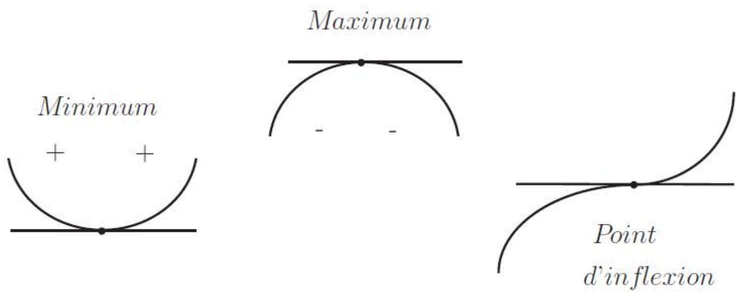
10.3 Classification des extrema

Pour une fonction f «assez régulière», l'étude du signe de $f''(a)$ permet de déterminer la nature de ses points à tangente horizontale (extrema). On a le résultat suivant.

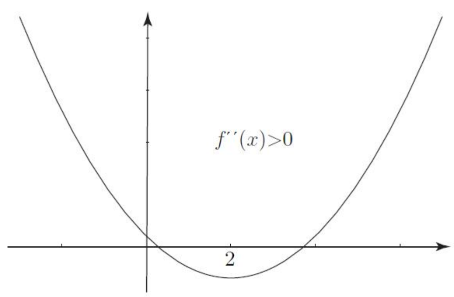
$$f'(a) = 0 \text{ et } f''(a) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{le point est un minimum;}$$

$$f'(a) = 0 \text{ et } f''(a) < 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{le point est un maximum;}$$

$$f'(a) = 0, f''(a) = 0 \text{ et } f''(x) \text{ change de signe en } a \quad \Longleftrightarrow \quad \text{il s'agit d'un point d'inflexion.}$$

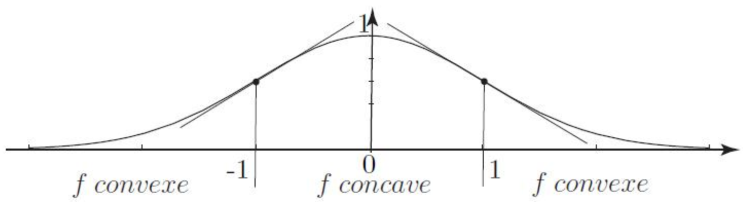


Exemple 28 (1) *La fonction f définie par $f(x) = x^2 - 4x + 1$ a pour dérivées : $f'(x) = 2x - 4$ et $f''(x) = 2$. Comme $f''(x) > 0$ pour tout x, la fonction f est convexe partout. Son point à tangente horizontale, en $x = 2$, est donc un minimum. Rien d'étonnant puisque la courbe représentant le graphe de f est une parabole admettant ce point pour sommet.*



Exemple 29 *Considérons la fonction f définie par $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Puisque $f'(x) = -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ et $f''(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, cette fonction admet un point à tangente horizontale d'abscisse 0. Comme $f''(0) = -1 < 0$, il s'agit d'un maximum. Notons que f admet deux points d'inflexion en $x = -1$ et $x = 1$.*

Comme le signe de $f''(x)$ coïncide avec celui de $x^2 - 1$, la fonction f est concave entre -1 et 1 et convexe en dehors de l'intervalle $[-1; 1]$.



Exercice 39 Examiner la courbure de la courbe représentative de la fonction f définie par

$$f(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^3 - \frac{3}{2} \cdot x^2 + 4.$$

11 Exercices d'évaluation

Exercice 40 Soit la fonction f définie par

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 5x^2 + \frac{64}{3}.$$

a) Vérifier que $f(8) = 0$ et démontrer que f n'a pas d'autres zéros.

b) Déterminer les coordonnées des éventuels extrema de f.

c) En quel point la croissance de cette fonction est-elle la plus forte ?

d) Donner les équations des tangentes au graphe de f ayant pour pente 8 .

Exercice 41 Pour $x \geq 0$, la fonction V définie par

$$V(x) = \frac{300x}{x^2 + 9}$$

décrit l'évolution de la valeur (en dollars) d'une action cotée en Bourse (x en mois).

a) Un investisseur a conservé ce titre tant que la valeur de l'action était au moins de 30 dollars. Pendant quelle durée a-t-il été actionnaire ?

b) Quelle valeur maximale cette action a-t-elle atteinte ?

c) Après 6 mois, la valeur de ce titre était-elle en train de croître ou de décroître ? Donner une approximation linéaire affine de la fonction $V(x)$ en déterminant l'équation de la tangente au graphe de V au point d'abscisse 6.

d) Pour $x > 0$, la courbe représentative de V possède-t-elle un point d'inflexion ?

e) Esquisser le graphe de cette fonction.

Exercice 42 Une campagne de publicité massive vante les mérites d'un nouveau produit. La proportion $P(t)$, en %, de la population informée en fonction du temps t, en semaines, est donnée par l'expression

$$P(t) = \frac{100 \cdot e^t}{99 + e^t}.$$

a) La fonction f admet-elle une asymptote ? Dans l'affirmative, donner son équation.

b) Calculer la dérivée $P'(t)$ et discuter ses valeurs en fonction de $t \geq 0$.

c) Montrer qu'on a la relation

$$P'(t) = -\frac{1}{100} \cdot P^2 + P.$$

d) En dérivant la relation précédente, établir que P atteint un point d'inflexion quand $P(t) = 50$; trouver alors t.

e) Esquisser le graphe de cette fonction.

12 Compléments théoriques et solutions d'exercices

12.1 Les intervalles de $\mathbb{R}$

Il est souvent nécessaire de pouvoir indiquer des ensembles de nombres. On parle d'*intervalle* entre a et b pour indiquer tous les nombres entre une valeur a et une valeur b, et selon si l'un ou l'autre des deux extremités est incluse on indiquera

- $[a, b]$ pour l'intervalle entre a et b avec a et b inclus.
- $[a, b[$ pour l'intervalle entre a et b avec a inclus et b exclu.
- $]a, b]$ pour l'intervalle entre a et b avec a exclu et b inclu.
- $]a, b[$ pour l'intervalle entre a et b avec a et b exclus.

12.2 D'autres sous-ensembles de $\mathbb{R}$

Pour indiquer des ensembles de nombres isolés on utilise les symboles $\{$ et $\}$, en séparant les différents élements par un ";" ou une virgule. Ainsi par exemple $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ indique l'ensemble des cinq nombres entiers entre 1 et 5. Pour indiquer d'autres sous-ensembles de nombres réels, le symbole d'union $\cup$, ou de soustraction $-$ sont aussi utilisés. Ainsi par exemple $\mathbb{R} - \{5\}$ indique l'ensemble de tous les nombres réels excepté le nombre 5; l'ensemble $[0, 2] \cup [4, 7]$ indique l'ensemble de tous les nombres réels compris entre 0 et 2, ou entre 4 et 7.

12.3 Solutions d'exercices

Exercice 1

(a) $\mathbb{R} - \{3\}$

(b) $\mathbb{R} -]-6, 6[$

(c) $\mathbb{R} - \{-3; +2\}$

(d) $\mathbb{R}$

Exercice 2

(a) $]\frac{5}{3}, \infty[$

(b) $[-5, 5]$

(c) $\mathbb{R} - \{0\}$

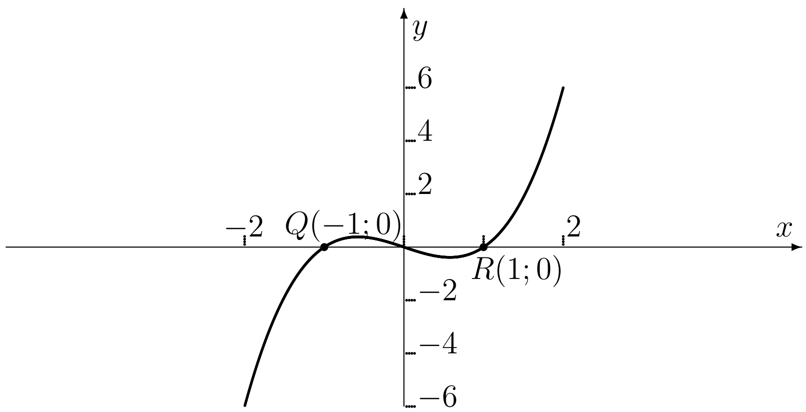
Exercice 3

Nous avions: $f(x) = x^3 - x$

(a) $f(-2) = -6$
$f(3) = 24$
$f(5) = 120$

(b) L'intersection avec l'axe y est le point $P(0; f(0)$, c'est-à-dire $P(0; 0)$. C'est donc une intersection pour y mais aussi pour x. Les intersections avec l'axe x se trouvent aux abscisses x solutions de l'équation $f(x) = 0$. Or, puisque $f(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x + 1)(x - 1)$ nous avons que les solutions sont $x_1 = -1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$, ce qui correspond respectivement aux points $Q(-1; 0)$; au point P déjà retrouvé plus haut et au point $R(1; 0)$.

(c) Pour esquisser la courbe représentative il est opportun d'étoffer le tableau de valeurs trouvé au point (a) par exemple en calculant $f(-1/2) = 0,375$ et $f(1/2) = -0,375$. Esquisser la courbe représentative devient alors assez aisé. On peut également remarquer que la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'origine des axes, ce qui algébriquement se traduit par la relation, facilement vérifiable ici, $f(-x) = -f(x)$. On dit aussi que f est *impaire*.



(d) Puisque f est impaire est $f(-2) = -6$, alors $f(2) = 6$, donc la valeur de x telle que $f(x) = 6$ est $x = 2$.

Exercice 4

(a) La fonction f est paire: $f(x) = f(-x)$ pour chaque $x \in \mathbb{R}$.

(b) La fonction g est impaire: $g(-x) = -g(x)$ pour chaque $x \in \mathbb{R}$.

(c) La fonction h n'est ni paire ni impaire. Pour $x = 1$ on peut facilement vérifier que $h(x) \neq h(-x)$ et $h(-x) \neq -h(x)$.

(d) La fonction j est paire, car $|x| = |-x|$ et donc $j(x) = j(-x)$ pour cahque $x \in \mathbb{R}$.

(e) La fonction m est paire ET impaire. Il s'agit de la seule fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui est paire et impaire.

(f) La fonction n est paire, car $n(x) = n(-x)$.

Exercice 6

$$N(x) = 1 + \frac{x}{85} \cdot 5 = 1 + \frac{x}{17}$$

Exercice 8

(a) $A(x) = x\left(-\frac{2}{3}x + 4\right) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$

(b) $x_{\max} = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{2 \cdot (-\frac{1}{3})} = 3$

(c) $A(3) = 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 3$.

Exercice 9

(a) $C(x) = x^2 + 2x + 11$

(b) $x_{\min} = -\dfrac{b}{2a} = -1$

$P_{\min}(-1; 3)$

(c) $\delta_{\min} = \sqrt{10} \simeq 3,16$.

Exercice 11

Nous avions: $f(x) = x^3 + x^2 - 12x$

(a) $f(-1) = 12$

$f(2) = -12$

$f(5) = 90$

(b) $f(0) = 0$. Le point d'intersection est l'origine $O(0; 0)$.

(c) $f(x) = 0$

$x^3 + x^2 - 12x = 0$

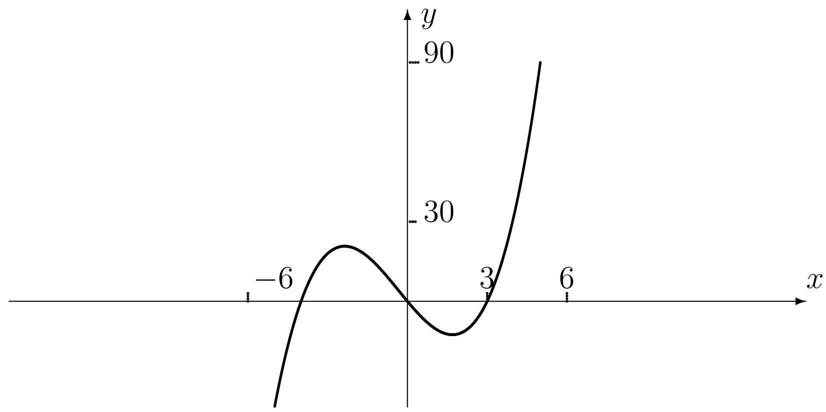
$x(x^2 + x - 12) = 0$

$x(x-3)(x+4) = 0$

$P_1(3; 0); P_2(-4; 0); P_3(0; 0)$. Le point P_3 a déjà été trouvé au point (b)

(d) f est positive pour $x > 3$ et pour $-4 < x < 0$ et est négative pour $x < -4$ et pour $0 < x < 3$.

(e)



Exercice 12

(a) 2,5

(b) $-\dfrac{1}{2} = -0,5$

(c) $\dfrac{1}{5} = 0,2$

(d) 0

(e) La limite n'existe pas. La limite est $+\infty$ ou $-\infty$ selon si on la calcule de gauche ou de droite. Autrement dit:

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x+3}{x+2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x+3}{x+2} = +\infty$$

(f) $\dfrac{1}{5}$

(g) La limite n'existe pas. La limite est $+\infty$ ou $-\infty$ selon si on la calcule de gauche ou de droite. Autrement dit:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{4-2x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{4-2x} = -\infty$$

(h) $\dfrac{4}{27}$

(i) 3

(j) La limite n'existe pas. La limite est $+\infty$ ou $-\infty$ selon si on la calcule de gauche ou de droite. Autrement dit:

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^2+4}{x^3+8} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x^2+4}{x^3+8} = +\infty$$

Exercice 13

(a) -1

(b) $\dfrac{1}{7}$

(c) 2

(d) $\dfrac{7}{3}$

(e) $-\dfrac{5}{24}$

(f) $\dfrac{3}{37}$

Exercice 14

(a) 6

(b) $-\dfrac{1}{3}$

(c) 15

(d) -2

(e) 3

(f) -1

Exercice 15

(a) 0

(b) 0

(c) La limite n'est pas une valeur finie: $\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^4 - 3x^2 - 12x}{5x^3 + 11x^2 - 7x + 1} = +\infty$

(d) 2

(e) 0

(f) La limite n'est pas une valeur finie: $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 + 3x^2 - 1}{x^2 - 2x} = +\infty$

(g) 2

(h) 2

(i) -3

(j) 0

Exercice 16

(a) 3

(b) 4

(c) -15

(d) 3

Exercice 17

(a) $-\frac{1}{2}$

(b) 2

(c) 2

(d) n'est pas une valeur finie: $\lim_{x\to 0} \frac{2[x]-3x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2-3x}{x} = +\infty$

Exercice 18

(a) Nous avons:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - 1 & \text{si } x < 2 \\ \\ -x+3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Donc $f(2) = 1$, mais $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{2}x - 1 = 0$. Donc f est continue partout sauf pour $x = 2$.

(b) Nous avons:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x-3}{x-3} & \text{si } x \neq 3 \\ \\ 4 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Donc $g(3) = 4$, et $\lim_{x\to 3} g(x) = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)} = 4$. Donc g est continue partout.

(c) Nous avons:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Donc $h(0) = 1$, mais $\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{x} = -1$. Donc h est continue partout sauf pour $x = 0$.

(d) Nous avons:

$$c(x) = \frac{3}{x-4}.$$

Le domaine de définition, $\mathbb{R} - \{4\}$ est aussi le domaine de continuité.

12.4 Limites infinies

Définition 1. On dit que la limite de la fonction f lorsque x tends vers a est $+\infty$ si pour chaque $L > 0$ arbitrairement grand, $f(x) > L$ pour autant que x soit assez proche de a.

Définition 2. On dit que la limite de la fonction f lorsque x tends vers a est $-\infty$ si pour chaque $L > 0$ arbitrairement grand, on a que $f(x) < -L$ pour autant que x soit assez proche de a.

Remarque. Les deux définitions ci-dessus peuvent se donner aussi pour le cas particulier de limite à gauche et de limite à droite.

12.5 Division de polynômes

Ici nous présentons l'algorithme de la division Euclidienne des polynômes (division en colonne). Supposons qu'on veuille diviser le polynome x^3+x^2-1 par le polynôme $x-1$. La division en colonne se pose comme but de trouver un résultat de la division (quotient) et un reste. On commence par écrire les deux polynômes selon le schéma montré ci-dessous. Il est important que les polynômes apparaissent avec les termes ordonnées en ordre décroissant de dégres.

$$\begin{array}{lll|l} x^3 & +x^2 & -1 & x \; -1 \\ \cline{4-4} & & & \end{array}$$

La première étape sera alors d'écrire le premier terme du quotient dans l'espace juste en dessous à droite reservé à l'écriture du quotient. Le premier terme sera déterminé comme étant le premier terme de l'expression à gauche (donc x^3) divisé par le premier terme de l'expression à droite, qui est x: donc comme $x^3/x = x^2$ on va donc écrire x^2.

$$\begin{array}{lll|l} x^3 & +x^2 & -1 & \;x \; -1 \\ \cline{4-4} & & & x^2 \end{array}$$

Ensuite x^2 est multiplié par toute l'expression à droite $(x-1)$ et le résultat de la multiplication est placé à gauche en colonne:

$$\begin{array}{lll|l} x^3 & +x^2 & -1 & \;x \; -1 \\ \cline{4-4} x^3 & -x^2 & & x^2 \end{array}$$

Ensuite on soustrait en colonne (en faisant attention à des éventuels doubles signes "$-$" :

$$\begin{array}{rrr|l}
x^3 & +x^2 & -1 & x \ -1 \\ \cline{4-4}
x^3 & -x^2 & & x^2 \\ \cline{1-2}
& 2x^2 & &
\end{array}$$

On recommence avec l'étape suivante qui est d'écrire le terme suivant dans l'epace reservé au résultat: ce terme sera le premier terme trouvé à gauche ($2x^2$) divisé par le même premier terme de la première étape (x). Or comme $2x^2/x = 2x$ on va justement écrire $+2x$ à cet espace:

$$\begin{array}{rrr|l}
x^3 & +x^2 & -1 & x \quad -1 \\ \cline{4-4}
x^3 & -x^2 & & x^2 \ +2x \\ \cline{1-2}
& 2x^2 & &
\end{array}$$

et on recommence par multiplier $2x$ par $x-1$ et comme avant placer le résultat en colonne. On continue ainsi jusqu'à il ne soit plus possible d'ajouter des termes dans l'espace prévu pour le quotient. La division complète apparaîtra donc comme ci-dessous:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +x^2 & & -1 & x \quad -1 \\ \cline{5-5}
x^3 & -x^2 & & & x^2 \ +2x \ +2 \\ \cline{1-2}
& 2x^2 & & & \\
& 2x^2 & -2x & & \\ \cline{2-3}
& & 2x & & \\
& & 2x & -2 & \\ \cline{3-4}
& & & +1 &
\end{array}$$

Algébriquement la division Euclidienne ci-dessus peut s'interpréter aussi avec l'identité:

$$\frac{x^3 + x^2 - 1}{x - 1} = x^2 + 2x + 2 + \frac{+1}{x - 1}.$$

Exercice 19

(a) $f(x) = \dfrac{3x - 2}{x + 4}$

AH: $y = 3$; AV: $x = -4$; AO: aucun

(b) $g(x) = -\dfrac{2x-1}{x^2-9}$

AH: $y = 0$; AV: $x = 3$ et $x = -3$; AO: aucun

(c) $h(x) = 2x - 5 - \dfrac{3}{x-4}$

AH: aucun; AV: $x = 4$; AO: $y = 2x - 5$.

(d) $i(x) = \dfrac{-2x^2 - 3x + 33}{x+5} = -2x + 7 - \dfrac{2}{x+5}$

AH: aucun; AV: $x = -5$; AO: $y = -2x + 7$.

Exercice 20

(a) $D(x) = \dfrac{250x^2 + 5000x + 9000}{x^2 + 36}$

$D(20) = \dfrac{100'000 + 100'000 + 9'000}{436} = \dfrac{209'000}{436} \simeq 479$

$D(25) = \dfrac{290250}{661} \simeq 439.$

La densité passe de 479 a 439 hab/km^2.

(b) On a: $\lim_{x\to\infty} D(x) = 250$. Donc la densité sera de 250 hab/km^2 à un endroit très éloigné du centre.

(c) $\dfrac{250x^2 + 5000x + 9000}{x^2 + 36} > 650$

$250x^2 + 5000x + 9000 > 650x^2 + 23400$

$-400x^2 + 5000x - 14400 > 0$

$4x^2 - 50x + 144 < 0$

$2x^2 - 25x + 72 < 0$

$x = \dfrac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{4} = \dfrac{25 \pm 7}{4}$

Les deux solutions sont donc 8 et $4,5$. À une distance comprise entre 4,5 et 8 km la densité dépasse 650 hab/km^2.

Exercice 21

(a) $C(x) = \dfrac{20x}{101 - x}$ donc :

$C(100) = \dfrac{2000}{1} = 2000$, ce qui correspond à 2 milliards d'euro.

$C(90) = \dfrac{1800}{11} \simeq 163$, ce qui correspond à 163 millions d'euro.

(b) La fonction $C(x)$ a un asymptote verticale pour $x = 101$ et un asymptote horizontal pour $y = -20$, mais par définition x ici est de toute façon compris entre 0 et 100. On peut remarquer que la fonction entre 0 et 100 est croissante.

Exercice 22

$f(x) = x^3$

$$\begin{aligned}
f'(1) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1+\Delta x)^3 - 1^3}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 + 3\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 1}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 3 + 3\Delta x + (\Delta x)^2 \\
&= 3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^3 - 2^3}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{8 + 12\Delta x + 6(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 8}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 12 + 6\Delta x + (\Delta x)^2 \\
&= 12.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f'(5) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(5+\Delta x)^3 - 5^3}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5^3 + 3\cdot 5^2 \Delta x + 3\cdot 5(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 5^3}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 3\cdot 5^2 + 3\cdot 5\Delta x + (\Delta x)^2 \\
&= 75.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 \\
&= 3x^2.
\end{aligned}
$$

Exercice 23

$f(x) = 1.$
$f'(1) = f'(2) = f'(5) = f'(x) = 0.$

Exercice 24

$f(x) = x^6$
$f'(x) = 6x^5;$ $f'(2) = 192.$

Exercice 25

(a) $(x^4 + x^7)' = 4x^3 + 7x^6$

(b) $(5 + x^9)' = 9x^8$

(c) $(e^x + x)' = e^x + 1$

Exercice 26

(a) $(2x^6 + 3x^7)' = 12x^5 + 21x^6$

(b) $(5x^2 - 2x^5)' = 10x - 10x^4$

(c) $(8e^x + 11\ln x)' = 8e^x + \frac{11}{x}$

Exercice 27

(a)
$$\begin{aligned}(x^2(4x^3-3x))' &= 2x(4x^3-3x) + x^2(12x^2-3)\\ &= 8x^4 - 6x^2 + 12x^4 - 3x^2\\ &= 20x^4 - 9x^2\end{aligned}$$

Une autre manière de résoudre le même exercice:
$(x^2(4x^3-3x))' = (4x^5-3x^3)' = 20x^4 - 9x^2$

(b)
$$\begin{aligned}(\ln x \cdot x^4)' &= \frac{1}{x} \cdot x^4 + \ln x \cdot 4x^3\\ &= x^3 + 4x^3 \ln x\\ &= x^3(1 + 4\ln x)\end{aligned}$$

Exercice 28

(a)

$$\left(\frac{x^2-1}{3x+1}\right)' = \frac{2x(3x+1)-(x^2-1)\cdot 3}{(3x+1)^2}$$

$$= \frac{6x^2+2x-3x^2+3}{(3x+1)^2}$$

$$= \frac{3x^2+2x+3}{(3x+1)^2}$$

ce résultat peut également s'exprimer aussi comme suit:

$$= \frac{6x^2+2x-3x^2+3}{9x^2+6x+1}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{8}{3(3x+1)^2}$$

(b)

$$\left(\frac{8x+1}{x^2+x-3}\right)' = \frac{8(x^2+x-3)-(8x+1)(2x+1)}{(x^2+x-3)^2}$$

$$= \frac{8x^2+8x-24-16x^2-10x-1}{(x^2+x-3)^2}$$

$$= \frac{-8x^2-2x-25}{(x^2+x-3)^2}$$

Exercice 29

(a) 0

(b) 4

(c) $6x$

(d) $-55x^4$

(e) $68x^3 - 39x^2 + 10x - 6$

(f) $\frac{1}{\sqrt{x}} + 3e^x - 8x$

(g) $6x \ln x + 3x$

(h) $(10x + 5x^2)e^x$

Exercice 30

(a) $(x-3) + x + 5 = 2x + 2$

(b) $6x(x^2-1) + (3x^2+5) \cdot 2x = 12x^3 + 4x$

(c)
$$\begin{aligned} -\frac{1}{x^2}(1-\ln x) + \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x}\right) &= -\tfrac{1}{x^2}(1-\ln x + 1) \\ &= -\frac{1}{x^2}(2-\ln x) \end{aligned}$$

(d) $e^x\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

(e) $\frac{3(2-5x)-(3x+4)(-5)}{(2-5x)^2} = \frac{6-15x+15x+20}{(2-5x)^2} = \frac{26}{(2-5x)^2}$

(f) $\frac{3x^2(1-x^2)-x^3(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2-3x^4+2x^4}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2-x^4}{(1-x^2)^2}$

(g)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{5x^2-x+3}{x^3-4x^2+x-1}\right)' &= \frac{(10x-1)(x^3-4x^2+x-1)-(5x^2-x+3)(3x^2-8x+1)}{(x^3-4x^2+x-1)^2} \\
&= \frac{10x^4-40x^3+10x^2-10x-x^3+4x^2-x+1-15x^4+40x^3-5x^2}{(x^3-4x^2+x-1)^2} \\
&\quad + \frac{+3x^3-8x^2+x-9x^2+24x-3}{(x^3-4x^2+x-1)^2} \\
&= \frac{-5x^4+2x^3-8x^2+14x-2}{(x^3-4x^2+x-1)^2}
\end{aligned}$$

(h) $\left(\frac{2x+3}{x^2+1}\right)' = \frac{2(x^2+1)-(2x+3)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2-6x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2-6x+2}{(x^2+1)^2}$

Exercice 31

(a) $((x^2-1)^{10})' = 10(x^2-1)^9 \cdot 2x = 20x(x^2-1)^9$

(b) $(\sqrt{1-4x^2})' = \frac{1}{2\sqrt{1-4x^2}} \cdot (-8x) = -\frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}$

(c) $((4x^3-5x^2+2x-7)^{11})' = 11(4x^3-5x^2+2x-7)^{10}(12x^2-10x+2)$

(d) On a:

$$\left(\frac{2x}{(x-1)^2}\right)' = \frac{2(x-1)^2 - 2x \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{2x^2 - 4x + 2 - 4x^2 + 4x}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{2 - 2x^2}{(x-1)^4}$$

(e) $(\sqrt{e^x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{e^x}} \cdot e^x = \dfrac{1}{2}\sqrt{e^x}$

(f) $(\ln(3x^2 + 4x + 1))' = \dfrac{6x+4}{3x^2+4x+1}$

(g) $(3e^{4x})' = 12e^{4x}$

(h) $(e^{x^4})' = 4x^3 \cdot e^{x^4}$.

Exercice 32

(a) $\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)' = \dfrac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{(\ln x)^2}$.

(b) $(\sqrt{x^2+1})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

(c) $(\ln x^2)' = \dfrac{1}{x^2} \cdot 2x = \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x}$.

(d) On a:

$$\left(\frac{(2x+1)^2}{x-2}\right)' = \frac{2(2x+1)\cdot 2(x-2)-(2x+1)^2\cdot 1}{(x-2)^2}$$

$$\frac{8x^2-12x-8-4x^2-4x-1}{(x-2)^2}$$

$$\frac{4x^2-16x-9}{(x-2)^2}$$

(e) On a ici:

$$((x-1)^3(2x+1)^2)' = 3(x-1)^2(2x+1)^2+4(x-1)^3(2x+1)$$

$$= (x-1)^2(2x+1)(6x+3+4x-4)$$

$$= (x-1)^2(2x+1)(10x-1)$$

(f) $\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)' = \dfrac{e^x(e^x+1)-(e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

(g) $(5(\ln x)^5)' = 25(\ln x)^4 \cdot \dfrac{1}{x}$

(h) $((\sqrt{x})^8)' = 4x^3$ (pour $x \geq 0$)

Exercice 33

La fonction en question est:

$$y = \frac{x^2-2x+5}{x+1}.$$

Le point d'abscisse 2 est le point $T(2; y(2)) = T(2; \frac{5}{3})$. La tangente à la courbe au point d'abscisse 2 est

t : $\quad y = y'(2)(x-2) + \dfrac{5}{3}$

et comme

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{(2x-2)(x+1) - (x^2 - 2x + 5)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 2 - x^2 + 2x - 5}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x - 7}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

on a donc $y'(2) = \frac{1}{9}$ ce qui implique que l'équation de la tangente recherché est

$$y = \frac{1}{9}(x-2) + \frac{5}{3} = \frac{1}{9}x + \frac{13}{9}.$$

Exercice 34

Nous avons:

$y = \sqrt{2x+1} \qquad y'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}} \qquad y'(4) = \dfrac{1}{3} \qquad y(4) = 3$

La tangente à la courbe représentative au point d'abscisse 4 est:

t : $\quad y = \dfrac{1}{3}(x-4) + 3 = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{5}{3}.$

Exercice 35

Nous avons ici : $y = \dfrac{x^2-1}{2x+1}$. On a donc:

$$y' = \frac{2x(2x+1) - (x^2-1)\cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{4x^2 + 2x - 2x^2 + 2}{(2x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x + 2}{(2x+1)^2}$$

et donc $y'(-1) = 2$.

La droite t a donc pente égale à 2. Elle doit passer par le point $P(-1; y(-1)) = P(-1; 0)$. Son équation doit donc vérifier

$$\begin{cases} y &= 2x + h \\ \\ 0 &= 2 \cdot (-1) + h \end{cases}$$

ce qui entraîne $h = 2$. L'équation cartésienne de la droite t est alors:

$$t = 2x + 2.$$

Exercice 36

On a ici $f(x) = x^2 - 4x + 11$. Par conséquent: $f'(x) = 2x - 4$. Donc:

$$f'(x) > 0 \qquad \text{pour } x > 2$$

$$f'(x) = 0 \qquad \text{pour } x = 2$$

$$f'(x) < 0 \qquad \text{pour } x < 2$$

Le point $T(2; f(2)) = T(2; 7)$ est donc un minimum. La fonction est d'ailleurs une parabole.

Exercice 37

On a:

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 120x + 19$$

$$f'(x) = -6x^2 + 6x + 120$$

Le signe de la dérivée est donc celui de $-6x^2 + 6x + 120$. On a:

$$-6x^2 + 6x + 120 = -6(x^2 - x - 20) = -6(x-5)(x+4)$$

et donc

$$f'(x) = -6x^2 + 6x + 120 \text{ est } \begin{cases} < 0 & \text{si } x < -4 \\ = 0 & \text{si } x = -4 \\ > 0 & \text{si } -4 < x < 5 \\ = 0 & \text{si } x = 5 \\ < 0 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

La fonction a donc un minimum (relatif) pour $x = -4$ et un maximum relatif pour $x = 5$.

Exercice 38

La fonction de départ est: $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{2x}$. On a donc:

$$f'(x) = \frac{(2x-2)\cdot 2x - (x^2-2x+5)\cdot 2}{4x^2}$$

$$= 2 \cdot \frac{2x^2-2x-x^2+2x-5}{4x^2}$$

$$= \frac{x^2-5}{2x^2}$$

Le tableau de variation est donc le suivant:

		$-\sqrt{5}$		0		$+\sqrt{5}$	
x^2-5	$++++$	0	$----$	$-$	$----$	0	$++++$
$2x^2$	$++++$	$+$	$++++$	0	$++++$	$+$	$++++$
$f(x)$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$
		max		AV		min	

Notons que la courbe représentative de f n'intersecte pas l'axe des x, car $x^2-2x+5=0$ n'a pas de solutions réelles.

La maximum relatif se trouve pour $x=-\sqrt{5}$ et il vaut:

$$f(-\sqrt(5)) = -1-\sqrt{5} \simeq -3,236.$$

La minimum relatif se trouve pour $x=\sqrt{5}$ et il vaut:

$$f(\sqrt(5)) = -1+\sqrt{5} \simeq 1,236.$$

Exercice 39

La fonction de départ est $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4$. On a donc:
$f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 - 3x = 3x\left(-\frac{1}{4}x - 1\right)$
$f''(x) = -\frac{3}{2}x - 3$.

La dérivée s'annule pour $x = 0$ et pour $x = -4$. Puisque $f''(0) = -3$, le point $x = 0$ est un maximum (local) et f est concave dans un voisinage de $x = 0$. Puisque $f''(-4) = 3$, le point $x = -4$ est un minimum (local) et f est convexe dans un voisinage de $x = -4$. Le point d'infÃľexion est donné par $f''(x) = 0$, et il se trouve donc pour $-\frac{3}{2}x - 3 = 0$, c'est-à-dire pour $x = -2$.

$f(-4) = -4$
$f(-2) = 0$
$f(0) = 4$.

Exercice 40

La fonction de départ est $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 5x^2 + \frac{64}{3}$. On a donc:

(a) $f(8) = -\frac{2}{3} \cdot 512 + 5 \cdot 64 + \frac{64}{3} = \frac{-1024 + 960 + 64}{3} = 0$

$f'(x) = -3x^2 + 10x$

$f'(x) = 0$ pour $-2x^2 + 10x = 0$, c'est-à-dire lorsque $x = 0$ et $x = 5$.

(b) $f''(x) = -4x + 10$ et donc $f''(x) = 0$ pour $x = \frac{5}{2}$.

On a: $f''(0) = 10$ et $f''(5) = -10$. Donc le point $A(0; \frac{64}{3})$ est un minimum et le point $B(5; 63)$ est un maximum. Puisque le minimum est positif, $x = 8$ est le seul point où $f(x) = 0$.

(c) Le point de plus forte croissance est le maximum de f' c'est-à-dire $x = \frac{5}{2}$, qui est aussi le point d'inflexion.

(d) On a : $-2x^2 + 10x = 8 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x - 1) = 0$. Donc les solutions sont $x = 1$ et $x = 4$. On a $f(1) = \frac{77}{3}$ et $f(4) = \frac{176}{3}$. La droite tangente pour $x = 1$ est donc:

$$y = 8x + \frac{53}{3}$$

La droite tangente pour $x = 4$ est:

$$y = 8x + \frac{80}{3}$$

Exercice 41

La fonction de départ est $V(x) = \dfrac{300x}{x^2+9}$. On a donc:

(a) $V(x) = 30 \Leftrightarrow \dfrac{300x}{x^2+9} = 30 \Leftrightarrow 300x = 30x^2 + 270$, ce qui donne l'équation:

$x^2 - 10x + 9 = 0$ qui peut aussi s'exprimer comme $(x-9)(x-1) = 0$. L'investisseur a gardé l'action entre le premier et le neuvième mois

(b) On a:

$$V'(x) = \frac{300(x^2+9) - 300x \cdot 2x}{(x^2+9)^2} = \frac{-300x^2 + 2700}{(x^2+9)^2}.$$

Donc $V'(x) = 0$ lorsque $-300x^2 + 2700 = 0$, c'est-à-dire lorsque $x^2 = 9$, ce qui veut dire que $x = \pm 3$. L'action atteint son maximum pour $x = 3$, c'est-à-dire au troisième mois et cette valuer est $V(3) = \dfrac{900}{18} = 50$ dollars.

(c) On a: $V'(6) = \dfrac{-300 \cdot 36 + 2700}{(36+9)^2} = -4$. L'action est donc en train de décroître. On a aussi:

$V(6) = 40$ ce qui donne une équation pour la tangente au point $P(6; 40)$ qui est donc:

$$y = -4x + 64.$$

(d) On a:

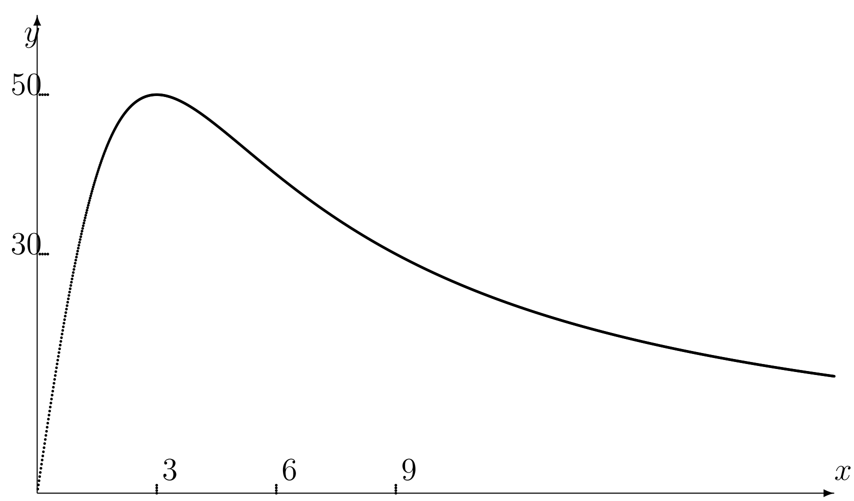
$$V''(x) = \frac{-600x(x^2+9)^2 - (-300x^2+2700)\cdot 2(x^2+9)\cdot 2x}{(x^2+9)^4}$$

$$= \frac{x(x^2+9)(-600(x^2+9)+(300x^2-2700)\cdot 4)}{(x^2+9)^4}$$

$$= \frac{600x(x^2-27)}{(x^2+9)^3}$$

Le point d'inflexion se trouve à l'abscisse $x = \sqrt{27} \simeq 5,1$.

(e)



Exercice 42

La fonction de départ est $P(t) = \dfrac{100e^t}{99+e^t}$. On a donc:

(a) Puisque $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{100e^t}{99+e^t} = 100$, la fonction admet une asymptote et son équation est $y = 100$. Il s'agit d'une asymptote horizontale.

(b) On a:

$$P'(t) = \frac{100e^t(99+e^t) - 100e^t \cdot e^t}{(99+e^t)^2} = \frac{9900e^t}{(99+e^t)^2}.$$

Donc la dérivée est toujours positive. la proportion de population informée est toujours croissante.

(c) On a:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{100}(P(t))^2 + P(t) &= -\frac{1}{100}\left(\frac{100e^t}{99+e^t}\right)^2 + \frac{100e^t}{99+e^t} \\ &= -\frac{100e^{2t}}{(99+e^t)^2} + \frac{100e^t}{99+e^t} \cdot \frac{99+e^t}{99+e^t} \\ &= \frac{9900e^t}{(99+e^t)^2} \\ &= P'(t) \end{aligned}$$

(d) En dérivant la relation trouvée sous (c) on a:

$$P''(t) = -\frac{2}{100}P(t)P'(t) + P'(t) = P'(t)\left(-\frac{1}{50}P(t) + 1\right).$$

Donc effectivement lorsque $P(t) = 50$, on a que $P''(t) = 0$ et donc il y a un point d'inflexion pour la valeur t telle que $P(t) = 50$.

Or $P(t) = 50$ se traduit en équation par

$$\frac{100e^t}{99+e^t} = 50$$

ou encore:

$$100e^t = 4950 + 50e^t$$

$$50e^t = 950$$

$$e^t = 99$$

ce qui signifie finalement

$$t = \ln 99 \simeq 4,6.$$

(e)